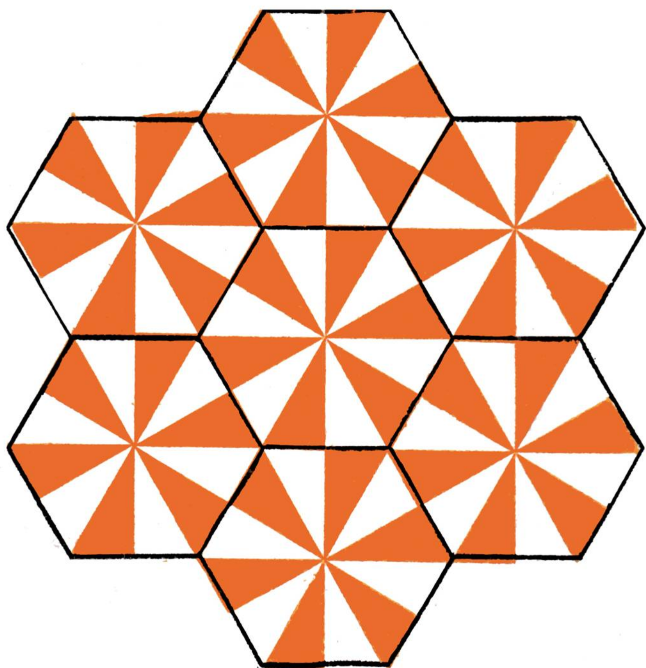
M. GARDNERIS

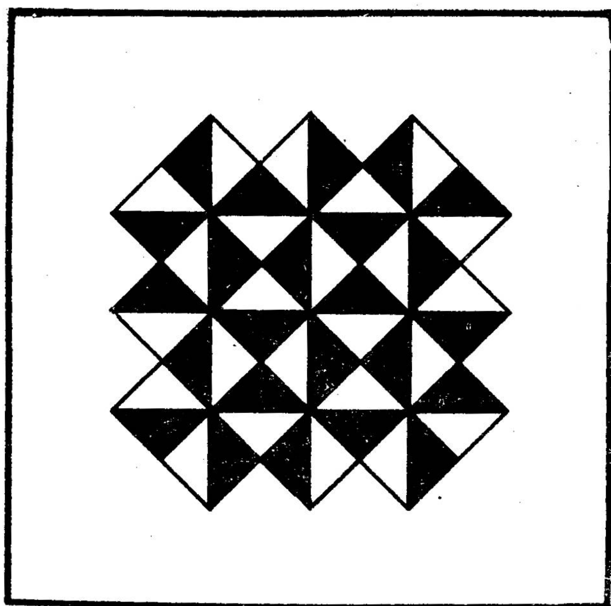


Matematika laisvalaikiu

M. GARDNERIS

Matematika laisvalaikiu

PAGALBINĖ PRIEMONĖ MOKINIAMS





KAUNAS ŠVIESA 1980

51 (075) М. Гарднер
Ga 373 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДОСУГИ
Перевод с английского *Ю. А. Данилова*
Под редакцией *Я. А. Смородинского*
Издательство «Мир», Москва, 1972

Vertė **Vytautas Liutikas**

Gardneris M.

Ga 373 Matematika laisvalaikiu: Pagalbinė priemonė mokiniams.— K.: Šviesa, 1980.— 454 p., iliustr.

Žinomo amerikiečių įdomiosios matematikos specialisto knyga labai patraukliai pasakoja skaitytojui daug nuostabių dalykų iš įvairiausių matematikos sričių. Leidinys prieinamas plačiam skaitytojų ratui. Jį su įdomumu perskaitys aukštesniųjų klasių mokiniai.

51(075)

4306020400

G $\frac{\textbf{60601—567}}{\textbf{M853(10)—80}}$ **148—79**

Pratarmė

Vystantis gamtos mokslams, matematiniai žaidimai bei lošimai iš klasikinės eros perėjo į šiuolaikinę. Ne tik mokslas, bet ir XX amžiaus pramogos neatskiriamos nuo šiuolaikinės matematikos. Klasikiniais laikais tik tikimybių teorijoje organiškai pasireiškė lošimų teorija, dabar pats žodis „lošimas“ tapo matematiniu terminu, plačiai vartojamu įvairiausiuose moksluose: ekonomikoje, biologijoje, karyboje... Tačiau populiarioji literatūra beveik neatspindėjo šių permainų.

Naujus kelius šioje sunkioje srityje, be abejonės, grindė ir Martinas Gardneris. Jo knygos teisėtai galėtų būti vadinamos „XX amžiaus matematinėmis pramogomis“. Jos atskleidžia skaitytojui visai naują pasaulį. Remdamasis įvairiausiais šaltiniais, apibendrindamas dešimčių matematikų ir fizikų tyrinėjimus, autorius iš esmės sukuria naują populiariosios literatūros žanrą. Jo knygos skirtos plačiausiam skaitytojų ratui ir drauge nagrinėja gana sunkius šiuolaikinio mokslo skyrius. Skaitytojas negali nejausti pasitenkinimo, pamatęs netikėtus ryšius tarp pramogų ir rimto mokslo, nesistebėti abstrakčių sąvokų ir skaičiavimo technikos išradingu pritaikymu žaidimų bei lošimų ir galvosūkių analizei...

Pirmąją Gardnerio knygą „Matematiniai galvosūkiai ir pramogos“, rusų kalba išleistą 1971 m., palankiai įvertino skaitytojai. Trisdešimt aštuonios matematinės miniatiūros, sudarančios antrąjį tomą, ne mažiau įdomios, kaip ir pirmosios keturiasdešimt šešios. Tie aštuoniasdešimt keturi skyriai praktiškai atspindi penkių Gardnerio rinkinių, išleistų anglų kalba ir pirmiausia atspausdintų žurnale *Scientific American* 1956—1964 metais, turinį. Chronologinę tvarką pažeidžia tik paskutinis skyrius „Žaidimas „Gyvenimas“. Paskelbtas 1971 metais, jis turėjo patekti į kitą knygą. Vis dėlto žaidimas „Gyvenimas“ toks neįprastas ir nepanašus į visus kitus, kad mes norėjome jį pateikti kaip XX amžiui būdingo žaidimo pavyzdį. Jį

geriausia žaisti su skaičiavimo mašina. Šiame žaidime keisčiausias pozicijų pakeitimas ir sunkiai iš anksto atspėjama įvykių eiga sudaro beveik paruoštą patrauklaus kino filmo scenarijų.

Knygos pabaigoje pateiktas įdomiosios matematikos literatūros rusų kalba sąrašas, papildantis sąrašą, paskelbtą pirmajame tome. Tai iš esmės pirmas tokios bibliografijos bandymas.

J. DANILOVAS
J. SMORODINSKIS

I skyrius

Oilerio klaida: Dešimtosios eilės graikiškų-lotyniškų kvadratų atradimas

Matematikos istorija turtinga sąmojingų hipotezių (mokslininkų, kurie apdovanoti matematiniu įžvalgumu, intuicijos padiktuotų), kurios šimtmečiais nei įrodomos, nei paneigiamos. Kuomet pagaliau jos įrodomos (arba paneigiamos), matematikai tai laiko didžiai reikšmingu įvykiu.

1959 m. balandžio mėn. Amerikos matematikų draugijos suvažiavime (kurie vyksta kasmet), buvo paskelbti pranešimai iš karto apie du tokius darbus. Vienas jų mūsų nedomina (jis priklauso sudėtingiems grupių teorijos skyriams); bet antrasis, skirtas paneigti didžiojo matematiko Oilerio hipotezei, susijęs su daugybe įdomiosios matematikos uždavinių. Kitados Oileris iškėlė teiginį, kad tam tikrų eilių graikiški-lotyniški kvadratai neegzistuoja, ir ši hipotezė 177 metus buvo laikoma nepaneigiama. Vis dėlto trims matematikams (E. T. Parkeriui, R. K. Bosui ir S. S. Šrikhendui) pavyko sudaryti dešimtosios eilės graikiškus-lotyniškus kvadratus ir drauge paneigti Oilerio hipotezę.

Matematikų trio, kurį bičiuliai pakrikštijo „Oilerio demaskuotoju", parašė trumputį darbą apie savo atradimą. Pateiksiu jį su kai kuriais komentarais.

„Paskutiniais gyvenimo metais Leonardas Oileris (1707—1783) apie magiškuosius kvadratus parašė platoką memuarą „Naujo tipo magiškojo kvadrato tyrimas". Dabar tokius kvadratus priimta vadinti lotyniškais, nes Oileris jų langelius žymėjo lotyniškomis raidėmis (vietoje graikiškos abėcėlės raidžių)".

a	b	c	d
b	a	d	c
c	d	a	b
d	c	b	a

α	β	γ	δ
γ	δ	α	β
δ	γ	β	α
β	α	δ	γ

aα	bβ	cγ	dδ
bγ	aδ	dα	cβ
cδ	dγ	aβ	bα
dβ	cα	bδ	aγ

1 pav. Graikiškas-lotyniškas kvadratas (dešinėje), sudarytas, uždėjus vieną ant kito (superpozicija) du kvadratus, pavaizduotus kairėje

Išnagrinėsime, pavyzdžiui, kvadratą, pavaizduotą 1 paveiksle, kairėje. Šešiolika langelių užpildyta lotyniškomis raidėmis *a, b, c* ir *d* taip, kad kiekviename stulpelyje ir kiekvienoje eilutėje raidės nesikartoja. 1 paveikslo centre yra kitas lotyniškas kvadratas, kurio langeliuose įrašytos graikiškos raidės α, β, γ, δ. Uždėję kvadratus vieną ant kito taip, kaip parodyta dešiniajame paveiksle, pamatysime, kad kiekviena lotyniška raidė pasirodo vieną ir tik vieną kartą poroje su kiekviena graikiška raide. Du ar daugiau lotyniškų kvadratų, kuriuos galima panašiai sukombinuoti vieną su kitu, vadinami ortogonaliais, o gautąjį kombinuotą kvadratą priimta vadinti graikišku-lotynišku kvadratu.

Raidžių išdestymas dešiniajame kvadrate yra aštuonioliktojo šimtmečio populiaraus kortų galvosūkio sprendimas: iš visų spalvų kortų tūzų, karalių, damų ir bernelių (iš viso 16 kortų) reikia sudėti kvadratą taip, kad kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje būtų keturių skirtingų spalvų ir keturių skirtingų reikšmių kortos. Pamėginkite išspręsti kitą uždavinį, kuriame tų pačių sąlygų reikia ne tik eilutėms ir stulpeliams, bet ir dviem pagrindinėms įstrižainėms.

„Bendru atveju *n*-tosios eilės lotyniškas kvadratas apibrėžiamas kaip $n \times n$ matmenų kvadratas, kurio visi n^2 langeliai užpildyti *n* skirtingais simboliais taip, kad kiekvienas simbolis vieną ir tik vieną kartą įrašomas kiekviename stulpelyje ir kiekvienoje eilutėje. Gali egzistuoti dviejų ar dau-

0	1	2	3	4
1	2	3	4	0
2	3	4	0	1
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3

0	1	2	3	4
2	3	4	0	1
4	0	1	2	3
1	2	3	4	0
3	4	0	1	2

0	1	2	3	4
3	4	0	1	2
1	2	3	4	0
4	0	1	2	3
2	3	4	0	1

0	1	2	3	4
4	0	1	2	3
3	4	0	1	2
2	3	4	0	1
1	2	3	4	0

2 pav. Keturi penktosios eilės tarpusavyje ortogonalūs lotyniški kvadratai

giau lotyniškų kvadratų, kurie poromis tarpusavyje ortogonalūs, rinkinys. 2 paveiksle parodyti keturi penktosios eilės su skaičiais vietoje simbolių tarpusavyje ortogonalūs lotyniški kvadratai".

Oilerio laikais mokėta įrodyti, kad antrosios eilės graikiškas-lotyniškas kvadratas neegzistuoja. Buvo žinomi trečiosios, ketvirtosios ir penktosios eilės kvadratai. Suprantama, kilo klausimas: o kokie rezultatai, kai $n=6$? Oileris suformulavo uždavinį taip. Kiekviename iš šešių pulkų tarnauja šeši skirtingų šešių laipsnių karininkai. Ar galima šiuos 36 karininkus surikiuoti taip, kad kiekvienoje kolonoje ir kiekvienoje gretoje stovintys šeši karininkai būtų šešių skirtingų laipsnių ir tarnautų šešiuose skirtinguose pulkuose?

„Oileris įrodė, kad uždavinį apie n^2 karininkų (ekvivalentus uždaviniui apie n-tosios eilės graikiško-lotyniško kvadrato sudarymą) surikiavimą visada galima išspręsti, kai n — nelyginis arba „lyginiai lyginis" (tai yra dalus iš keturių) skaičius. Atidžiai išanalizavęs uždavinį, Oileris padarė tokią išvadą: „Aš neabejoju tuo, kad iš 36 langelių neįmanoma sudaryti pilno kvadrato; tą patį galima teigti ir tada, kai $n=10$, $n=14$, ir apskritai, kai n lygus bet kuriam nelyginiai lyginiam skaičiui" (tai yra lyginiam skaičiui, nesidalijančiam iš keturių). Ši išvada žinoma kaip Oilerio hipotezė. Griežtesnė hipotezės formuluotė tokia: nė vienam sveikam teigiamam skaičiui k nėra $n=4k+2$ eilės ortogonalių lotyniškų kvadratų poros.

1901 metais prancūzų matematikas Gastonas Taris paskelbė Oilerio hipotezės apie šeštosios eilės kvadratą įrodymą. Taris uždavinį įrodė drauge su savo broliu, ir atliko jie tai labai varginančiu būdu, paprasčiausiai surašydami visus galimus lotyniškus šeštosios eilės kvadratus ir įrodydami, kad nė viena jų pora negali sudaryti graikiško-lotyniško kvadrato. Tai, be abejo, patvirtino Oilerio hipotezę. Kai kurie matematikai net spaudoje paskelbė „įrodymus", kad Oilerio hipotezė teisinga, bet vėliau visuose tuose įrodymuose buvo rasta klaidų. Tario metodas vis daugiau reikalauja varginančio darbo, didėjant kvadrato eilei. Kitas neišnagrinėtas atvejis ($n=10$) pasirodė jau per daug sudėtingas tokiam tyrimui ir 1959 metais dar tebebuvo neįveikiamas elektroninėms skaičiavimo mašinoms. Kalifornijos Los Andželo universiteto matematikai sudarė dešimtosios eilės graikiškų-lotyniškų kvadratų ieškojimo programą mašinai SWAC. Veikusi daugiau kaip 100 valandų, mašina nerado nė vieno kvadrato. Reikia pasakyti, kad ieškojimai apsiribojo labai menka visų galimų atvejų dalimi. Iš to buvo galima padaryti tik vieną išvadą: jeigu Oilerio hipotezė teisinga, tam įrodyti greičiausiai veikiančiai 1959 metų elektroninei skaičiavimo mašinai prireiktų ne mažiau kaip šimtmečio (jeigu ji dirbtų pagal programą, sudarytą SWAC).

„Oilerio memuaras baigiasi fraze: „Tuo aš nutraukiu tyrimą uždavinio, kuris, būdamas iš es-

mės nelabai naudingas, iškėlė mums gana svarbių kombinatorikos ir magiškųjų kvadratų bendrosios teorijos klausimų“.

Stebinantis mokslų vienovės pavyzdys yra tai, kad nagrinėti Oilerio hipotezę paskatino praktiški žemės ūkio poreikiai, o tyrimai, kuriuos Oileris laikė nenaudingais, pasirodė esą ypatingai svarbūs eksperimentų planavimui“.

Ronaldas Fišeris, dabar žinomas mokslininkas, Kembridžo universiteto genetikos profesorius, mūsų amžiaus trečiojo dešimtmečio pradžioje pirmasis parodė, kaip panaudoti lotyniškus kvadratus žemės ūkyje. Tarkime, kad jums reikia su mažiausiomis laiko ir priemonių sąnaudomis išaiškinti, kokią įtaką kviečių augimui turi septynių rūšių trąšos. Panašūs eksperimentai sunkūs dėl to, kad įvairių sklypų derlingumas nevienodas ir paprastai nedėsningai kinta. Kaip atlikti eksperimentą, kuriuo būtų ištirtos ne tik visų septynių rūšių trąšos, bet ir pašalintas bet koks nevienareikšmiškumas, kurį sukelia dirvos struktūros kitimas? Tam tikslui kviečių lauką reikia padalyti langeliais, kad susidarytų 7×7 kvadratas, ir patręšti pagal bet kokio atsitiktinai pasirinkto kvadrato schemą. Nesudėtinga rezultatų statistinė analizė leidžia nepaisyti visokių nukrypimų, susijusių su dirvos derlumo kitimu.

Tarkime, kad turime ne vienos, o septynių veislių kviečius. Ar galima eksperimentą atlikti, atsižvelgiant ir į ketvirtąjį kintamąjį — kviečių veislę? (Pirmaisiais trimis kintamaisiais laikome dvi lysvelės koordinates — eilutės bei stulpelio numerį ir trąšų rūšį.) Šio uždavinio sprendinys bus graikiškas-lotyniškas kvadratas. Septynias kviečių veisles reikia pasėti atitinkamai langeliuose su graikiškomis raidėmis, o septynias skirtingų rūšių trąšas paskirstyti atitinkamai lotyniškoms raidėms. Susumuojant bandymų rezultatus, šiuo atveju reikia atlikti tik paprastą statistinę analizę.

Graikiški-lotyniški kvadratai mūsų dienomis plačiai naudojami, planuojant eksperimentus biologijoje, medicinoje, sociologijoje ir netgi prekyboje. Suprantama, kvadrato langelis nebūtinai turi reikšti žemės sklypą. Jį gali atitikti karvė, pacientas, atėjęs pas gydytoją, medžio lapas, narvelis su gyvūnu, vieta, kur daroma injekcija, laiko tarpas ir net stebėtojas ar stebėtojų grupė. Graikiš-

kas-lotyniškas kvadratas kiekvienu atveju yra eksperimento schema. Jo eilutės simbolizuoja vieną, stulpeliai — antrą, lotyniškos raidės — trečią, graikiškos raidės — ketvirtą kintamąjį. Tarkime, mokslininkas medikas nori išaiškinti penkių gydomųjų preparatų poveikį penkių skirtingo amžiaus grupių, penkių svorio kategorijų žmonėms, kurių tos pačios ligos penkios skirtingos stadijos. Atliekant šį eksperimentą, geriausia pasinaudoti penktosios eilės graikišku-lotynišku kvadratu, atsitiktinai parinktu iš visų galimų tos pačios eilės kvadratų. Jeigu kintamųjų turi būti daugiau, kombinuojama keletas lotyniškų kvadratų; tiesa, n-tosios eilės kvadratams egzistuoja ne daugiau kaip $n—1$ tarpusavyje ortogonalūs kvadratai.

Pasakojimą apie tai, kaip Parkeris, Bousas ir Šrikhendas įsigudrino atrasti 10, 14, 18, 22 (ir t. t.) eilių graikiškus-lotyniškus kvadratus, pradėsime nuo 1958 metų, kai Parkeris padarė atradimą, sukėlusį rimtas abejones Oilerio hipoteze. Po Parkerio Bousas atrado kai kurias bendras graikiškų-lotyniškų kvadratų sudarymo taisykles. Paskui pagal šias taisykles Bousas ir Šrikhendas sugebėjo sudaryti 22-osios eilės kvadratą, o tai jau prieštaravo Oilerio hipotezei, nes 22 — lyginis skaičius, nesidalijantis iš 4. Įdomu, kad to kvadrato sudarymo metodas rėmėsi garsiuoju įdomiosios matematikos uždaviniu, Kirkmano pasiūlytu 1850 metais ir žinomu kaip „Kirkmano uždaviniu apie moksleives".

Mokytoja, išeidama kasdien pasivaikščioti su 15 mergaičių, paprastai surikiuoja jas 5 gretomis po 3 mergaites kiekvienoje. Mergaites reikia taip sustatyti, kad per savaitę nė vienai jų netektų du kartus stovėti vienoje eilėje su ta pačia mergaite. Uždavinio sprendimas yra planavimo eksperimento, vadinamo „išlyginti nepilni blokai", svarbaus metodo pavyzdys.

Parkeris, sužinojęs apie Bouso ir Šrikhendo rezultatus, sugalvojo naują dešimtosios eilės graikiško-lotyniško kvadrato, pavaizduoto 3 paveiksle, sudarymo metodą. Kiekviename langelyje kairysis skaitmuo (nuo 0 iki 9) priklauso pirmajam lotyniškam kvadratui, o dešinysis — antrajam. Remdamiesi šiuo kvadratu, kurio egzistavimas daugelyje eksperimento metodikos vadovėlių paneigiamas, galime be vargo atlikti eksperimentus, kai efektyviai kontroliuojami keturi kintamieji, kurių kiekvienas įgyja dešimtį skirtingų reikšmių. (Pažymėsime, kad dešimtosios

eilės kvadrato dešiniajame apatiniame kampe esantis mažas trečiosios eilės kvadratas yra taip pat graikiškas-lotyniškas. Visi dešimtosios eilės kvadratai, sudaryti Parkerio su bendradarbiais, turėjo trečiosios eilės pokvadratį — suprantama, jog, perstatinėjant didžiojo kvadrato eilutes ir stulpelius, toks mažas kvadratas visuomet gali būti išskirtas. Eilučių ir stulpelių išdėstymo tvarkos pakeitimas neturi įtakos graikiško-lotyniško kvadrato savybėms. Šis tvirtinimas visiškai trivialus. Jeigu vienas kvadratas gaunamas iš kito, perstačius eilutes arba stulpelius, tie du kvadratai nesiskiria. Kurį laiką nebuvo aišku, ar visi dešimtosios eilės graikiški-lotyniški kvadratai turi trečiosios eilės pokvadračius; atsakymas pasirodė esąs neigiamas, nes buvo rasta daug kvadratų, neturinčių tokios savybės.)

Baigdami pranešimą, autoriai rašo:

> „Tuo metu užsimezgė karštligiškas Bouso ir Šrikhendo susirašinėjimas su Parkeriu. Metodai vis tobulėjo; galų gale paaiškėjo, kad Oilerio hipotezė neteisinga su visomis $n=4k+2$ reikšmėmis, kai n daugiau už šešis. Šis netikėtumas, staiga išsprendęs problemą, du šimtus metų klaidinusią matematikus, atradimo autorius pritrenkė ne mažiau, kaip jų artimuosius. Dar nuostabiau, kad teoremai įrodyti buvo taikomi metodai, visiškai tolimi šiuolaikinėje matematikoje taikomiems metodams.“

Po 1959 metų žymiai padidėjo ne tik elektroninių skaičiavimo mašinų greitis, bet ir matematikų programuotojų išradingumas. Parkeris parašė programą elektroninei skaičiavimo mašinai UNIVAC-1206, kuriai tereikėjo nuo 28 iki 45 min. surasti kvadratams, ortogonaliems duotajam dešimtosios eilės lotyniškam kvadratui, taigi mašina dirbo maždaug tris trilijonus kartų greičiau, negu senoji SWAC. Rezultatas — šimtai naujų dešimtosios eilės graikiškų-lotyniškų kvadratų. Pasirodė, kad tokių kvadratų pasitaiko dažnai. Buvo rasti kvadratai, ortogonalūs daugiau kaip pusei į mašiną įvestų dešimtosios eilės lotyniškų kvadratų, parinktų atsitiktinai. Parkeris šia proga rašė: „Taigi Oileris labai apsiriko, nes senų mašinų apskaičiavimai parodė, kad ieškoti reikia platesniu mastu. Pastaruoju metu atlikti graikiškų-lotyniškų kvadratų

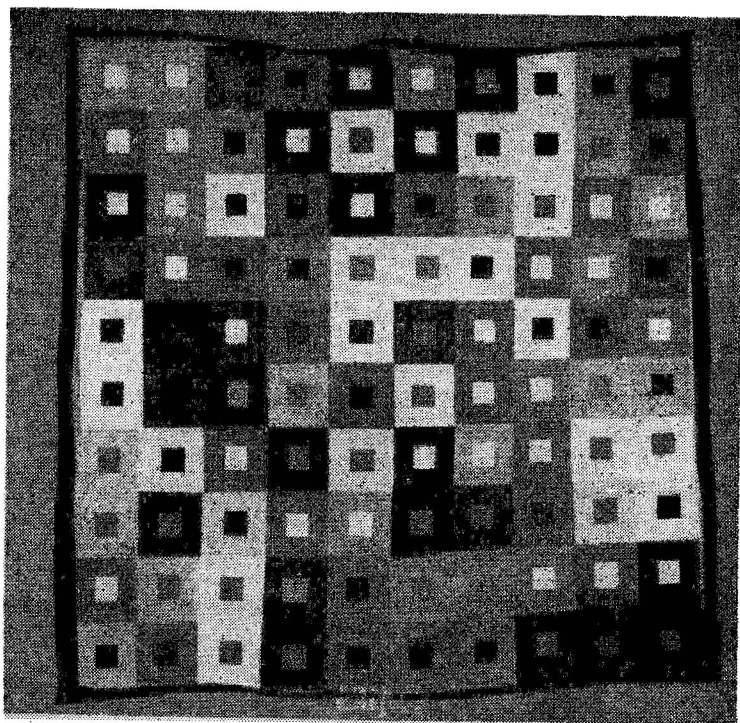
tyrimai, pasitelkiant mašinas, sukėlė didžiausią nusivylimą, nes niekam taip ir nepavyko rasti trijų tarpusavyje ortogonalių dešimtosios eilės lotyniškų kvadratų. Anksčiau buvo įrodyta, kad maksimalus tarpusavyje ortogonalių n-tosios eilės lotyniškų kvadratų skaičius yra $n-1$. Jeigu rasti $n-1$ tokių kvadratų, jie vadinami „pilnu rinkiniu". Pavyzdžiui, antrosios eilės lotyniškas kvadratas turi pilną rinkinį, sudarytą iš savęs paties. Trečiosios eilės kvadratas turi pilną dviejų ortogonalių kvadratų rinkinį, o pilną ketvirtosios eilės kvadrato rinkinį sudaro trys kvadratai. Pilnas keturių tarpusavyje ortogonalių penktosios eilės lotyniškų kvadratų rinkinys parodytas 2 paveiksle. (Žinoma, iš kiekvienos poros galima sudaryti graikišką-lotynišką kvadratą.) Šeštosios eilės kvadratas ne tik neturi pilno rinkinio, bet ir tarpusavyje ortogonalios poros, užtat egzistuoja pilni septintosios, aštuntosios ir devintosios eilės rinkiniai. Dėl to dešimtoji eilė yra mažiausia; jos atžvilgiu kol kas neišaiškinta, ar galima jai rasti pilną rinkinį. Netgi nežinoma, ar egzistuoja trijų dešimtosios eilės kvadratų rinkinys.

Susidomėjimas nagrinėjamu klausimu didėja dėl jo glaudaus ryšio su vadinamosiomis „baigtinėmis projektyvinėmis plokštumomis". Buvo įrodyta, kad jeigu egzistuoja pilnas n-tosios eilės tarpusavyje ortogonalių lotyniškų kvadratų rinkinys, tai, remiantis jais, galima sudaryti n-tosios eilės baigtinę projektyvinę plokštumą. Atvirkščiai, kai duota baigtinė n-tosios eilės projektyvinė plokštuma, galima sudaryti pilną n-tosios eilės tarpusavyje ortogonalių lotyniškų kvadratų rinkinį. Taris įrodė, kad negalima sudaryti netgi dviejų šeštosios eilės lotyniškų kvadratų, vadinasi, neegzistuoja ir šeštosios eilės baigtinė projektyvinė plokštuma. Žinomi pilni rinkiniai (taigi baigtinės projektyvinės plokštumos) eilių, lygių 2, 3, 4, 5, 7, 8 ir 9. Žemiausia eilė baigtinės projektyvinės plokštumos, kurios egzistencija nebuvo nei įrodyta, nei paneigta, yra dešimtoji. Taigi, radus devynių dešimtosios eilės lotyniškų kvadratų pilną rinkinį, būtų atsakyta į labai svarbų klausimą apie baigtines projektyvines plokštumas. Šiuo metu minėto uždavinio dar neišsprendžia elektroninės skaičiavimo mašinos, ir nepanašu, kad jį būtų galima išspręsti, kol žymiai neišaugs skaičiavimo mašinų greičiai arba kol nebus rastas iš esmės naujas būdas.

00	47	18	76	29	93	85	34	61	52
86	11	57	28	70	39	94	45	02	63
95	80	22	67	38	71	49	56	13	04
59	96	81	33	07	48	72	60	24	15
73	69	90	82	44	17	58	01	35	26
68	74	09	91	83	55	27	12	46	30
37	08	75	19	92	84	66	23	50	41
14	25	36	40	51	62	03	77	88	99
21	32	43	54	65	06	10	89	97	78
42	53	64	05	16	20	31	98	79	87

3 pav. E. T. Parkerio sudarytas graikiškas-lotyniškas dešimtosios eilės kvadratas

1959 metų žurnalo *Scientific American* lapkričio numerio viršelyje buvo atspausdinta žurnale bendradarbiaujančios dailininkės Emi Kaze paveikslo reprodukcija. Joje pavaizduotas dešimtosios eilės graikiškas-lotyniškas kvadratas (3 pav.). Dailininkė paėmė dešimtį spalvų vietoj dešimties skaitmenų ir kiekvieną langelį nudažė dviem spalvomis taip, kad paveiksle nebūtų dviejų vienodų langelių. Šio kvadrato spalvų derinį pakartoja 4 paveiksle pavaizduotas nuostabus kilimėlis, kurį išsiuvinėjo viena skaitytoja. Pasuktas 90° kampu kilimėlio raštas sutampa su 3 paveikslo kvadratu. Kiekvieno langelio apvado spalva priklauso vienam lotyniškam kvadratui, o mažo kvadratėlio spalva — kitam. Kiekviename kvadrato stulpelyje ir kiekvienoje eilutėje kiekviena spalva pasirodo vieną kartą langelio centre ir vieną kartą — pakraščiuose. Emi Kaze paveikslą nupirko Parkerio institutas ir padovanojo jam.

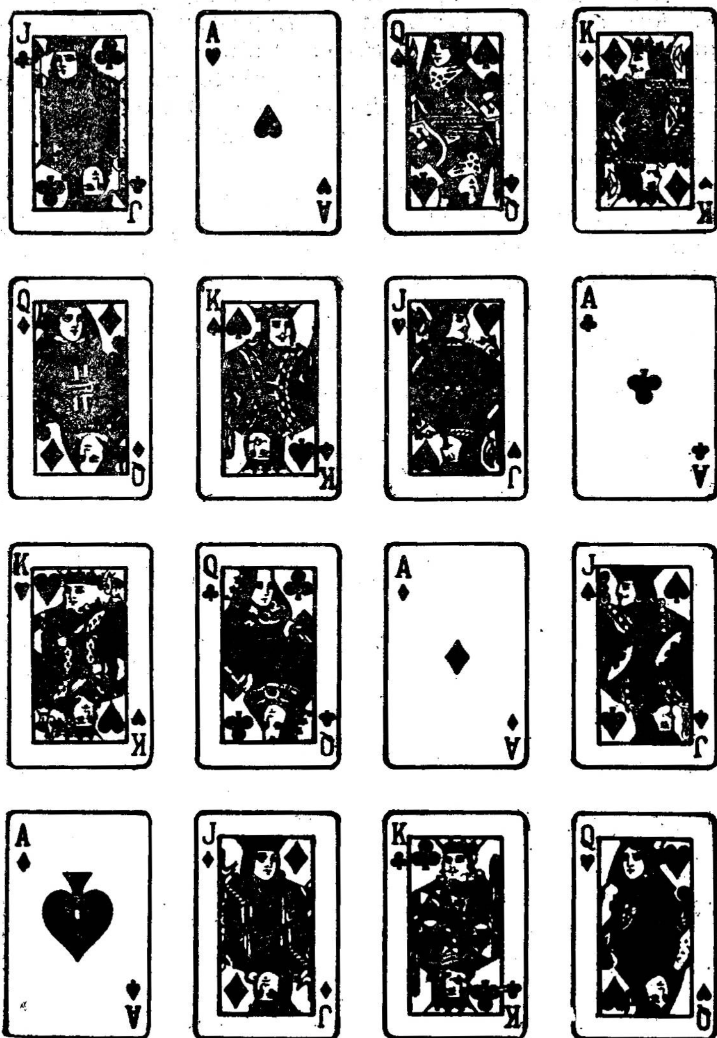


4 pav. Kilimėlis, kurio raštas pakartoja Parkerio graikiško-lotyniško kvadrato schemą

ATSAKYMAS

5 paveiksle parodyta, kaip reikia išdėstyti šešiolika vyresnių kortų taip, kad nė vienoje eilėje, nė viename stulpelyje ir nė vienoje pagrindinių įstrižainių nei paveiksliukai, nei spalvos nesikartotų. Keturios kortos kiekviename kampe, taip pat keturios centrinės kortos sudaro rinkinį, kuriame taip pat pateiktos visos spalvos ir visi paveiksliukai. Būtų neblogai, jeigu kortų spalvos (juodos, raudonos) išsidėstytų šachmatine tvarka, bet tai jau neįmanoma.

Rouzas Bolas knygoje „Matematinės apybraižos ir pramogos" remiasi 1723 metų leidiniu, kuriame pirmą kartą



5 pav. Uždavinio su kortomis sprendimas

paskelbtas minimas uždavinys, ir praneša, kad jis turi 72 iš esmės skirtingus sprendinius (sprendiniai, gaunami kokį nors sprendinį pasukant ar atspindint, laikomi vienodais). Tačiau Djudenis „Matematiniuose žaisluose" (304 uždavinys), remdamasis dar ankstesniu 1624 metų šaltiniu — Klodo Gasparo Bašės knyga, — pažymi, kad nurodytas skaičius 72 neteisingas ir kad iš viso galimi 144 skirtingi sprendiniai.

Nagrinėjant tik eilutes ir stulpelius, nekreipiant dėmesio į kortų išsidėstymą pagrindinėse įstrižainėse, galima rasti sprendinius, kuriuose jų spalvos kaitaliojasi šachmatine tvarka. Štai vienas iš sprendinių:

Čirvų mergelė	Gilių karalius	Būgnų bernelis	Lapų tūzas
Gilių bernelis	Čirvų tūzas	Lapų mergelė	Būgnų karalius
Būgnų tūzas	Lapų bernelis	Čirvų karalius	Gilių mergelė
Lapų karalius	Būgnų mergelė	Gilių tūzas	Čirvų bernelis

II skyrius

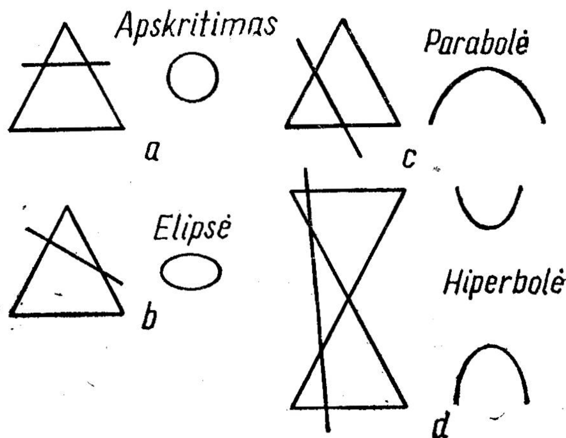
Elipsė

„Negalime nuneigti, kad iš pirmo žvilgsnio apskritimas mus patraukia savo paprastumu, tačiau net konservatyviausiam astronomui pakanka nors trumpai susipažinti su elipse, kad įsitikintų, jog idealus apskritimo paprastumas giminingas beprasmiškai idioto šypsenai. Palyginus su žiniomis, kurias teikia elipsė, apskritimas nieko neduoda. Galbūt atsižvelgdami į Visatos fizinį paprastumą, mes taip pat mąstome apskritimais, savo elementarų mąstymą projektuodami į be galo supainiotą aplinkinį pasaulį",— rašė Erikas T. Belas savo knygoje „Matematika — mokslo karalienė ir tarnaitė".

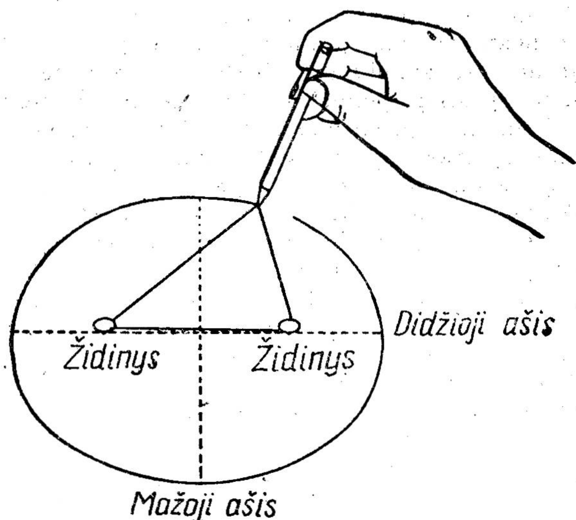
Matematikai įpratę tyrinėti dalykus, atrodytų, visiškai beprasmiškus, bet praeina amžiai, ir tie tyrimai įgyja didžiulę mokslinę vertę. Vargu ar rasime geresnį pavyzdį, kaip senovės graikų atliktas antrosios eilės kreivių, besiskiriančių nuo apskritimų, — elipsės, parabolės ir hiperbolės — tyrinėjimas. Pirmasis jas pradėjo nagrinėti

vienas Platono mokinys. Tos kreivės, jeigu galime taip pasakyti, nebuvo niekur pritaikytos iki XVII amžiaus, kol Kepleris neatrado, kad planetos juda elipsėmis, o Galilėjus neįrodė, kad sviedinio trajektorija yra parabolė.

Senovės graikų geometras Apolonijus iš Pergio, gyvenęs III amžiuje prieš mūsų erą, šioms kreivėms paskyrė didžiausią traktatą. Knygoje „Kūgio pjūviai" jis pirmą kartą parodė, kaip galima gauti visas keturias kreives, įskaitant ir apskritimą, kertant plokštuma tą patį kūgį įvairiais kampais. Jeigu plokštuma kerta kūgį lygiagrečiai pagrindui, pjūvyje gaunamas apskritimas (6 pav., *a*). Jeigu plokštuma šiek tiek pasvirusi (nesvarbu kiek), pjūvis bus elipsė (6 pav., *b*). Juo daugiau pasvirusi plokštuma, juo labiau ištįsta elipsė, arba, kaip sako matematikai, tuo didesnis jos ekscentrisitetas. Gali atrodyti, kad, didinant kertančiosios plokštumos pasvirimo kampą, kreivės forma turi artėti prie kriaušės pavidalo (nes juo gilesnis pjūvis, juo platesnis kūgis), tačiau taip nėra. Kol plokštuma nepasidarys lygiagreti kūgio sudaromajai, kreivė bus tiksli elipsė. Bet kai tik plokštuma pasidaro lygiagreti sudaromajai, kreivė nebėra uždara, jos dvi šakos artėja į begalybę, sudarydamos parabolę (6 pav., c). Toliau didinant pasvirimo kampą, plokštuma kerta antrąjį kūgį, turintį bendrą viršūnę su pirmuoju (6 pav., *d*). Šiuo atveju du kūgio pjūviai sudaro dvi hiperbolės šakas.



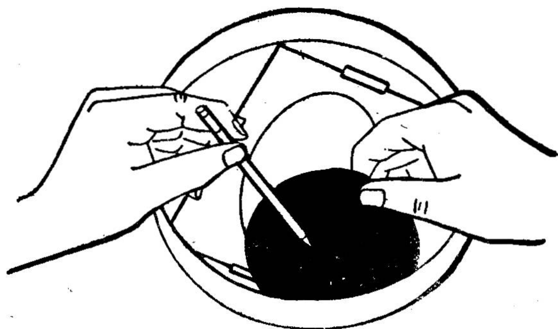
6 pav. Keturi kūgio pjūviai



7 pav. Paprasčiausias elipsės brėžimo būdas

(Labai paplitusi klaida, esą, sudarant hiperbolę, plokštuma būtinai turi būti lygiagreti kūgio ašiai.) Šakų forma, keičiantis plokštumos pasvirimui, kinta tol, kol jos pavirsta tiesėmis. Visų keturių tipų kreivės (apskritimas, elipsė, parabolė ir hiperbolė) vadinamos antrosios eilės kreivėmis, nes Dekarto koordinatėse jos išreiškiamos antrosios eilės lygtimis su dviem kintamaisiais. Po tiesės ir apskritimo elipsė — paprasčiausia iš visų plokščių kreivių. Yra daug įvairių elipsės apibrėžimų, tačiau šis, ko gero, suprantamiausias: elipsė yra trajektorija taško, judančio plokštuma taip, kad jo atstumų nuo dviejų fiksuotų taškų suma nepakinta. Šiuo apibrėžimu pagrįstas gerai žinomas elipsės brėžimo būdas.

Įsmeikite į popieriaus lapą du smeigtukus, užnerkite ant jų siūlo kilpą ir įtempkite ją pieštuko smaigaliu taip, kaip parodyta 7 paveiksle. Vesdami pieštuku apie smeigtukus, nubraižysite elipsę. (Siūlo ilgis negali keistis, todėl atstumų nuo pieštuko smaigalio iki smeigtukų suma yra pastovi.) Du fiksuoti taškai (mūsų atveju — smeigtukai) vadinami elipsės židiniais. Jie yra didžiojoje ašyje. Skersmuo, statmenas šiai ašiai, vadinamas mažąja ašimi.

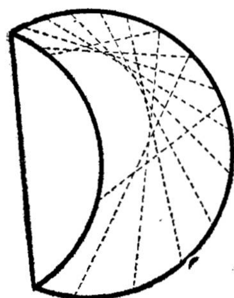
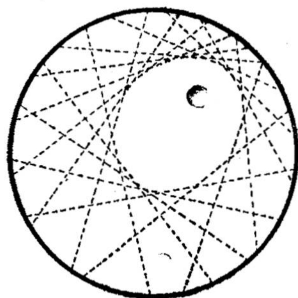


8 pav. Elipsografas iš keptuvės ir kartoninio skritulio

Smeigtukų suartėjimas, nekeičiant siūlo ilgio, sumažina elipsės ekscentrisitetą. Židiniams sutapus, elipsė virsta apskritimu. Didinant atstumą tarp židinių, elipsė tįsta tol, kol pagaliau virsta tiese.

Elipsę galima nubraižyti ir daugeliu kitų būdų. Vienam įdomiam būdui pademonstruoti reikia keptuvės ir kartoninio skritulio, kurio skersmuo dvigubai mažesnis, negu keptuvės skersmuo. Vidinį keptuvės kraštą apklijuokite audeklu, kad sukamas skritulys neslystų nuo jo. Klijuojančiomis juostelėmis pritvirtinkite prie keptuvės dugno lapą popieriaus. Pradurkite skritulį bet kurioje vietoje iki popieriaus nudrožtuoju pieštuko galu ir pradėkite ridenti diską keptuvės kraštu (8 pav.). Popieriuje pieštukas nubrėš elipsę. Patogu, viena ranka laikant pieštuką, antrąja lėtai ridenti diską, jį tvirtai prispaudus prie keptuvės krašto. Jeigu diską pradursite centre, pieštukas nubrėš apskritimą. Juo arčiau skylė prie disko krašto, juo didesnis elipsės ekscentrisitetas. Jeigu pieštukas įbestas į disko kraštą, elipsė virsta atkarpa.

O štai kitas, ne mažiau smagus elipsės brėžimo būdas. Iškirpkite iš popieriaus didelį skritulį ir bet kurioje vietoje, išskyrus centrą, pažymėkite tašką. Sulenkite skritulį taip, kad šis taškas atsidurtų po bet kuriuo apskritimo tašku disko pakraštyje. Ištieskite lapą ir vėl sulenkite, pridengdami tašką jau kita apskritimo vieta. Taip padarykite keletą kartų, kol visą popierių išraižys sulenkimai, sudarantys elipsės liestinių šeimą (9 pav.).

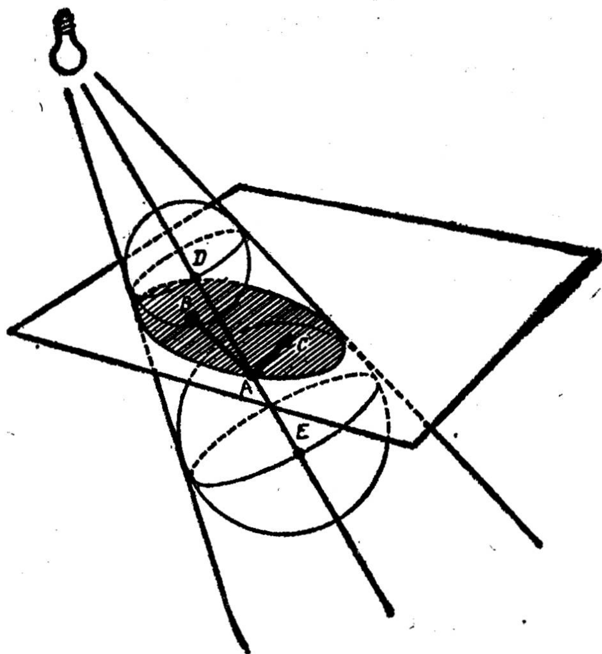
9 pav. Popieriaus lapą perlenkus taip, kad jo kraštas visą laiką eitų per tašką, nesutampantį su lapo centru, sulenkimų gaubtinė bus elipsė

G. Djudenis nurodo, kaip pavaizduoti elipsę siūlu ir dviem segtukais ir tuo pačiu būdu nubraižyti elipsę, kai duotos ašys.

Iš pradžių reikia nubrėžti ašis. Paskui randami elipsės, turinčios tokias ašis, židiniai A ir B. Sakykim, C yra mažosios ašies galas. Taškai A ir B simetriškai išdėstyti didžiojoje ašyje, be to, taip, kad atkarpos AC ir CB lygios pagrindinės ašies pusei. Dabar lengva įrodyti, kad, naudojantis kilpa, kurios perimetras lygus trikampio ABC perimetrui, galima nubrėžti ieškomąją elipsę.

Nors elipsė ir sudėtingesnė už apskritimą, tačiau ji dažniau pasitaiko kasdieniniame gyvenime. Mat, kiekvienas apskritimas, matomas tam tikru kampu, atrodo elipsės formos. Be to, visi skritulių ir rutulių šešėliai yra elipsės. Pačioje sferoje šešėlius riboja didžiojo skritulio apskritimai (pavyzdžiui, vidinis pilnėjančio mėnulio kontūras), bet mums jie atrodo kaip elipsės dalys. Palenkite stiklinę su vandeniu (stiklinė gali būti ir ritinio, ir kūgio formos) ir pamatysite, kad vandens paviršius įgavo elipsės formą.

Ant stalo esąs sviedinys (10 pav.) meta elipsinį šešėlį. Jį sudaro šviesos kūgio, į kurį įbrėžtas rutulys, pjūvis. Sviedinys liečia stalą tiksliai viename elipsės židinių. Įsivaizduokime didesnio spindulio sferą, kuri įbrėžta į tą patį kūgį, bet stalą liečia iš apačios; tuomet lietimosi taš-



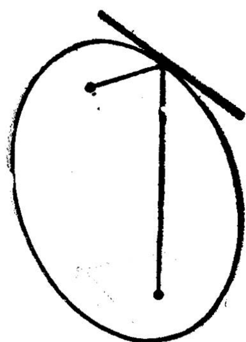
10 pav. Didesne sfera nesunku parodyti, kad mažesnės sferos šešėlis yra elipsės formos

kas bus antrasis elipsės židinys. Abiem sferomis grindžiamas įžymus įrodymas (priklausąs Ž. Dandelenui, XIX amžiaus belgų matematikui), kad, kertant kūgį plokštuma, iš tikrųjų gaunama elipsė.

Sakykim, A — bet kuris kūgio paviršiaus taškas. Per tašką A ir kūgio viršūnę išvesime tiesę (10 paveiksle ji storesnė), liečiančią sferas taškuose D ir E.

Tiesėmis sujungsime tašką A su taškais B ir C (kuriuose sferos liečia plokštumą). Atkarpos AB ir AD lygios kaip sferos liestinės, išvestos iš vieno taško; atkarpos AE ir AC taip pat lygios dėl tos pačios priežasties. Sudėję lygias atkarpas, gausime

$$AD+AE=AB+AC.$$



11 pav. Liestinė sudaro lygius kampus su tiesėmis, išvestomis į lietimosi tašką iš abiejų elipsės židinių

Bet $AD+AE$ — tai tiesiog atkarpa DE. Atsižvelgus į simetriją, atkarpos DE ilgis turi būti pastovus ir nepriklausyti nuo taško A padėties. Jeigu suma $AD+AE$ pastovi, iš pateiktos lygybės išplaukia, kad suma $AB+AC$ taip pat turi būti pastovi. AB ir AC — atstumai nuo taško A iki dviejų fiksuotų taškų, todėl geometrinė taškų A vieta turi būti elipsė, kurios židiniai yra taškai B ir C.

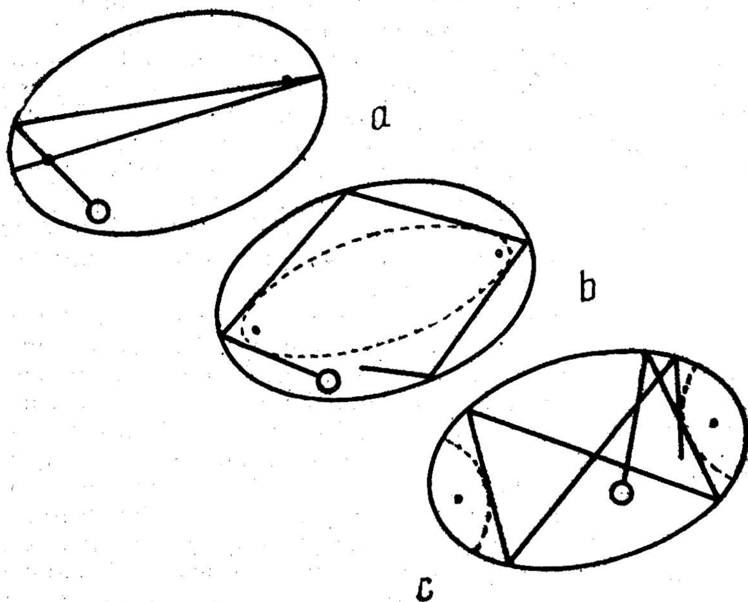
Fizikoje elipsė sudaro trajektoriją materialaus taško, kuris, veikiamas centrinės jėgos, atvirkščiai proporcingos atstumo kvadratui, juda uždara orbita. Pavyzdžiui, planetos ir palydovai sukasi elipsinėmis orbitomis. Jų traukos centras yra viename iš židinių. Keplerio laikais buvo manoma, jog dievas negali leisti, kad planetos judėtų kreivėmis, ne tokiomis tobulomis, kaip apskritimas. Pranešdamas apie savo didžiulį atradimą — apie tai, kad planetos juda elipsinėmis orbitomis, — Kepleris turėjo teisintis ir atsiprašinėti. Jis elipses laikė tuo purvu, su kuriuo jam teko plūktis, norint apvalyti astronomijos mokslą nuo dar didesnio purvo, susikaupusio, mėginant išsaugoti apskritimines orbitas. Pats Kepleris taip niekuomet ir nesuprato, kodėl dangaus kūnų orbitos yra elipsių formos. Tą faktą paaiškinti sugebėjo tik Niutonas, remdamasis savo atrastu visuotinės traukos dėsniu. Net didysis Galilėjus, turėdamas nenuginčijamus įrodymus, patvirtinančius Keplerio atradimą, iki paskutinių dienų netikėjo, kad egzistuoja neapskritiminės orbitos.

Atspindys nuo elipsės turi vieną svarbią savybę, kuri suprantama iš 11 paveikslo. Išvesime liestinę per kurį nors elipsės tašką. Tiesės, jungiančios šį tašką su židiniais, su liestine sudaro lygius kampus. Įsivaizduokime vertikalią metalinę juostelę, ribojančią elipsę. Jeigu banga arba materialus taškas išeis iš židinio ir judės tiese, tai, atsispindėjęs nuo krašto, atsidurs tiksliai antrame židinyje. Be to, judėdamas iš židinio prie elipsės krašto pastoviu greičiu, kūnas arba banga atsidurs antrame židinyje per tokį patį laiko tarpą nepriklausomai nuo pradinės judėjimo krypties.

Įsivaizduokime, kad negilus elipsinis bakas pripiltas vandens. Įkišus pirštą į elipsės židinį, po kelių sekundžių aplink antrąjį židinį susidarys apskritos bangos.

Luisas Kerolis parašė nedidelę knygelę apie apvalų biliardo stalą. Britų enciklopedijos vienuoliktajame leidime straipsnio apie biliardą pastaboje skaitome: „1907 metais Anglijoje įvairumo dėlei buvo įvestas ovalus stalas“. Tačiau nei šis, nei Luiso Kerolo apvalus stalas neturėjo kišenių, ir tik 1964 metų liepos mėnesį Edvinas E. Robinsonas gavo patentą apvaliam biliardo stalui su keturiomis kišenėmis. Tuo pačiu metu JAV pasirodė Artūro Frigo sugalvotas žaidimas „Eliptipulas“, su kišene viename elipsinio stalo židinių. Ant tokio stalo, smūgiuojant rutulius į bortą, galima visada išlošti.

Ant apvalaus stalo galimi trys rutulio kelio variantai. Neužsukant pastūmus iš židinio bet kuria kryptimi, rutulys atšoks nuo krašto ir sugrįš į antrą židinį. Sakykim, rutulio judėjimo niekas nesulėtina. Tuomet jis, atšokęs



12 pav. Rutulio trajektorija ant elipsinio biliardo stalo: *a* — rutulys praeina pro elipsės židinį; *b* — rutulys nepraeina tarp elipsės židinių; *c* — rutulys praeina tarp elipsės židinių

nuo borto, kiekvieną kartą praeis pro židinį (12 pav., *a*). Tačiau keletą kartų atšokusio rutulio trajektorija praktiškai sutampa su pagrindine elipsės ašimi. Rutulys, pastumtas ne iš židinio, niekada nepateks į tarpą tarp židinių ir visą laiką judės tiesėmis, liečiančiomis mažąją vidinę elipsę su tais pačiais židiniais (12 pav., *b*). Rutulys, pastumtas tarp židinių, ten pasiliks visam laikui ir judės nuo borto prie borto, niekada neperkirsdamas dvišakės hiperbolės, kurios židiniai sutampa su elipsės židiniais.

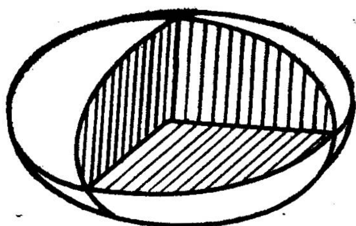
Poemoje „Mikado" yra eilutės, aprašančios keistą biliardą, kurį teko žaisti pasakojimo herojui:

„Stalas neužklotas gelumbe,
Lazda išlenkta kabliu,
Ir visi rutuliai į elipsę panašūs!"

Džeimso Džoiso knygoje „Menininko kaip jauno žmogaus portretas" mokytojas, cituodamas tas eilutes, paaiškina, kad V. S. Hilbertas elipse laikė elipsoidą. O kas yra elipsoidas? Egzistuoja trijų tipų elipsoidai. Sukinio elipsoidas, kurį tiksliau reikėtų vadinti sferoidu, yra paviršius, gautas, sukant elipsę aplink vieną ašių. Sukant aplink mažąją ašį, susidaro sferoidas, suplotas kaip Žemė per polius. Sukant apie didžiąją ašį, gaunamas ištęstas regbio kamuolio formos sferoidas. Įsivaizduokite, kad toks elipsoidas turi veidrodinį vidinį paviršių. Tuomet, pastatę viename jo židinių degančią žvakę, galėsime uždegti popierėlį, esantį antrame židinyje.

Žymieji „šnibždesių kambariai" yra patalpos, turinčios elipsoidines lubas. Silpnas garsas, ištartas viename židinių, aiškiai girdimas antrame. JAV labiausiai žinoma šnibždesių galerija Kapitolijaus Skulptūrų salėje; jos neaplenkia nė viena ekskursija. Puikus šnibždesių kambarys, tiesa, mažesnis, yra prie įėjimo į barą, esantį Niujorko Centrinės stoties apatiniame aukšte. Du žmonės, stovintys veidu į sieną įstrižai priešinguose kvadratinės aikštelės kampuose, gerai vienas kitą girdi net tada, kai aikštelėje yra daug žmonių. Kai kertančioji plokštuma statmena vienai iš trijų koordinačių ašių, ir ištęsto, ir suploto sferoido pjūvis yra apskritimas, o kai kertančioji plokštuma statmena dviem kitoms ašims, — elipsė. Triašis elipsoidas yra figūra, kurios visų trijų ašių ilgiai skirtin-

gi, o pjūviai trijose ašims statmenose plokštumose — elipsės (13 pav.). Bangos, daugelį metų šlifuodamos akmenis, pagaliau suteikia jiems beveik elipsoidinę formą.



13 pav. Bet kuris elipsoido pjūvis yra elipsės formos

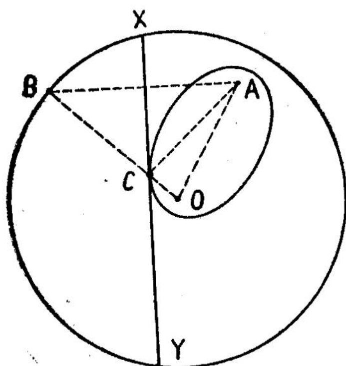
Galvosūkių, susijusių su elipse, nedaug. Štai du paprasti uždaviniai.

1. Įrodykite, kad nė vieno taisyklingo daugiakampio, turinčio daugiau kraštinių, negu kvadratas, negalima įbrėžti į elipsę taip, kad jo viršūnės būtų elipsėje.

2. Lankstydami popieriaus lapą taip, kaip buvo aiškinta aukščiau, gaunate elipsę, kurios židiniai yra skritulio centre ir vidiniame jo taške. Įrodykite, kad sulenkimų gaubtinė linija iš tikrųjų bus elipsė.

ATSAKYMAI

1. Į elipsę negalima įbrėžti jokio taisyklingo daugiakampio, turinčio daugiau kraštinių, negu kvadratas. Mat, visų taisyklingų daugiakampių viršūnės yra apskritime. Apskritimas negali susikirsti su elipse daugiau negu keturiuose taškuose. Vadinasi, nėra tokio taisyklingo daugiakampio, kuris turėtų daugiau kraštinių, negu kvadratas, ir kurio visos viršūnės būtų elipsėje.



14 pav. Popieriaus lapo lankstymo uždavinio atsakymas

2. Įrodyti, kad, lankstant popierių, iš tikrųjų gaunama elipsė, galima taip.

Sakykim, taškas A (14 pav.) — bet kuris skritulio taškas, nesąs jo centre. Sulenkiame skritulį taip, kad taškas A sutaptų su kuriuo nors apskritimo tašku. Sulenkimo linija turi būti tiesė XY, kuri statmena AB ir atkarpą AB dalija pusiau.

Iš čia išplaukia, kad BC ir AC lygios, todėl $OC+AC=$ $=OC+CB$. Bet atkarpa $OC+CB$ lygi skritulio spinduliui, kuris negali keistis, todėl kairioji lygybės pusė $OC+AC$ taip pat turi būti pastovi.

Atkarpa $OC+AC$ yra atstumų nuo taško C iki dviejų fiksuotų taškų A ir O suma, todėl geometrinė taškų C (judančių, keičiantis taško B vietai apskritime) vieta turi būti elipsė, kurios židiniai yra taškuose A ir O.

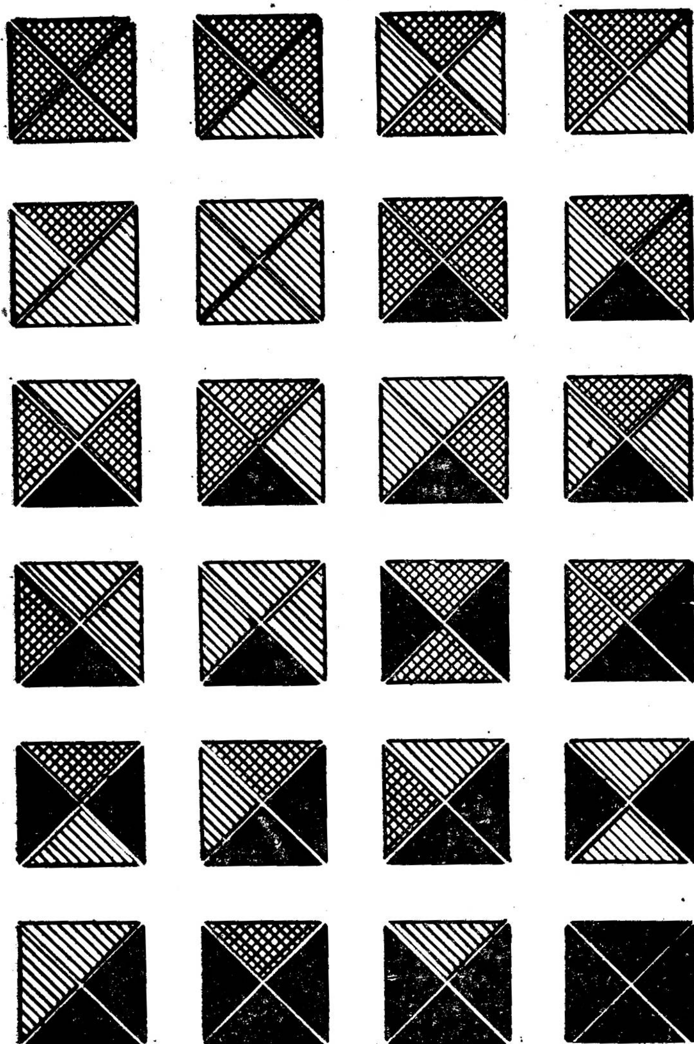
Sulenkimo linija XY yra elipsės liestinė taške C, nes ji sudaro lygius kampus su tiesėmis, išvestomis iš židinių į tašką C. Tai lengva nustatyti, pastebėjus, kad kampas XCA lygus kampui XCB, kuris savo ruožtu lygus kampui YCO. Sulenkimo linijos visuomet liečia elipsę, todėl elipsė yra be galo didelio skaičiaus sulenkimo linijų, kurios gaunamos, sulenkus popierių daug kartų, gaubiamoji.

III skyrius

24 įvairiaspalviai kvadratai ir 36 įvairiaspalviai kubeliai

Standartinis domino rinkinys JAV sudarytas iš pailgų juodų plytelių, padalytų į du kvadratus. Kiekvienas kvadratas arba tuščias, arba sužymėtas baltais taškais (nuo vieno iki šešių). Dviejų vienodų plytelių nėra, o visos kartu jos sudaro 28 derinius po du iš skaitmenų nuo 0 iki 6. Plyteles galima įsivaizduoti kaip tiesės atkarpas, kurios sudėtos galais taip, kad iš jų susidarytų grandinė; šia prasme visi domino lošimai yra griežtai vienmačiai.

Jeigu, išplėtę uždavinį, nagrinėtume dvimatį ir trimatį domino, kiltų mažai žinomi galvosūkiai su turtinga spalvų įvairove. Britų kombinatorinės analizės specialistas, Karališkosios karo akademijos dėstytojas Aleksandras Makmagonas (mirė 1928 metais) tokių hiperdomino sugalvojo nemažai, ir daugelis šio skyriaus uždavinių paimti iš vienos jo knygos.



15 pav. Trispalvių kvadratų domino rinkinys

Dvimačius domino geriausia daryti taisyklingų daugiakampių formos: kvadratų, lygiakraščių trikampių ir šešiakampių, nes bet kuriomis iš tų figūrų (kiekvienos rūšies atskirai) galima pilnai, be tarpų, užkloti visą plokštumą. Pasirinkę kvadratus ir pažymėję jų kraštines visais galimais būdais n simboliais, gausime $\frac{1}{4}n(n+1)(n^2-n+2)$ kvadratų rinkinį. Pilnas 24 kvadratų komplektas, atitinkantis $n=3$, pavaizduotas 15 paveiksle. Skaitytojas, tokį komplektą išsikirpęs iš kartono, turėtų viską, kas būtina pirmo laipsnio sunkumo galvosūkiui.

Manipuliuoti spalvotais kvadratais geriau, negu kvadratais su simboliais, todėl pravartu nuspalvinti kvadratus skirtingomis spalvomis. Mūsų uždavinys — iš 24 nuspalvintų kvadratų sudėti 4×6 matmenų stačiakampį, tenkinantį dvi sąlygas:

1) kiekviena susiliečiančių kraštinių pora turi būti vienos spalvos;

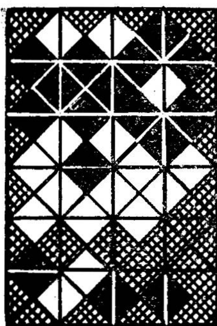
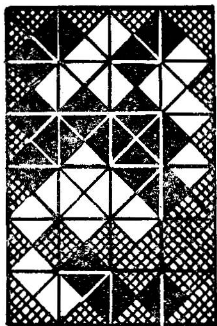
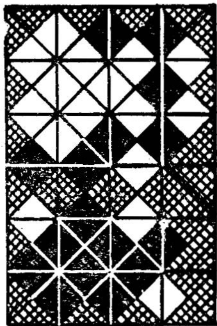
2) visas stačiakampio pakraštys (visos keturios jo kraštinės) turi būti vienos spalvos. Laikoma, jog nuspalvinta tik viena kvadratų pusė. Sudaryto stačiakampio pakraštys gali būti bet kokios spalvos; šiuo atveju kiekvienam nuspalvinimo variantui egzistuoja daug įvairių sprendinių.

Kadaise *Scientific American* puslapiuose padariau grubią klaidą, paskelbdamas, kad šis galvosūkis turi tik vieną sprendinį.

Susidomėjęs šiuo uždaviniu, skaitytojas F. Finkas rado daugiau kaip tūkstantį sprendinių (sprendiniai, gaunami vienas iš kito posūkiais ir atspindžiais, laikomi vienodais). Iš viso pagal jo vertinimą turėtų būti 12 224 skirtingi sprendiniai. Uždavinį galutinai išsprendė G. Feldmanas, suprogramavęs jį elektroninei skaičiavimo mašinai. Per 40 nenutrūkstamo darbo valandų mašina paruošė pilną sąrašą, sudarytą iš 12 261 sprendinio. Taigi Finkas nepaprastai tiksliai nusakė rezultatą, praleidęs iš viso tik 37 variantus.

Prireiktų daugelio puslapių Finko gautoms pagrindinėms išvadoms, išanalizavus 12 261 sprendinį, trumpai išdėstyti. Gaila, bet nė viena iš rastų konfigūracijų nepasižymi dvipuse simetrija.

Kvadratus, sudarytus iš dviejų stačiųjų vienos spalvos trikampių, vadinsime „deimantais“. Tuomet maksi-

16 pav. Trys 12 261 uždavinio apie įvairiaspalvius kvadratus sprendiniai: vėžys (kairėje), 3 izoliuoti „deimantai" (viduryje) ir 13 izoliuotų „deimantų" (dešinėje)

malus „deimantų", sudarančių stačiakampyje vienspalvį poliomino elementą, skaičius lygus dvylikai. Tokį elementą matome pavaizduotą 16 paveikslo kairiajame stačiakampyje. Jame esąs dvyliktosios eilės poliomino elementas turi dvipusę simetriją ir panašus į vėžį. Minimalus izoliuotų „deimantų" skaičius („deimantų", iš visų pusių apsuptų kitų spalvų kvadratais) lygus trims. Centriniame 16 paveikslo stačiakampyje visi trys izoliuoti „deimantai" skirtingų spalvų.

16 paveikslo dešinėje pavaizduotas maksimaliai galimas izoliuotų „deimantų" skaičius lygus trylikai.

Atkreipkite dėmesį, kad kiekviename paveiksle tarp šoninių kraštinių yra horizontalus „tiltas", sudarytas iš trijų tos pačios, kaip ir stačiakampio pakraščiai, spalvos izoliuotų „deimantų".

Visiškai akivaizdu, kad iš 24 nuspalvintų kvadratų negalima sudaryti 2×12 matmenų stačiakampio, nes, sudarant stačiakampį, kiekviename kvadrate vienas trikampis būtinai turi būti tos pačios spalvos, kaip ir stačiakampio kraštinės. Pamėginkite, žvilgtelėję į 15 paveikslą, įrodyti, kad iš tų 24 įvairiaspalvių kvadratų 3×8 matmenų stačiakampio taip pat negalima sudaryti.

Kubas — paprasčiausias iš taisyklingųjų briaunainių, kuriais galima užpildyti trimatę erdvę; todėl trimačio domino elementus įsivaizduosime kaip kubelius. Nudažę jų sienas dviem spalvomis, gausime ne daugiau kaip

dešimtį skirtingų kubelių. Šis skaičius perdaug mažas, kad mus domintų. Antra vertus, turėdami galimybę naudotis trimis spalvomis, gausime per daug skirtingų kubelių (57). Kai spalvos ne trys, o šešios, šešiaspalvių kubelių bus 2 226; tai didelis skaičius, bet iš jo galima surinkti idealų komplektą, sudarytą iš 30 kubelių, kurių visos šešios sienos skirtingų spalvų.

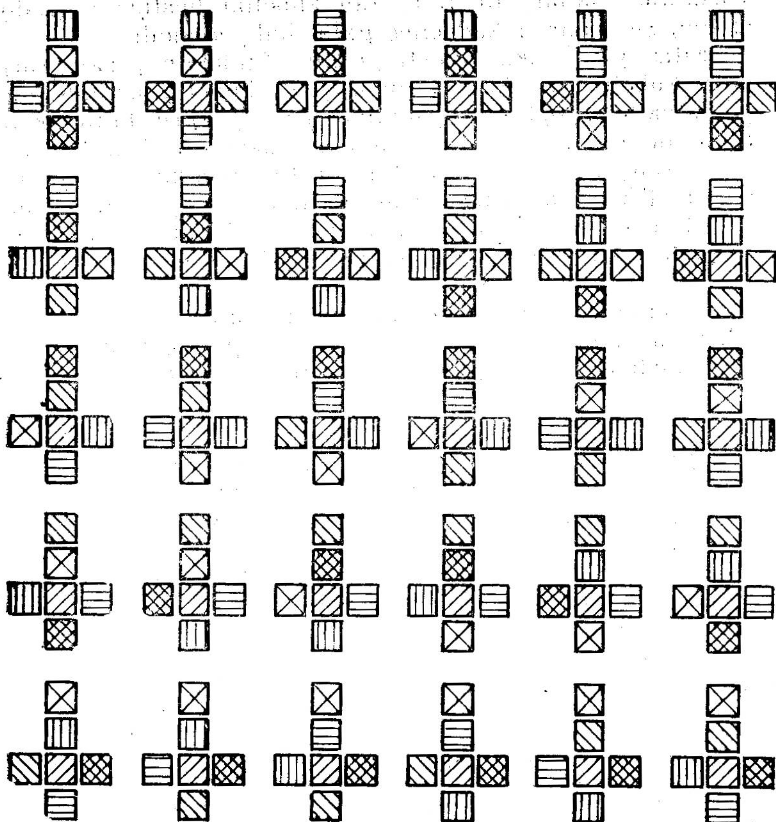
Lengva suprasti, kad 30 yra maksimalus skaičius. Kiekvieno kubo viena siena turi būti, tarkime, raudona. Jai priešinga siena gali būti bet kokios iš penkių spalvos. Kitas keturias spalvas galima paskirstyti šešiais skirtingais būdais, taigi skirtingų kubų bus 5×6=30. (Du kubai laikomi skirtingais, jei jų išklotinių negalima sutapdinti taip, kad visų sienų spalvos sutaptų.)

17 paveiksle pavaizduotos 30 kubelių išklotinės. Šis 30 kubelių rinkinys, kurį, matyt, sugalvojo taip pat Makmagonas, — klasikinis įdomiosios geometrijos pavyzdys. Sumeistrauti komplektą — labai varginantis darbas, bet jums bus atlyginta su kaupu — kruopščiai nuspalvinti kubeliai taps mėgstamu jūsų šeimos žaislu. Jie tarnaus dešimtis metų: nereikės nei remontuoti, nei keisti elektros baterijų.

Kubeliai gali būti plastmasiniai arba mediniai, geriau su lygiai nugludintomis sienomis. Jų galima nusipirkti arba išsipjaustyti pačiam. Kubeliai gali būti ne dažyti, o apklijuoti skirtingų spalvų popieriniais kvadratais.

Pirmam pratimui paimkite bet kurį iš trisdešimties kubelių. Raskite dabar tokį, kurį šalia pirmojo galima padėti taip, kad sienos, kurios liečiasi, būtų vienos spalvos, viršutiniai kvadratai — kitos, o kitos keturios sienos — taip pat vienodų spalvų. Toks kubas visada galimas. Tie du kubeliai bus veidrodinis vienas kito atspindys, todėl galima sakyti, kad, kaip ir visos materijos dalelės, kubas turi savo antikubą.

Kai ieškoma reikalingo kubelio, galima sutaupyti daug laiko, išdėstant kubelius eilėmis ir apverčiant kiekvieną eilę iš karto, suspaudus ją pirštais iš galų. Tarkim, jums reikia rasti kubelį, kurio priešingos sienos yra raudonos ir mėlynos spalvos. Išdėstykite kubelius eile, kad raudonos sienos būtų viršuje; dabar apverskite eilę ir išimkite iš jos visus iš viršaus mėlynus kubelius. Arba, tarkime, jums reikalingi kubeliai, kurių viena viršūnė sudaryta iš mėlynos, geltonos ir žalios spalvos sienų. Išdėstykite ku-



17 pav. 30 įvairiaspalvių kubelių išklotinės

belius eile, kad mėlyna siena būtų viršuje. Apverskite visą eilę ir išimkite kubelius, kurių viršus geltonas arba žalias. Iš likusių kubelių sudarykitę eilę, kurios viršus žalias, apverskite ją ir išimkite kubelius, kurių viršus mėlynas ir geltonas. Visi kiti kubeliai bus ieškomieji.

Iš dviejų kubelių negalima sudėti gretasienio, kurio kiekviena siena būtų vienos spalvos. Užtat šešis kubelius galima taip išdėstyti eile, kad kiekvienoje pusėje būtų visos šešios spalvos. Galimas šio uždavinio gražus

variantas: padarykite taip, kad kubeliai liestųsi vienodų spalvų sienomis ir kad eilės galai būtų vienodi.

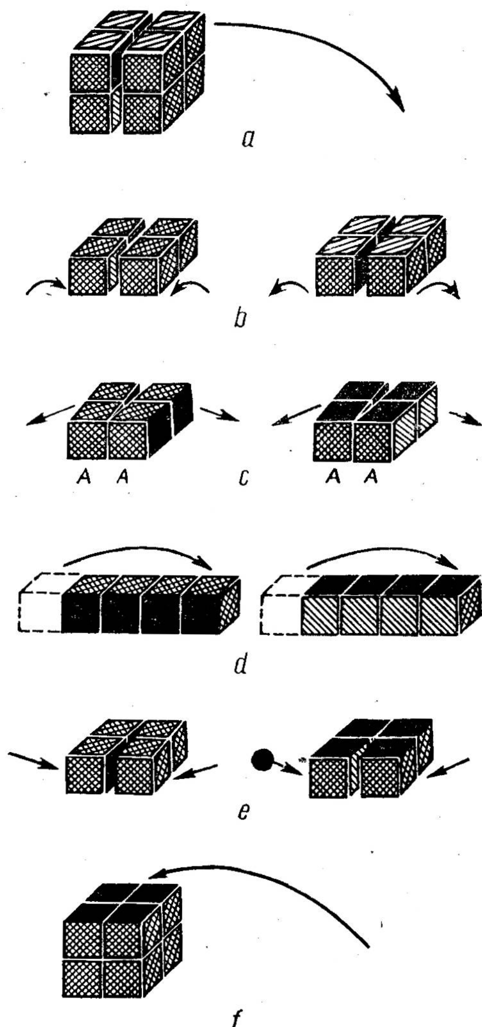
Kitas galvosūkis sudėtingesnis. Atidėkite į šalį kurį nors kubelį. Atrinkite iš likusių 29 kubelių aštuonis ir pastatykite iš jų 2×2×2 matmenų kubą, kuris būtų tiksli atidėtojo kubelio kopija, tik dukart aukštesnė. Dar pridursime, kad mažieji kubeliai turi liestis vienodų spalvų sienomis. (Toks variantas visada galimas ir nepriklauso nuo atidėtojo kubelio nuspalvinimo tvarkos. Šį atradimą Makmagonas priskyrė savo bičiuliui, pulkininkui Džulijanui Džoselinui.)

Sprendimui tinka tik tam tikri aštuoni kubeliai, ir vargu ar jums pavyks juos atrasti, jeigu nežinote kokio nors sisteminio metodo. Man atrodo, geriausias būdas toks.

Pažiūrėję, kokios spalvos trys atidėtojo kubelio priešingų sienų poros, iš 29 kubelių atrinkite tuos, kurie turės bent vieną tokią sienų porą. Liks 16 kubelių. Paverskite atidėtąjį kubelį taip, kad jis būtų į jus atsuktas viena iš viršutinių viršūnių ir jums būtų matomos tik trys sienos, sudarančios tą viršūnę. Tarp likusių 16 kubelių galima rasti du tokius, kurių trys sienos prie vienos viršūnės išsidėsčiusios taip, kaip atidėtojo kubelio. Tuos du kubelius atidėkite į šalį, o pavyzdį pasukite į save kita viršūne, raskite vėl porą kubelių, turinčių tokią pat viršūnę. Galų gale jūs atrinksite aštuonis kubelius (po du kiekvienai pavyzdžio viršutinei viršūnei), kurie ir bus ieškomieji. Paskui sudėti galvosūkį jau visai paprasta.

Egzistuoja, matyt, du modeliai, kurie sudėlioti iš esmės skirtingai; sąmojingas būdas, kaip tuos modelius paversti vieną kitu, parodytas 18 paveiksle (jį sugalvojo L. Vosburgas Lionsas). Pasirodo, kad tie būdai labai įdomiai susiję: 24 vieno kubo išorinės sienos yra 24 kito kubo vidinės sienos, ir jeigu tik abu kubai vienodai orientuoti, tai kiekvienas kubelis viename iš jų užima vietą, diametraliai priešingą tai, kurią jis užimtų kube, sudėtame antru būdu.

Lionsas nustatė, kad, sustačius minėtą kubą, galima išrinkti naują pavyzdį iš likusių 21, o iš kitų 20 galima išrinkti 8 kubus ir sudėlioti 2×2×2 matmenų kubą, nuspalvintą taip, kaip ir pavyzdys. Mažai kam tai pavyksta, nežinant, kad naujasis pavyzdys turi būti senojo pavyzdžio veidrodinis atspindys, o reikalingi aštuoni ku-



18 pav. Kubo perstatymas pagal Lionsą:

a — pradinis variantas, kuriame kvadratai iš viršaus raudonos (brūkšniuotos), iš apačios — juodos spalvos.

Vidines juodas ir raudonas sienas reikia išdėstyti taip, kaip parodyta paveiksle. Viršutinę pusę figūros nuimkite ir padėkite iš dešinės; *b* — kiekvieną stulpelį pasukite 90° kampu rodyklėmis pažymėta kryptimi. Dabar kairiosios pusės kvadratų spalva iš apačios turi būti raudona, o dešiniosios pusės kvadratų spalva iš viršaus — juoda; *c* — pasukite stulpelius (sudarančius kiekvieną pusę) taip, kad sienos *A* sutaptų; *d* — sudėkite kiekvieną stulpelį taip, kad iš kairės būtų juodos, o iš dešinės — raudonos (priekinės) sienos; *e* — dešiniąją pusę pastatykite ant kairiosios. Gavote antrąjį modeliuko variantą.

beliai — tai kaip tik tie, kurie lieka iš šešiolikos, atrinkus kubelius pirmajam modeliui.

Žinoma daug kitų galvosūkių su įvairiaspalviais kubeliais. Čia pateikiami iš F. Vinterio paimti uždaviniai, reikalaujantys sudėti 2×2×2 matmenų figūrą. Visuose modeliuose turi būti pritaikyta „domino taisyklė“, reikalaujanti, kad liestųsi tik vienodos spalvos sienos. Štai tie modeliai:

1. Dešinioji ir kairioji kubo siena nudažytos viena spalva, priekinė ir užpakalinė — kita. Viršutinė siena nudažyta trečia spalva, apatinė — ketvirta.

2. Dvi priešingos sienos nudažytos ta pačia spalva, o kitos — keturiomis skirtingomis spalvomis.

3. Dešinioji ir kairioji siena nudažytos viena spalva, priekinė ir užpakalinė — kita. Viršus ir apačia nudažyta visomis kitomis keturiomis spalvomis (kiekvienoje sienoje — po keturis skirtingos spalvos kvadratus).

4. Visos sienos nudažytos tomis pačiomis keturiomis spalvomis.

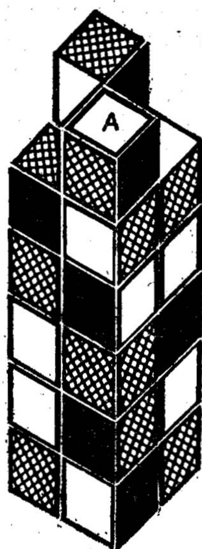
Negalima, matyt, sudėlioti 2×2×2 matmenų kubo, kurio priekinė ir užpakalinė siena būtų vienos spalvos, dešinioji ir kairioji — kitos, o viršus ir apačia — trečios, su sąlyga, kad mažieji kubeliai liestųsi vienodos spalvos sienomis. Galima sudėlioti 3×3×3 matmenų kubą su visų šešių spalvų sienomis, tačiau čia tenka pažeisti domino taisyklę.

Domino tipo lošimams galima pritaikyti bet kokius dvimačio ir trimačio domino elementus. JAV parduotuvėse iki šiol dar galima pamatyti įdomų lošimą „Kontaktas“ (pirmieji pavyzdžiai buvo išleisti 1939 metais), kuriame naudojami lygiakraščiai trikampiai. Spalvoti kubeliai sudaro pagrindą kelių lošimų, iš kurių geriausiu laikau „Įvairiaspalvį bokštą“.

Du lošėjai sėdi vienas priešais kitą. Prieš kiekvieną yra priedanga, kurią nesunku pasigaminti iš ilgos 25 cm pločio kartono juostos; kraštai užlenkiami, kad priedanga stovėtų vertikaliai. Kubeliai sudedami į dėžutę arba į maišelį ir traukiami iš ten po vieną.

Kiekvienas lošėjas išima iš maišelio septynis kubelius ir slepia juos už priedangos. Pradėdamas lošimą, pirmasis dalyvis deda vieną kubelį stalo viduryje. (Kad nuspręstute, kieno pirmas ėjimas, paprašykite priešininką suminėti tris kokias nors spalvas ir paskui meskite

kubelį. Jeigu iškris bent viena iš suminėtų spalvų, lošimą pradeda jūsų priešininkas. Priešingu atveju pradedate jūs.) Antrasis lošėjas prie jo savo kubelį padeda taip, kad liestųsi vienodų spalvų sienos. Priešininkai, paeiliui pridėdami po vieną kubelį, stato bokštą, kurio pagrindas yra kvadratinis keturių kubelių sluoksnis. Kiekvieno lošėjo tikslas — išdėlioti visus savo kubelius.



19 pav. Lošimas „Įvairiaspalvis bokštas"

Lošimo taisyklės tokios:

1. Prieš pradedant dėti naują kubelių sluoksnį, reikia baigti prieš tai buvusį.

2. Kubelį galima dėti į bet kurią laisvą vietą, jeigu tuo nepažeidžiami du reikalavimai: pirmiausia, susiliečia vienodų spalvų sienos, antra, padėtas kubelis nekliudo užbaigti sluoksnio statybos. Pavyzdžiui, 19 paveiksle kubelis *A* būtų padėtas ne pagal taisykles, jeigu kokia nors matoma gretimo kubelio siena turėtų bendrą kraštinę su jai statmena tos pačios spalvos kubelio *A* siena.

3. Jeigu lošimo taisyklės neleidžia lošėjui kloti savų kubelių, jis turi imti vieną kubelį iš maišelio. Tarkime, kad šis kubelis tinka lošimui tęsti. Tuomet lošėjas, jeigu jis to nori, gali padaryti ėjimą. Ėjimas praleidžiamas tais atvejais, kai žaidimo taisyklės draudžia dėti išimtą kubelį arba kai lošėjas tiesiog nenori daryti ėjimo.

4. Jeigu lošėjas strategijos sumetimais nori praleisti ėjimą, jis turi teisę tai padaryti bet kada, tik būtinai paėmęs vieną kubelį iš maišelio.

5. Partija baigiama, kai vienas iš dalyvių nebeturi nė vieno kubelio. Nugalėtojas gauna tris taškus už išlošimą ir po vieną tašką už kiekvieną kubelį, likusį priešininkui.

6. Kuomet kubeliai maišelyje baigiasi, lošėjai daro ėjimus paeiliui tol, kol kuris nors iš jų nenori daryti ėjimo arba priverstas jį praleisti. Tuomet jo priešininkas deda kubelius tol, kol praleidžiantysis ėjimus gali arba nori toliau lošti. Jeigu abu lošėjai nenori arba negali, nepažeisdami taisyklių, toliau lošti, tai lošimas nutraukiamas,

o nugalėtoju laikomas tas, kuriam liko mažiau kubelių. Likusių kubelių skirtumas lygus išloštų taškų skaičiui.

7. Lošimas tęsiasi, kol kuris nors surenka iš anksto susitartą taškų skaičių.

Šiek tiek pasipraktikavę lošti „Įvairiaspalvį bokštą", jūs atskleisite pačias įvairiausias strategijas. Tarkim, jūsų priešininkas pradėjo kloti naują kubelių sluoksnį, o jūs teturite du kubelius. Jūs pasielgtute klaidingai, užimdami langelį, diametraliai priešingą priešininko kubeliui, nes drauge prarastute galimybę padėti likusį kubelį. Vietoj to jūs turite padėti savo kubelį gretimame langelyje, siekdami sekančiu ėjimu baigti lošimą.

Atskleisdami vis naujas strategijas, pradedate dar giliau suvokti lošimą, o tai savo ruožtu ugdo jūsų meistriškumą ir drauge didina išlošimo tikimybę.

Aš su malonumu išklausyčiau bet kokius skaitytojų pasiūlymus tam lošimui pagerinti arba pranešimus apie kokius nors naujus lošimus bei galvosūkius su kubeliais. tokius kubelius, kurių kiekvienas nudažytas ne daugiau kaip 50 metų, tačiau, lošiant jais, dar gali slypėti daug netikėtumų.

Daugelį galvosūkių su kubeliais dar reikėtų tirti. Išnagrinėsime, pavyzdžiui, 57 vienaspalvius, dvispalvius ir trispalvius kubelius. Iš šio komplekto galima išsirinkti 27 tokius kubelius, kurių kiekvienas nudažytas ne daugiau kaip dviem spalvomis. O iš 27 kubelių galima sudėti didelį 3×3×3 matmenų kubą ir pritaikyti jį naujiems galvosūkiams kurti.

Galima paimti 30 trispalvių kubelių ir pabandyti sudėti iš jų figūras, kurių negalima sudaryti iš 30 šešiaspalvių kubelių.

Ar galima, pavyzdžiui, sudėti iš jų raudoną kubą, nepažeidžiant įprasto reikalavimo, kad susiliečiančios sienos būtų vienos spalvos?

Anglijoje kadaise buvo pardavinėjamas aštuonių spalvotų kubelių komplektas. Kubelius reikėjo pagal tam tikras taisykles sudėti į vieną didelį 2×2×2 matmenų kubą. Žaislas vadinosi „Meibloksas", bet ant dėžutės buvo parašyta, kad jį sukūrė Makmagonas.

Daugelyje šalių pardavinėjamas įvairiai vadinamas populiarus galvosūkis: keturi kubeliai, kurių kiekvienas nudažytas keturiomis spalvomis. Juos reikia sudėti eile taip, kad kiekviena gautos 1×4 matmenų prizmės pusė

Klaidos atitaisymas

M. Gardnerio knygoje „Matematika laisvalaikiu" dėl spaustuvės kaltės liko klaida. 36 puslapio 19 eilutę iš viršaus skaityti taip: „Aprašytieji 30 įvairiaspalvių kubelių žinomi jau daugiau"

būtų sudaryta iš visų keturių spalvų sienų (išdėstytų bet kuria tvarka). Kad nereikėtų dažyti sienų, kartais kubeliai apklijuojami paveiksliukais.

Pateiksime tokių kubelių nuspalvinimo schemą. Tarkime, kad pasirinkome keturias spalvas: raudoną, mėlyną, žalią ir geltoną. Keturių kubelių išklotinės atrodo taip:

I	geltona	II	raudona
žalia	geltona mėlyna	žalia	geltona mėlyna
	žalia		mėlyna
	raudona		žalia
III	geltona	IV	mėlyna
raudona	geltona mėlyna	raudona	geltona mėlyna
	mėlyna		žalia
	žalia		raudona

Teisingai sudėti tokius kubelius — uždavinys, kaip bebūtų keista, toli gražu nelengvas. Jo sprendinį galima gauti taip. Sudėti kubelius tokia tvarka, kaip jie čia surašyti, stulpeliu. I kubelis turi būti viršuje, IV — apačioje. Paskui I kubelį reikia pasukti prieš laikrodžio rodyklę (žiūrint iš apačios) 1/4 pilno apsisukimo, II — 1/2 apsisukimo, III — 3/4 apsisukimo. Pastebėsime, kad pradinėje padėtyje visų kubelių geltona pusė viršuje, o mėlyna — dešinėje. Kaip rasti tokį sprendinį, sužinosite, perskaitę „Наука и жизнь" 1969 m., Nr. 9 *(vert. pastaba).*

ATSAKYMAI

Papasakojome apie tris skirtingus Makmagono galvosūkio sprendinius. Uždavinį apie skirtingų spalvų kubus paliekame skaitytojams spręsti savarankiškai.

Įrodykite, kad iš 24 spalvotų kvadratų negalime sudėti 3×8 matmenų stačiakampio, nepažeidę lošimo taisyklių. Visų pirma išrinkite bet kuriuos keturis kvadratus, kurių kiekvienas turi po du gretimus vienos spalvos trikampius. Tuos kvadratus padėkite stačiakampio kampuose. Paskui tos pačios spalvos trikampių dar liks keturiolikoje kvadratų, o kraštams užpildyti reikėtų lygiai keturiolikos kvadratėlių. Mažiausiai trijuose iš jų parinktos spalvos trikampiai bus diametraliai priešingi vienas kitam, ir stačiakampio viduje prie jų teks pristatyti tris papildomus kvadratus, turinčius tokius pačius trikampius. Bet kvadratų daugiau nėra (visi jie sudėti pakraštyje), todėl ir 3×8 stačiakampio sudaryti negalima.

IV skyrius

Haroldas S. M. Kokseteris

Matematikai profesionalai paprastai mėgsta panarplioti matematinius galvosūkius arba kai kada pažaisti šachmatais. Tai padeda atitrūkti ir pailsėti nuo rimtų samprotavimų. Antra vertus, daugelis talentingų ir išsilavinusių galvosūkių išradėjų turi tik elementariausių matematikos žinių. Haroldas S. M. Kokseteris, Toronto universiteto matematikos profesorius, yra, kaip reta, ir žymus matematikas, ir drauge ne per daug rimtų savo mokslo skyrių specialistas.

Haroldas Skotas Makdonaldas Kokseteris gimė 1907 metais Londone. Matematinį išsilavinimą įsigijo Kembridže, Triniti koledže.

Jo knygose „Neeuklidinė geometrija“ (1942), „Taisyklingieji politopai“ (1948) ir „Realioji projektyvinė plokštuma“ (1955) nagrinėjamos svarbios matematikos problemos. Be to, Kokseteris perdirbo ir suredagavo klasikinį U. U. Rouzo Bolo veikalą „Matematinės apybraižos ir pramogos“ ir daugeliui žurnalų parašė šimtus straipsnių iš įdomiosios matematikos. 1961 metais pasirodė Kokseterio knyga „Įvadas į geometriją“ *, kurią išnagrinėsime šiame skyriuje.

Knyga reikšminga dėl daugelio priežasčių. Visų pirma ji nepaprastai daug apima. Aprėpdama įvairias geometrijos sritis, knyga supažindina skaitytoją su tokiomis sąvokomis, kurias anaiptol ne visuomet galima rasti įvadiniuose kursuose: neeuklidinė geometrija, kristalografija, grupių teorija, taisyklingosios gardelės, geodezinių teorija, vektoriai, projektyvinė geometrija, afininė geometrija ir topologija. Knyga parašyta aiškiai, gera matematine kalba. Ją reikia skaityti lėtai ir atidžiai, bet už sugaištą laiką jums kompensuos pažintis su gausia medžiaga, nuostabiai sutilpusia palyginti nedidelėje knygoje. Tekste jaučiamas autoriui būdingas jumoras, neįprastas sugebėjimas suvokti matematikos grožį, didelė meilė žaidimams. Knygos skyriai daugeliu atvejų pradedami vykusiai pa-

---

* Г. С. М. Коксетер. Введение в геометрию. М., изд-во «Наука», 1966.

rinktomis citatomis, neretai iš Luiso Kerolio, artimomis patics autoriaus įdomiems galvosūkiams.

Kai kuriuose skyriuose pateikti tik gana sunkūs įdomieji uždaviniai, kurių dalį elementariau išnagrinėjome knygoje „Matematiniai galvosūkiai ir pramogos" *: auksinis pjūvis, taisyklingieji briaunainiai, topologinės įdomybės, žemėlapio spalvinimas, rutulių sudėjimas ir t. t.

Tekstą papildo įvairūs įdomūs ir mažai žinomi pranešimai. Ar daug skaitytojų žino, pavyzdžiui, kad 1957 metais „Gudrič" kompanija užpatentavo Miobijaus lapą? Patente Nr. 2784834 aprašomas ant dviejų skriemulių uždėtas guminis diržas, naudojamas karštoms medžiagoms arba abrazyvams transportuoti. Prieš sujungiant diržo galus, vienas galas persukamas 180°. Tuomet kroviniai gali judėti abiem diržo pusėmis arba (tai tas pats) vieninteliu jo paviršiumi. (Tarp kitko, „Gudrič" kompanija ne pirmoji užpatentavo išradimą, pritaikydama Miobijaus lapą. 1923 metais buvo gautas patentas Miobijaus lapo formos begalinei kino juostai, kurios abiejose pusėse buvo galima įrašyti garsą, o 1949 metais — šlifavimo diržui, taip pat turėjusiam Miobijaus lapo formą. Apie tai pranešė skaitytojai, todėl visiškai galimas dalykas, kad yra ir kitų išradimų, kurių aš tiesiog nežinau.)

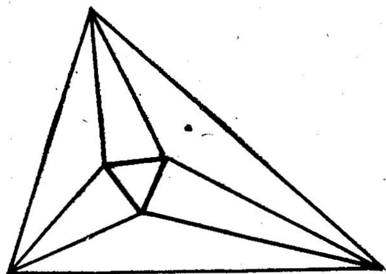
Ar daugelis žino, kad Getingeno universitete stovi didžiulė dėžė su rankraščiu, kuriame aprašyta, kaip skriestuvu ir liniuote nubraižyti taisyklingą daugiakampį, turintį 65 537 kraštines. Nubraižyti daugiakampį, turintį pirminį skaičių kraštinių, galima tik su sąlyga, jeigu šis skaičius yra ypatingo pavidalo — išreiškiamas formule

$$2^{2^n}+1.$$

Tokie skaičiai vadinami Ferma skaičiais. Žinomi penki tokie skaičiai: 3, 5, 17, 257 ir 65 537. Kokseteris rašo, kad vargšas, kuriam pavyko nubraižyti tokį daugiakampį, uždavinį sprendė dešimt metų. Niekas nežino, ar egzistuoja daugiakampis, kurio kraštinių skaičius būtų išreikštas didesniu pirminiu skaičiumi ir kurį būtų galima nubraižyti skriestuvu ir liniuote. Jeigu toks daugiakampis ir eg-

---

* Tais atvejais, kai autorius remiasi savo pirmuoju matematinių galvosūkių rinkiniu, turima galvoje knyga М. Гарднер. Математические головоломки и развлечения. М., изд-во «Мир», 1971.


20 pav. Morlėjaus teorema

zistuoja, tai jį brėžti vis tiek beprasmiška, nes jis turi turėti astronominį skaičių kraštinių.

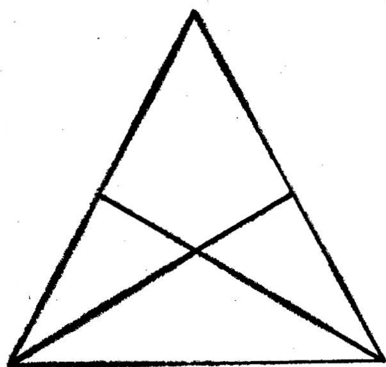
Gali atrodyti, kad trikampis (žemiausios eilės daugiakampis) taip kruopščiai ištirtas senovėje, jog nieko naujo atrasti jame negalima. Tačiau vien per pastaruosius dešimtmečius buvo atrasta daug nuostabių trikampio teoremų, kurias savo laiku būtų galėjęs atrasti Euklidas. Vienas geriausių Kokseterio išnagrinėtų pavyzdžių yra Morlėjaus teorema, kurią pirmą kartą 1899 metais atrado Frenkas Morlėjus, Džono Hopkinso universiteto matematikos profesorius ir rašytojo Kristoferio Morlėjaus tėvas. Kokseteris rašo, kad garsas apie atradimą labai greitai pasklido tarp matematikų, bet iki 1914 metų nebuvo išspausdintas nė vienas įrodymas.

Morlėjaus teorema aiški iš 20 paveikslo. Jame pavaizduotas bet koks trikampis, kurio visi kampai padalyti į tris dalis. Atkarpos tiesių, dalijančių kampus, visuomet susikerta lygiakraščio trikampio, vadinamu Morlėjaus trikampiu, viršūnėse. Šis mažas lygiakraštis trikampis ir nustebino matematikus. Profesorius Morlėjus parašė keletą vadovėlių, dirbo daugelyje ne mažiau svarbių matematikos sričių, bet nemirtingas tapo, atradęs šią teoremą. Kodėl ji nebuvo atrasta anksčiau? Kokseteris mano, jog priežastis ta, kad klasikinės matematikos požiūriu negalima padalyti kampo į tris lygias dalis, ir matematikai, tai žinodami, vengė teoremų apie kampo trisekciją. Kokseteris knygoje pateikia savą Morlėjaus teoremos įrodymą.

Uždavinys apie vidaus kampo pusiaukampinę, žinomas ir kaip Šteinerio-Lemaus teorema, literatūroje svarstomas dar plačiau, negu Morlėjaus trikampis. Teoremą pirmą kartą 1840 metais pasiūlė S. L. Lemus, o pirmasis ją įrodė Šteineris. Įrodymas plačiai išdėstytas daugelyje straipsnių ir vadovėlių.

Kitą trikampio teoremą iliustruoja 21 paveikslas. Pastaruoju laiku ji plačiai žinoma. Jeigu dviejų vidaus kampų prie pagrindo pusiaukampinės yra lygios, trikampis

lygiašonis. Pamėginkite tai įrodyti! **Elementariojoje** geometrijoje **nėra painesnio** uždavinio. Atvirkštinė teorema (lygiakraščio trikampio kampų prie pagrindo pusiaukampinės **yra lygios**) siekia dar Euklido laikus ir labai paprastai įrodoma. Įrodyti tiesioginę teoremą iš pirmo žvilgsnio, atrodo, labai paprasta, bet iš tikrųjų tai gana sunkus uždavinys. Kitados A. Hendersonas išspausdino dešimt ilgų ir painių šios teoremos įrodymų. Savo darbą (beveik 40 puslapių apimties) jis pavadino „Pastaba dėl uždavinio apie vidaus kampų pusiaukampines". Kokseterio knygoje skaitytojo laukia malonus netikėtumas — naujas ir, kaip reta, paprastas įrodymas; jam išvesti tereikia tik keturių pagalbinių linijų.



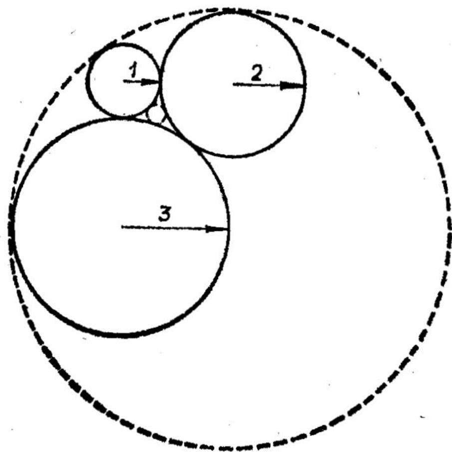
21 pav. Uždavinys apie vidaus kampų pusiaukampines

Atradęs puikią teoremą, autorius kartais nori išdėstyti jos prasmę eilėmis. Įdomus pavyzdys žinomo chemiko Frederiko Sodžio, „išradusio" žodį „izotopas", poema „Tikslus bučinys". Išdėsčius tris bet kokio didumo apskritimus taip, kad kiekvienas liestų kitus du, visuomet bus ketvirtas apskritimas, liečiantis šiuos tris.

Paprastai ketvirtą apskritimą galima išvesti dviem būdais: vienas jų — didįjį apskritimą apibrėžti apie tris mažuosius. Du galimi sprendimai 22 paveiksle pavaizduoti punktyru. Koks šių keturių vienas kitą liečiančių apskritimų dydžių santykis? Vėliau Sodis prisipažino, kad jis taip ir nesuprato, kaip gavo šią gražią simetrišką formulę: (a, b, c ir d — dydžiai, atvirkštiniai apskritimų spinduliams):

$$a^2+b^2+c^2+d^2=(^1/_2)(a+b+c+d)^2.$$

Dydis, atvirkštinis skaičiui n, apibrėžiamas kaip $\frac{1}{n}$; trupmena, atvirkštinė duotajai, gaunama, sukeitus skaitiklį ir vardiklį. Dydis, atvirkštinis spinduliui, lygus apskritimo kreivumui. Įgaubtos kreivės (pavyzdžiui, didžiojo apskritimo, išvesto apie tris mažuosius) kreivumas laikomas



22 pav. Frederiko Sodžio „tikslus bučinys“

neigiamu ir apibrėžiamas neigiamu skaičiumi. Sodis poemoje vietoje termino „kreivumas“ pavartojo žodį „išlinkimas“. Kokseteris cituoja ištrauką iš poemos:

Sakykim, kreivės išlinkimas
Tai atvirkštinis spindulys.
Visiems aiškus susitarimas,
Su kreivumu susijęs jis.
   Jei tiesės išlinkimas nulio vertas
   Tai įgaubtumas neigiamo sutvertas.

Štai apskritimai keturi
Sumanė prietemoj pasibučiuoti.
Euklidas to neįtarė,
Ko apie meilę jam svajoti.
O aš apskritimus piešiau
Ir gražią formulę gavau:
   Visų išlinkimų kvadratus susumavę
   Būsime sumos kvadrato pusę gavę.

Galvosūkių mėgėjams Sodžio formulė padeda gerokai sutaupyti laiką; geometrijos vadovėliuose dažnai pateikiamus uždavinius apie susiliečiančius apskritimus be šios formulės nelengva išspręsti. Štai pavyzdys: kokie apskritimų, nubrėžtų punktyru 22 paveiksle, spinduliai, kai trijų ištisinių apskritimų spinduliai lygūs 1, 2 ir 3 cm? Sprendžiant uždavinį, galima, aišku, nubraižyti daug stačiųjų

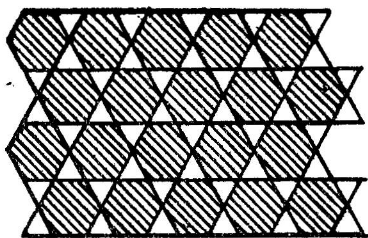
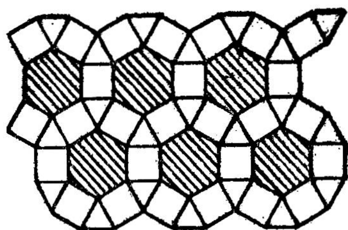
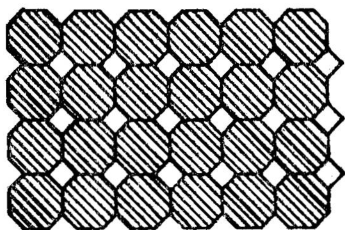
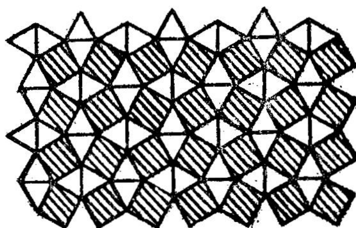
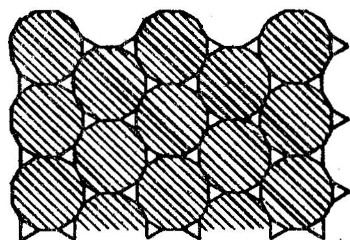
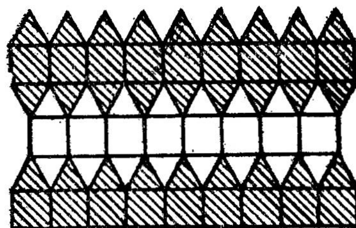
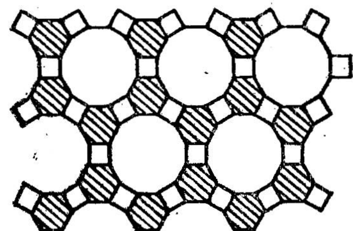
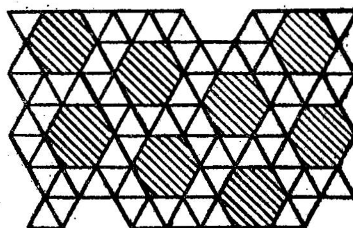
trikampių ir, atkakliai taikant Pitagoro teoremą, apskaičiuoti spindulį, o taikant Sodžio formulę, gaunama paprasta kvadratinė lygtis, kurios dvi šaknys yra atvirkštinės ieškomiems spinduliams. Teigiama šaknis $\frac{23}{6}$, lygi mažojo punktyrinio apskritimo kreivumui, atitinka $\frac{6}{23}$ cm spindulį. Neigiama šaknis $\left(-\frac{1}{6}\right)$ lygi didžiojo apskritimo kreivumui; vadinasi, jo spindulys lygus 6 cm.

Skaitytojai, jeigu įdomu, gali patikrinti šią formulę, spręsdami kitą uždavinį. Tarkime, plokštumoje išvesta tiesė, kurioje yra dviejų vienas kitą liečiančių sferų lietimosi su plokštuma taškai; sferų spinduliai 4 ir 9 cm. Reikia apskaičiuoti didžiausią spindulį sferos, kurią būtų galima padėti ant tos plokštumos taip, kad visos trys sferos viena kitą liestų, o jų lietimosi su plokštuma taškai būtų vienoje tiesėje. Sprendžiant šį uždavinį, vietoj Sodžio formulės galima taikyti Kokseterio pareinamybę, žymiai suprastinančią skaičiavimą. Kai dydžiai *a, b* ir *c*, atvirkštiniai trims spinduliams, žinomi, tai dydis, atvirkštinis ketvirtajam spinduliui, įeinančiam į Sodžio formulę, lygus

$$a+b+c\pm 2\sqrt{ab+bc+ac}.$$

Kokseterio knyga turtinga iliustracijų. Įdomiausios jų yra skyriuose, skirtuose simetrijos klausimams ir grupių teorijos reikšmei, sudarant pasikartojančius raštus, kuriuos įpratome matyti apmušaluose, plytelių bei parketo grindyse ir t. t. „Matematikas — toks pat raštų kūrėjas, kaip dailininkas arba poetas,— cituoja anglų matematiko G. G. Chardžio žodžius Kokseteris. — Jeigu matematiniai raštai pasirodo esą patvaresni, negu eilės ar dailininko drobės, tai tik dėl to, kad jie išausti iš *idėjų*".

Raštas, sudarytas iš nesusikertančių daugiakampių, tarp kurių nėra tarpų, vadinamas mozaika arba parketu. Taisyklinga vadinama mozaika, ištisai sudaryta iš vienodų taisyklingų daugiakampių, išdėstytų taip, kad jie turi bendras viršūnes (kitaip tariant, vieno daugiakampio viršūnė negali sutapti su kurio nors kito daugiakampio kraštinės vidiniu tašku). Iš viso yra trys taisyklingos mozaikos: mozaika iš taisyklingų trikampių, primenanti šachmatų lentą, mozaika iš kvadratų ir mozaika iš taisyk-

23 pav. Aštuonios „pusiau taisyklingos“ mozaikos

lingų šešiakampių, kurią galima pavaizduoti bičių koriais ir šešiakampėmis plytelėmis, kokiomis būna išklotos vonių grindys. Kvadratais ir trikampiais galima užkloti visą plokštumą ir tada, kai jų viršūnės nesutaps. Šešiakampiai tam tikslui netinka.

„Pusiau taisyklingomis“ mozaikomis vadinamos tokios, kuriose dviejų arba daugiau rūšių taisyklingi daugiakampiai, turintys bendras viršūnes, išsidėsto tuo pačiu cikliniu nuoseklumu aplink kiekvieną viršūnę. Žinomos aštuonios tokios įvairių kombinacijų mozaikos, sudarytos iš trikampių, kvadratų, šešiakampių, aštuoniakampių ir dvylikakampių (23 pav.). Visomis jomis galima dekoruoti linoleumą. Tos mozaikos, išskyrus dešinįjį apatinį piešinį, kurį aprašė Kepleris, nesikeičia, atspindėjus veidrodyje. Yra dvi veidrodinės šio rašto atmainos. Nuspalvinus įvairiomis spalvomis keletą dešimčių tam tikro didumo ir formos kartotinių daugiakampių, galima puikiai praleisti laiką, sudarinėjant iš jų mozaikas. Nepaisydami bet kokių apribojimų išdėstyti daugiakampius viršūnėse, iš to paties rinkinio galėsite sudėti be galo daug įvairių mozaikų. (Kai kuriuos nuostabius šių netaisyklingų, bet simetriškų mozaikų pavyzdžius galima rasti H. Šteinhauzo knygoje „Matematinis kaleidoskopas“.)

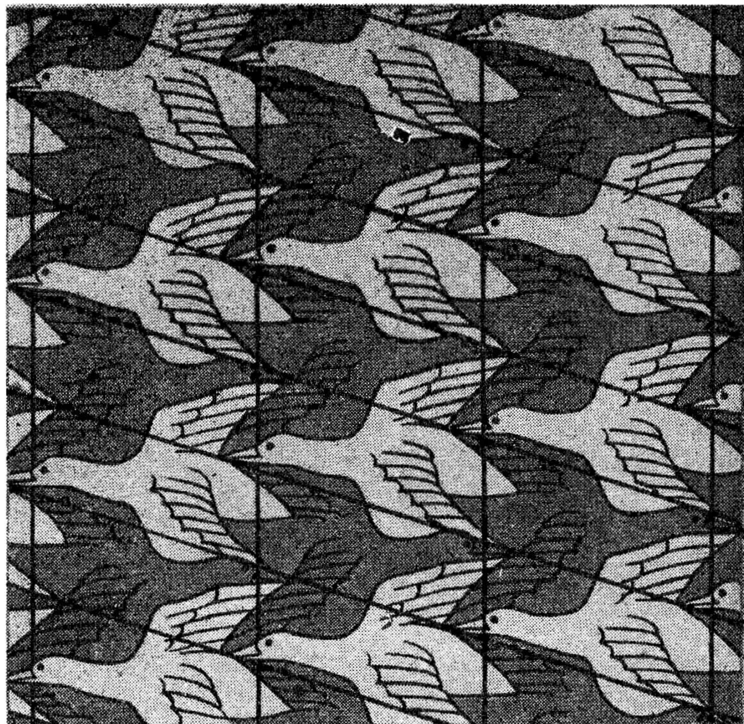
Plokščios mozaikos iš pasikartojančių raštų sudaro septyniolika skirtingų simetrijos grupių. Tai iš esmės skirtingi būdai dvimatei erdvei raštais užpildyti. Grupių elementai yra šios operacijos („fundamentalios“ sritys lieka tos pačios): jos judėjimas plokštumoje, posūkis arba atspindys veidrodyje. Septyniolika simetrijos grupių yra labai reikšmingos kristalografijoje. Kokseteris pasakoja, kaip 1891 metais rusų kristalografas J. S. Fiodorovas pirmasis įrodė, kad tų grupių yra septyniolika. „Menas padengti plokštumą pasikartojančiais ornamentais,— rašė Kokseteris,— suklestėjo XIII amžiaus Ispanijoje, kai maurai naudojo visas septyniolika simetrijos grupių; jie tobulinosi, puošdami Algambrą. Pirmenybė, teikiama abstraktiems piešiniams, aiškinama tuo, kad buvo griežtai laikomasi antrojo korano įsakymo („Nesusikurk dievaičio“).“

Nebūtina apsiriboti abstrakčiomis formomis. Kokseteris pasakoja apie išradingą olandų menininką Moricą Ešerį, kuris esminėmis sritimis laikydavo gyvūnų figūras ir septyniolikos grupių pagrindu sudarydavo įvairias



24 pav. Moricas Ešeris. Matematinė mozaika. „Raitelis ant žirgo“

mozaikas. Kokseteris pateikia vieną nuostabiausių Ešerio mozaikų (24 pav.) — „Raitelis ant žirgo“. Kita jo mozaika pavaizduota 25 paveiksle. Kokseteris rašo, kad iš pirmo žvilgsnio mozaika „Raitelis ant žirgo“ gaunama, paprastai perkeliant pagrindinį piešinį išilgai vertikalių ir horizontalių ašių; bet, geriau įsižiūrėjus, matyti, kad foną sudaro tas pats piešinys. Dar įdomesnė simetrijos grupė šiam ornamentui realizuojama vadinamais slystančiais atspindžiais: figūrą lygiagrečiai perkeliant ir drauge ją atspindint veidrodyje. Tiesą sakant, išnagrinėto piešinio negalima laikyti mozaika todėl, kad jos pasikartojantis elementas nėra daugiakampis. Tai ypatingos mozaikų klasės ornamentas. Šias mozaikas sudaro absoliučiai vienodos, netaisyklingos formos figūros, glaudžiai suderintos viena

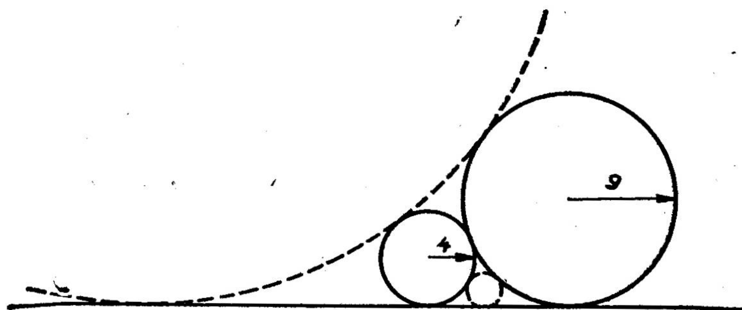


25 pav. Moricas Ešeris. Mozaika „Diena ir naktis“

su kita. (Žinomas panašus galvosūkis, kuriame reikia iš zigzaginės formos gabaliukų sudėti kubelį.) Mozaikos elementus paprasta padaryti, kai jie yra kokios nors abstrakčios formos, bet kai mozaika sudaryta iš žmonių ar gyvūnų figūrų, jas padaryti nelengva.

26 paveiksle pavaizduota viena žinomų Ešerio mozaikų — litografija „Žodis“, kurią menininkas sukūrė 1942 metais. Pasak Ešerio, mozaika iliustruoja biblijos aiškinamą pasaulio sutvėrimą. „Iš pilko rūko paveikslo centre („iš pradžių buvo žodis“) atsiranda trikampės figūros. Tolstant nuo centro, kontrastas tarp šviesių ir tamsių dėmių stiprėja, o pradinės tiesios linijos įmantriai išlinksta. Balti ruožai tampa fonu juodiesiems, o juodieji piešiniai sudaro foną, kuriame išdėstyti baltieji. Paveikslo

26 pav. Moricas Ešeris. „Žodis“ (litografija)



27 pav. Uždavinio apie „besibučiuojančias“ sferas atsakymas

pakraščiuose keistos figūros virsta paukščiais, žuvimis ir varlėmis, kiekviena jų gyvena savo aplinkoje: danguje, vandenyje ir ant žemės. Drauge paukštis laipsniškai virsta žuvimi, žuvis — varle, o varlė — vėl paukščiu. Žiūrovui susidaro įspūdis, kad figūros lyg juda laikrodžio rodyklės kryptimi".

Plačiau apie Ešerio matematinį meną pasakojama žurnalo *Scientific American* 1966 metų balandžio mėnesio numeryje. Ten pat pateiktas ir literatūros sąrašas.

ATSAKYMAI

Aš siūliau skaitytojams nustatyti, kam lygus didžiausias spindulys sferos, kuri liečia plokštumą ir dar dvi viena kitą liečiančias sferas, kai visi trijų sferų lietimosi su plokštuma taškai yra tos pačios plokštumos vienoje tiesėje, o dviejų sferų spinduliai lygūs 4 ir 9 cm. 27 paveiksle pavaizduotas sferų kirtimas plokštuma, statmena liečiamajai plokštumai ir einančia per tiesę, kurioje yra lietimosi taškai. Aišku, kad, laikant tiesę apskritimu, kurio kreivumas lygus nuliui, uždavinį galima traktuoti kaip keturių „besibučiuojančių" apskritimų problemą. Frederiko Sodžio formulė iš „Tikslaus bučinio" pateikia dviejų punktyrinių apskritimų spindulių reikšmes: $1\frac{11}{25}$ ir 36 cm. Didysis apskritimas yra ieškomosios sferos ekvatorinis pjūvis.

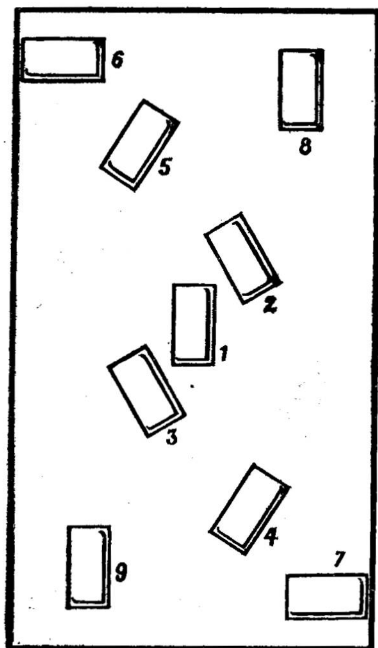
V skyrius

Bridž-it * ir kiti lošimai

„Žmogus niekur neparodo tiek išradingumo, kaip lošimuose",— rašė Leibnicas Paskaliui. Šaškėmis, kryžiukais ir nuliukais, europietiškais ir japoniškais šachmatais pa-

---

* Bridg-it angliškai skamba kaip moters vardas Bridžita. Lošimo pavadinimą galima išversti „Permesk tiltelį". *Vertėjo į rusų k. past.*



28 pav. Lošimas, užklojant domino kauliukais stačiakampę lentą. Laimi tas, kuris pakloja paskutinį kauliuką

prastai lošiama dviese. Tie lošimai, visų pirma, visada baigiasi po baigtinio ėjimų skaičiaus. Antra vertus, jiems neturi įtakos atsitiktinumas, būdingas, pavyzdžiui, kortoms arba lošimo kauliukams ir, pagaliau, trečia, priešininkai lošdami mato vienas kito ėjimus. Jeigu abu dalyviai lošia „racionaliai" (laikosi optimalios strategijos), lošimo baigtis yra aiški iš anksto; lošimas baigiasi arba lygiosiomis arba vieno kurio nors dalyvio pergale: katras įveiks — tas, kuris pradeda, ar tas, kuris daro antrąjį ėjimą?

Šiame skyriuje iš pradžių papasakosime apie du paprastus lošimus, kuriems žinomos optimalios strategijos. Paskui išnagrinėsime populiarų stalo lošimą, kurio išlošimo strategija atrasta visai neseniai, ir pagaliau visą klasę iki šiol dar neištirtų lošimų.

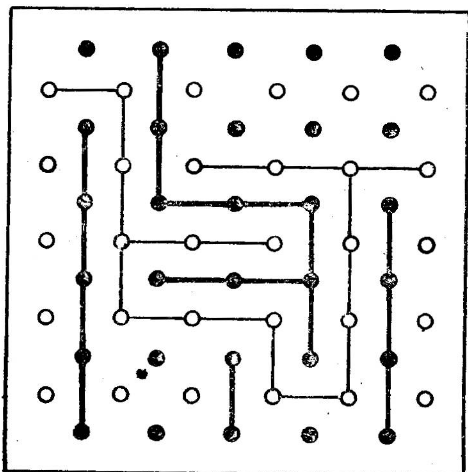
Lošimams, kurių dalyviai stato kaladėles ant lentos arba, atvirkščiai, nuima nuo jos, optimali yra vadinamoji simetrinė strategija. Išnagrinėsime klasikinį tokio lošimo pavyzdį. Lošėjai paeiliui bet kaip deda domino kauliukus ant stačiakampės lentos. Kauliukų turi pakakti visai lentai uždengti. Laimi tas, kuriam pavyksta pakloti paskutinį domino kauliuką. Lygiosiomis lošimas baigtis negali, todėl kyla klausimas: kas laimės, abiem dalyviams lošiant racionaliai? Pasirodo, kad tokioje situacijoje laimi tas, kuris pirmasis pradeda. Jo strategijos esmė — pakloti pirmąjį domino kauliuką lentos viduryje (28 pav.), o visus kitus kauliukus dėlioti simetriškai priešininko padėtims. Visiškai suprantama, jog jeigu priešininkui pavyksta ras-

ti lentoje laisvą vietelę, būtinai bus laisva ir antra vieta, simetriška tai, kurią užėmė priešininkas.

Ši strategija taikytina ir tuo atveju, kai vietoje domino kauliukų lošiama bet kokiomis kitomis plokščiomis figūromis, nekeičiančiomis savo formos. Jas reikia pasukti 180° kampu. Pavyzdžiui, ta pati strategija bus optimali, kai lentą reikia uždengti graikiškais kryžiais, tačiau T formos figūrai strategija keičiasi. Pažiūrėsime, ar ji tinka, klojant ant lentos cigaro formos elementus. Atsakymas gali atrodyti truputį keistas: strategija teisinga, tačiau reikia žinoti, kad cigarų galai yra skirtingos formos, todėl pirmąjį cigarą reikia padėti vertikaliai, apipjaustytu galu žemyn! Sugalvoti tokius lošimus visai nesudėtinga. Susitarus iš anksto dėl lošimo taisyklių, galima pasirinkti bet kokias lentas ir apstatyti jas įvairiausių formų figūromis. Vienais atvejais simetrinė strategija garantuoja pirmojo arba antrojo lošėjo pergalę, kitais — optimalios strategijos nėra.

Visai kitas simetrinės strategijos tipas padeda nugalėti štai tokiame lošime. Ant stalo iš susiliečiančių viena su kita monetų sudėliojamas apskritimas. Ėjimai daromi paeiliui; vienu ėjimu galima paimti arba vieną, arba dvi greta esančias monetas. Išlošia tas, kuris paima paskutinę monetą. Dalyvis, darantis antrąjį ėjimą, visada gali laimėti. Po to, kai jo priešininkas antru ėjimu paims nuo stalo vieną arba dvi monetas, apskritimas pavirs išlenkta grandine su dviem galais. Kai grandinėje yra nelyginis skaičius monetų, lošėjas, darantis antrą ėjimą, turi paimti monetą, lygiai nutolusią nuo grandinės galų. O kai monetų skaičius grandinėje lyginis, jis ima dvi vidurines grandinės monetas. Abiem atvejais kitos monetos sudaro dvi vienodo ilgio grandines. Kokias monetas dabar bepaimtų priešininkas iš vienos tų grandinių, antras lošėjas kitu ėjimu turi imti monetas, esančias analogiškose kitos grandinės vietose.

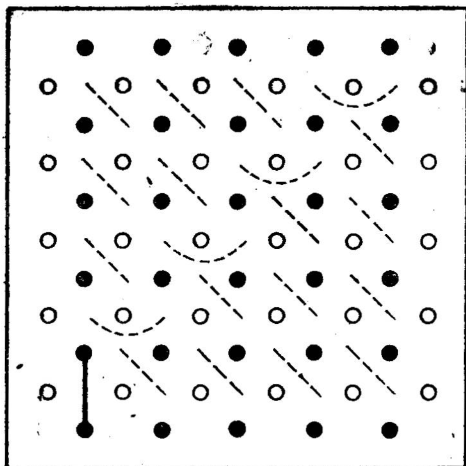
Strategijos, panašios į tas, kurias ką tik išnagrinėjome, lošimų teorijoje kartais vadinamos porinėmis strategijomis. Šiuo pavadinimu pabrėžiama, kad visas lošimas sudarytas lyg iš porinių ėjimų, o optimali strategija numato, kad vienam dalyviui padarius kokį nors ėjimą, priešininko ėjimas (nebūtinai simetriškas) turi būti tos pačios ėjimų poros. Ryškiausias lošimų su porine strategija pavyzdys yra topologinis lošimas bridž-it, kuris jau kokią



29 pav. Baigta bridž-it partija. „Baltieji“ laimėjo

dešimtį metų yra viena mėgiamiausių vaikų pramogų. Apie jį kalbėta knygos „Matematiniai galvosūkiai ir pramogos“ 22 skyriuje.

29 paveiksle parodyta bridž-it lošimo lenta. Kai lošimo laukas nupieštas popieriaus lape, dalyviai paeiliui brėžia vertikalias arba horizontalias linijas, jungiančias du vienodos spalvos taškus. Negalima taškų jungti įstrižai. Vienas priešininkų juodu pieštuku sujungia juodus taškus, antras — kitos spalvos taškus tokios pačios spalvos pieštuku. Priešininkų linijos niekur neturi susikirsti. Laimi tas, kuris pirmasis sudaro laužtę, jungiančią dvi priešingas lentos „savo“ spalvos kraštines. Daugelį metų buvo žinoma, kad egzistuoja strategija, padedanti pasiekti pergalę lošėjui, darančiam pirmąjį ėjimą, bet ją rasti pavyko ne iš karto . Ją atrado lošimų teorijos specialistas O. Grosas. Aš parašiau Grosui laišką, tikėdamasis gauti ilgą ir sudėtingą uždavinio analizę, tikriausiai neprieinamą eiliniam skaitytojui. Mano nuostabai, visą aiškinimą sudarė brėžinys, kurį matote 30 paveiksle, ir dvi tokios frazės: „Jūs pradedate lošimą ir darote ėjimą, pažymėtą juoda linija kairiajame apatiniame brėžinio kampe. Toliau reikia lošti taip: kiekvieną kartą, kai tiesė, kurią nubrėžė priešininkas, kerta kokios nors punktyru pažymėtos



30 pav. Strategija, padedanti pasiekti pergalę bridž-it lošime

kreivės galą, jūs brėžiate tiesę, kertančią tos kreivės antrąjį galą.“ Ši sąmojinga porinė strategija padeda nugalėti tam, kuris daro pirmąjį ėjimą, bet visų ėjimų skaičius nebus minimalus. Pats Grosas taip charakterizavo aprašytąją strategiją: ji yra „bukas ginklas prieš buką lošėją, gudrus — prieš gudrų, bet ir vienu, ir kitu atveju padeda laimėti“.

Grosas sugalvojo nemažai porinių strategijų, bet išsirinko tą, apie kurią ką tik pasakojome. Ji turi du privalumus: pirma, yra labai nuosekli, antra, lengvai apibendrinama bet kokių matmenų lošimo lauko atveju.

Atkreipkite dėmesį į tai, kad brėžinyje iš anksto nenumatytos linijos, jungiančios lentos kraštinius taškus. Bridž-it lošimo taisyklės nedraudžia tokių linijų, bet brėžti jų nėra prasmės, nes pergalei pasiekti jos neturi įtakos. Jeigu lošiate taip, kaip parodyta brėžinyje, o jūsų priešininkas staiga nubrėžia liniją išilgai lentos pakraščio, tai jūs darote atsakomąjį ėjimą, sujungdami du kraštinius arba, jeigu jums tai labiau patiks, bet kuriuos du lentos taškus. Gali atsitikti, kad šį atsitiktinį ėjimą jums paskui padiktuos strategija, tuomet (nes jį jau padarėte), nubrėžkite kokią nors kitą liniją. Papildoma linija lentoje netrukdo, o kai kuriais atvejais net teikia tam tikrų

privalumų. Suprantama, dabar, kai žinoma optimali pirmojo lošėjo strategija, bridž-it netenka viso patrauklumo. Jį lošti gali tik tie, kurie dar negirdėjo šios „liūdnos" naujienos.

Nepaisant palyginti paprastų taisyklių, daugelio lošimų, kuriems reikia specialių lošimo laukų, matematiškai išanalizuoti negalima. Praėjusio šimtmečio pabaigoje Anglijoje plačiai buvo žinomas chalmos lošimas, iš kurio atsirado visa šeima iki šiol dar matematikų neišnagrinėtų lošimų.

1898 metais Bernardas Šo rašė: „Anglijoje priimta, kad kiekvienos atskiros šeimos, gyvenančios atskirame name, nariai sėdėtų atskiruose kambariuose ir arba tylėdami skaitytų knygą ar laikraštį, arba loštų chalmą..."

Iš pradžių chalmą lošė ant 16×16 matmenų šachmatų lentos (lošimo pavadinimas kilęs iš graikiško žodžio, reiškiančio „šuolį"). Vėliau pradėtos naudoti įvairiausių matmenų ir formų lentos. Lošimas, nūnai žinomas kaip „kiniškos šaškės", yra vienas iš daugelio vėlesnių chalmos variantų. Čia papasakosiu apie vieną suprastintą variantą, kuris lošiamas paprastoje 8×8 langelių šachmatų lentoje. Iš jo galima sudaryti vieną įdomų ir vis dar neišspręstą galvosūkį iš pasiansų dėliojimo srities.

Pradedant lošimą, šaškės išdėstomos lentoje kaip įprasta. Ėjimai daromi beveik taip pat, tik su kai kuriais pakeitimais:

1) draudžiama stumti šaškę, kuri ką tik peršoko per kitą;

2) šokinėti galima ir per savo, ir per svetimos spalvos šaškes;

3) galimi ėjimai ir šuoliai atgal.

Vienu ėjimu galima nuosekliai peršokti per kelias bet kokios spalvos šaškes, stovinčias pagal langelio įstrižainę, bet derinti tokį ėjimą su paprastu ėjimu (be peršokimo) draudžiama. Kiekvienas lošėjas stengiasi užimti priešininko pradinę poziciją, ir laimi tas, kuriam pirmam pasiseka tai padaryti. Išlošti galima ir tada, kai lentoje susidaro tokia situacija, kad priešininkas negali daugiau padaryti nė vieno ėjimo.

Išanalizavę kitą galvosūkį, suprasite, kaip sudėtinga analizuoti chalmos tipo lošimus. Lyginiuose lentos pirmų trijų eilių kvadratuose įprastu būdu sustatykite dvylika

šaškių, visus kitus langelius palikdami laisvus. Koks minimalus ėjimų skaičius reikalingas visoms šaškėms perkelti į priešingos lentos pusės tris eiles? Ėjimai daromi pagal chalmos taisykles: pirma, šaškę galima įstrižai perkelti ant gretimo juodo langelio pirmyn arba atgal ir, antra, leidžiama įstrižai peršokti per vieną arba kas antrą per kelias šaškes. Šokinėjant per šaškes, galima grįžti atgal, paskui vėl pirmyn; jeigu šaškės stovi kas langelis, tai visą sudėtingą šuolį galima atlikti vienu ėjimu. Taip pat, kaip ir chalmoje, nebūtina peršokti per visas galimas šaškes; nuoseklių šuolių seriją leidžiama nutraukti bet kurioje vietoje nepriklausomai nuo to, ar galima ją pratęsti.

Sprendžiant uždavinį, juodus langelius patogu numeruoti iš kairės į dešinę ir iš viršaus į apačią skaičiais nuo 1 iki 32.

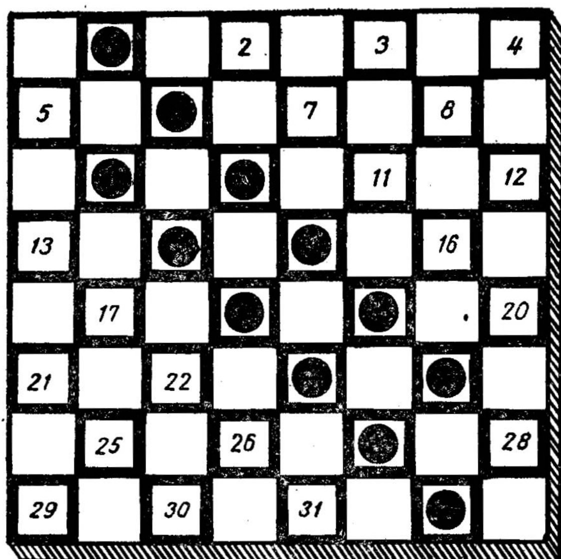
ATSAKYMAI

Kaip ėjimais, kuriuos leidžia chalmos taisyklės, perkelti dvylika šaškių iš vieno lentos krašto į priešingą? Uždavinys sukėlė gausius skaitytojų atsiliepimus. Vieni laikė, kad šį uždavinį galima išspręsti 23 ėjimais, kiti — 22 arba 21 ėjimu, tretiems atrodė, jog pakanka 20 ėjimų. Tačiau niekas neįrodė, kad minimalus ėjimų skaičius 20, nors daugelyje laiškų buvo pateiktas paprastas įrodymas, kad uždaviniui išspręsti reikia ne mažiau kaip 16 ėjimų.

Lošimo pradžioje šaškės išdėstomos taip: aštuonios šaškės užima nelyginę 1 ir 3 eilę, o keturios šaškės yra lyginėje 2 eilėje. Pabaigoje aštuonios šaškės atsiduria dviejose lyginėse (6 ir 8) eilėse, o keturios šaškės užima nelyginę 7 eilę. Matome, kad keturios šaškės pakeitė lyginumą. Todėl kiekviena jų turėjo mažiausiai vieną kartą peršokti per langelį ir vieną kartą pereiti įstrižai į artimiausią langelį. Susumavę visus ėjimus, gausime šešiolika.

Sunku įsivaizduoti, kaip galima šaškes perkilnoti mažiau kaip 20-čia ėjimų. Turiu, tiesa, prisipažinti, kad pirmą kartą suformulavus šitą uždavinį, sprendimas tik iš 20 ėjimų man atrodė taip pat negalimas. Sunumeruokime šachmatų lentos juodus kvadratus iš kairės į dešinę ir iš viršaus į apačią nuo 1 iki 32, pasukę lentą taip, kad kai-

riajame viršutiniame kampe būtų baltas kvadratas. Tuomet 20 ėjimų, kurių reikia uždaviniui išspręsti, atrodys taip:



31 pav. Chalmos lošimo pozicija šaškių lentoje po 10 ėjimų

1. 21–17
2. 30–14
3. 25– 9
4. 29–25
5. 25–18
6. 22– 6
7. 17– 1
8. 31–15
9. 26–10
10. 28–19
11. 14– 5
12. 23– 7
13. 18– 2
14. 32–16
15. 27–11
16. 15– 1
17. 8– 4
18. 24– 8
19. 19– 3
20. 16–12

Pateiktas sprendimas simetriškas. 31 paveiksle parodytas šaškių išsidėstymas po dešimtojo ėjimo. Dabar pasukę lentą 180° kampu ir pakartoję visus ėjimus priešinga tvarka, uždavinį vėl išspręskite. Kiek man žinoma, tai ne vienintelis 20-ies ėjimų sprendimas. Mes gavome iš skaitytojų įvairiausių simetriškų 20 ėjimų sprendimų, bet vienas pasirodė esąs nesimetriškas.

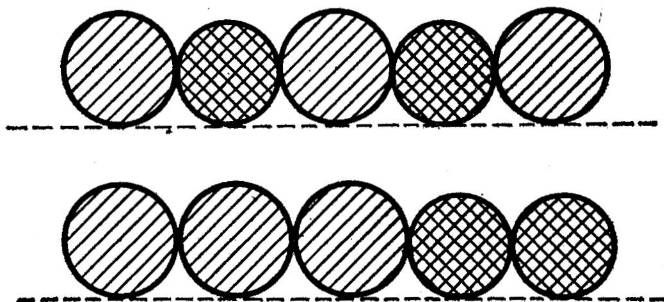
Devyni uždaviniai

1. Monetų rūšiavimas. Išdėstykite gretoje du pusrublius ir tris penkiakapeikius, kaip parodyta 32 paveikslo viršuje. Minimaliu ėjimų skaičiumi reikia sudaryti gretą, pavaizduotą paveikslo apačioje.

Daroma taip. Dviem pirštais, pavyzdžiui, didžiuoju ir smiliumi, prispauskite dvi gretimas monetas, išstumkite jas aukštyn iš gretos ir perstatykite į bet kurią įsivaizduojamos tiesės, pažymėtos punktyru, vietą. Paimtos monetos turi visą laiką liestis, ir jų negalima sukeisti vietomis: kairioji poros moneta visą laiką bus kairėje, dešinioji — dešinėje. Perstatinėjant monetas, tarp atskirų porų galima palikti bet kokius tarpus, tačiau pabaigoje visi tarpai turi būti užpildyti. Visa grandinėlė nebūtinai turi būti ištisai pradinėje vietoje, bet gali pasislinkti ir punktyrine tiese.

Jeigu būtų galima perstatyti dvi vienodas monetas, galvosūkį lengvai išspręstume trimis ėjimais: 1 ir 2 monetas pastumtume į kairę (1), jų vietą užimtų 4 ir 5 (2), o 5 ir 3 monetas pastumtume iš dešiniojo galo į kairįjį (3). Kadangi tai negalima (perstumiamos monetos turi būti skirtingos), galvosūkis pasidaro gražus ir sudėtingas.

2. Kiek laiko reikės duonai paskrudinti? Net įprastame namų ūkyje galima rasti sudėtingų uždavinių iš operaci-



32 pav. Galvosūkis su pusrubliais ir penkiakapeikiais

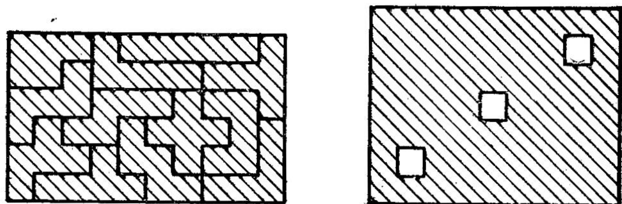
jų tyrimo srities. Sakykim, kad reikia paskrudinti tris sviestu apteptas duonos riekutes. Tam tikslui turime tosterį su dviem durelėmis iš šonų, į jį iš karto galima įdėti dvi duonos riekutes, bet tada apskrus tik viena jų pusė. Norint paskrudinti kiekvienos riekutės abi puses, tenka atidaryti dureles ir riekutes apversti. Įdėti duonos riekutę į tosterį reikia 3 sekundžių, 3 sekundžių ją išimti ir 3 sekundžių apversti kita puse, neišimant iš tosterio. Kiekviena šių operacijų atliekama abiem rankomis, taigi jūs negalite dėti į tosterį, išimti arba apversti vienu metu dviejų riekučių; taip pat negalima vienos riekutės tepti sviestu, o su antrąja tuo metu šeimininkauti prie tosterio. Duonos riekutei paskrudinti prireiks 30 sekundžių; duonai aptepti sviestu reikės dar 12 sekundžių.

Sviestu aptepama tik viena riekutės pusė, be to, ne anksčiau, negu ta pusė paskrus. Aptepus paskrudintos riekutės vieną pusę, ją galima dėti atgal į tosterį, kad paskrustų antra pusė. Tosteris įkaitintas iš pat pradžių. Koks trumpiausias laiko intervalas, per kurį galima paskrudinti ir aptepti sviestu trijų duonos riekučių abi puses?

3. **Du galvosūkiai su pentamino.** Pentamino mėgėjams pateikiami du nauji galvosūkiai: vienas paprastas, o antras — sudėtingesnis.

A. 6×10 stačiakampis, pavaizduotas 33 paveikslo kairėje, sudarytas iš dvylikos pentamino elementų. Perkirpkite šį stačiakampį išilgai juodų linijų į tokias dvi dalis, iš kurių galima sudėti figūrą su trimis plyšiais, parodytą to paties paveikslo dešinėje.

B. Iš 12 pentamino elementų sudėkite stačiakampį 6×10 taip, kad kiekvienas elementas liestų kurią nors šio stačiakampio kraštinę. Žinoma, kad iš kelių tūkstančių įvairių būdų stačiakampiui 6×10 sudaryti (figūros, perei-



33 pav. Uždavinys su pentamino

nančios viena į kitą pasukant arba atspindint, nelaikomos skirtingomis) tik du patenkina iškeltą sąlygą. Nesimetriškus elementus galima apversti ir dėti ant stalo bet kuria puse.

4. Teorema apie nejudantį tašką. Kartą rytą, patekėjus saulei, vienas budistų vienuolis ėmė kopti į aukštą kalną. Siauras vienos dviejų pėdų pločio takas vingiavo lyg serpantinas kalno šlaitu prie žėrinčios šventyklos kalno viršūnėje.

Vienuolis ėjo nevienodu greičiu, dažnai sustodamas pailsėti ir pavalgyti džiovintų vaisių, kurių buvo pasiėmęs. Šventyklą jis priėjo prieš saulėlydį. Kelias dienas pasninkavęs ir meldęsis, vienuolis leidosi atgal tuo pačiu keliu. Jis išėjo auštant ir keliavo nevienodu greičiu, daug kartų kelyje ilsėdamasis. Aišku, vidutinis nusileidimo greitis viršijo vidutinį kopimo greitį.

Įrodykite, kad ant tako yra toks taškas, kurį vienuolis nusileisdamas ir įkopdamas praėjo tuo pačiu paros laiku.

5. Du galvosūkiai su skaitmenimis. Dviejuose žemiau pateiktuose uždaviniuose reikia per neilgą laiko tarpą peržiūrėti šimtus skaitmenų kombinacijų, todėl iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad jiems išspręsti reikia skaičiavimo mašinos. Tačiau teisingai traktuodami, sugalvoję vieną kitą gudrybę, abu uždavinius galėsite išspręsti beveik mintinai. Tokie netikėti uždavinio suprastinimai geram programuotojui padeda taupyti mašinos laiką, o kai kada iš viso nesinaudoti mašina.

A. Kvadratinė šaknis iš **WONDERFUL**" * — taip buvo vadinama viena pjesė, ėjusi Brodvėjuje. Sakykim, kiekviena žodžio **WONDERFUL** raidė reiškia kokį nors skaitmenį (išskyrus nulį), o žodžio **OODDF** (su tomis pačiomis reikšmėmis) — kvadratinę šaknį iš žodžio **WONDERFUL**. Kam lygi ta šaknis?

B. Devynis skaitmenis (išskyrus nulį) galima daugeliu būdų surašyti į kvadrato 3×3 langelius taip, kad skaičius, esąs apatinėje eilutėje, būtų lygus dviejų viršutinių skaičių sumai. Pavyzdyje, parodytame 34 paveikslo kairėje, apatinis skaičius 972 lygus skaičių 318 ir 654, esančių pirmose dviejose eilutėse, sumai. Žinoma nemaža

---

* Wonderful — puikus, nuostabus *(angl.)*.

$$\begin{array}{r} 318 \\ +\ 654 \\ \hline 972 \end{array}$$

7	6	1
8	5	2
9	4	3

34 pav. Ar galima skaitmenis įrašyti į kvadrato langelius taip, kad jis turėtų abiejų čia pavaizduotų kvadratų savybes?

variantų ir tokio skaitmenų išdėstymo kvadrate, kai bokštu juos visus galima apeiti iš eilės, nepraleidžiant nė vieno (34 pav., dešinėje). Pradėję nuo vieneto, šachmatų bokštu (po vieną langelį kiekvienu ėjimu) apeisite iš eilės visus langelius nuo 2 iki 9, kiekvieną kartą pereidami prie skaitmens, vienetu didesnio už prieš jį buvusį.

Uždavinys toks: reikia sudaryti kvadratą, turintį abi savybes. Kitaip tariant, reikia taip išdėstyti skaitmenis kvadrato langeliuose, kad, pirma, juos būtų galima apeiti bokštu (iš eilės nuo 1 iki 9) ir, antra, kad triženklis skaičius apatinėje eilėje būtų lygus sumai skaičių, esančių dviejose viršutinėse eilėse. Šio uždavinio sprendinys vienintelis.

6. Kaip Kantui pavyko nustatyti tikslų laiką? Žinoma, kad Kantas buvo viengungis ir turėjo įprotį eiti pasivaikščioti. Karaliaučiaus gyventojai, pamatę jį einantį pro vieną ar kitą namą, galėjo pagal tai tikrinti savo laikrodžius.

Kartą vakare Kantas pasibaisėjęs pastebėjo, kad jo sieninis laikrodis vėluoja. Matyt, tarnas, kuris tą dieną jau buvo baigęs darbą, pamiršo jį prisukti. Didysis filosofas niekaip negalėjo sužinoti, kuri valanda, nes jo rankinis laikrodis buvo taisomas. Nepasukęs rodyklių, jis išėjo į svečius pas savo draugą Šmitą, pirklį, gyvenusį maždaug už mylios nuo Kanto. Įėjęs į draugo namus, Kantas pažvelgė į laikrodį prieškambaryje ir, pasisvečiavęs kelias valandas, leidosi atgal. Grįžo tuo pačiu keliu, kaip ir visuomet, lėta, oria eisena. Kantas neturėjo ir mažiausio supratimo, kiek laiko jis ėjo namo (Šmitas neseniai čia

buvo persikėlęs, ir Kantas dar nespėjo nustatyti, kiek laiko jam reikia nueiti nuo Šmito iki savo namų). Tačiau, parėjęs namo, jis iš karto nustatė laikrodį teisingai. Kaip Kantas sugebėjo sužinoti tikslų laiką?

7. Žaidimas dvidešimčia klausimų su žinomu pasirinktų daiktų pasirodymo tikimybės pasiskirstymu. Gerai žinomame žaidime dvidešimčia klausimų vienas žmogus pasirenka kokį nors daiktą, pavyzdžiui, Filadelfijos Laisvės Varpą arba žymios balerinos kairės kojos mažąjį pirštelį, o kitas žmogus, pateikdamas klausimus, mėgina atspėti tai, kas užminta.

Klausiantysis turi teisę pateikti ne daugiau kaip dvidešimt klausimų, be to, jie turi būti tokie, kad galima būtų atsakyti arba „taip", arba „ne". Geriausia pateikti tokius klausimus, kuriais remiantis visų galimų daiktų aibę galima būtų padalyti į dvi kuo lygesnes dalis. Sakykim, pavyzdžiui, vietoj daiktų pasirinktas kuris nors skaitmuo nuo 1 iki 9. Norint jį atspėti, reikės ne daugiau kaip keturių, o gal ir mažiau klausimų. Dvidešimties klausimų pakanka atspėti bet kuriam iš 1 048 576 skaičių nuo 1 iki 2^{20}.

Kiekvienam objektui priskirsime tam tikrą skaičių — tikimybę to, kad bus pasirinktas tik šis objektas. Sakykim, pavyzdžiui, kortų kaladę sudaro vienas lapų tūzas, dvi lapų dviakės, trys lapų triakės ir t. t. iki devynių lapų devynakių, tai yra kaladėje iš viso 45 lapų spalvos kortos. Kaladė sumaišoma, ir kas nors ištraukia vieną kortą. Jūs turite atspėti ją, pateikdami klausimus, į kuriuos galima atsakyti tik žodžiais „taip" arba „ne". Kaip padaryti, kad šių klausimų skaičius būtų minimalus?

8. Baltieji pradeda ir... neduoda mato vienu ėjimu. Neįprastą uždavinį, pavaizduotą 35 paveiksle, pasiūlė vokiečių šachmatų kompozitorius Karlas Fabelis.

Reikia rasti tokį baltųjų ėjimą, kad juodųjų karaliui tuo ėjimu nebūtų duotas matas.

9. Raskite visus šešiasienių tipus. Briaunainiu vadinamas kūnas, apribotas daugiakampių (jie vadinami briaunainio sienomis). Paprasčiausias briaunainis yra tetraedras, kurio paviršių sudaro keturi trikampiai (36 pav., *a*). Tetraedrų gali būti įvairiausių formų, tačiau, atlikus jo

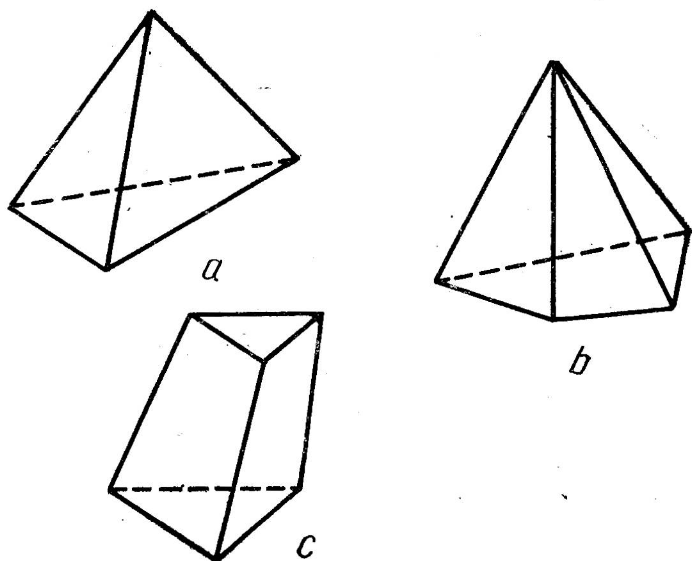
35 pav. Baltieji pradeda ir ... neduoda mato

bet kokias topologines transformacijas, išsaugojančias gardelės, kurią sudaro briaunos, invariantiškumą (keičiant „karkaso" struktūrą), pasirodys, kad galimas tik vienas pagrindinis tetraedro tipas. Kitaip tariant, tetraedro sienos gali būti tik trikampiai.

Yra du pagrindiniai penkiasienių tipai (36 pav., *b* ir *c*). Vienas jų — Cheopso piramidė, kurios keturios šoninės sienos yra trikampio, o pagrindas — keturkampio formos. Antrojo tipo penkiasienis gaunamas, nupjovus vieną tetraedro viršūnę. Tokio penkiasienio paviršių sudaro du trikampiai ir trys keturkampiai.

O kiek yra skirtingų iškiliųjų šešiasienių tipų? (Briaunainis vadinamas iškiliuoju, jeigu jį galima padėti ant stalo bet kuria siena; laikoma, kad stalo matmenys žymiai didesni už briaunainio matmenis.) Geriausiai žinomas iškilusis briaunainis — kubas.

Jeigu jūs, ieškodami iškiliųjų šešiasienių, nupjausite paprasčiausių geometrinių kūnų viršūnes, turėsite atidžiai sekti, kad tarp gautų šešiasienių nebūtų pasikarto-



36 pav. Trys briaunainių tipai

jančių. Pavyzdžiui, nupjovus Cheopso piramidės viršūnę, gautas briaunainis bus topologiškai ekvivalentus kubui. Nepamirškite, kad modelių sienos turi būti plokščios.

ATSAKYMAI

1. Uždavinį apie penkiakapeikius ir pusrublius galima išspręsti keturiais ėjimais (monetos viršutiniame paveiksle laikomos sunumeruotos iš kairės į dešinę):

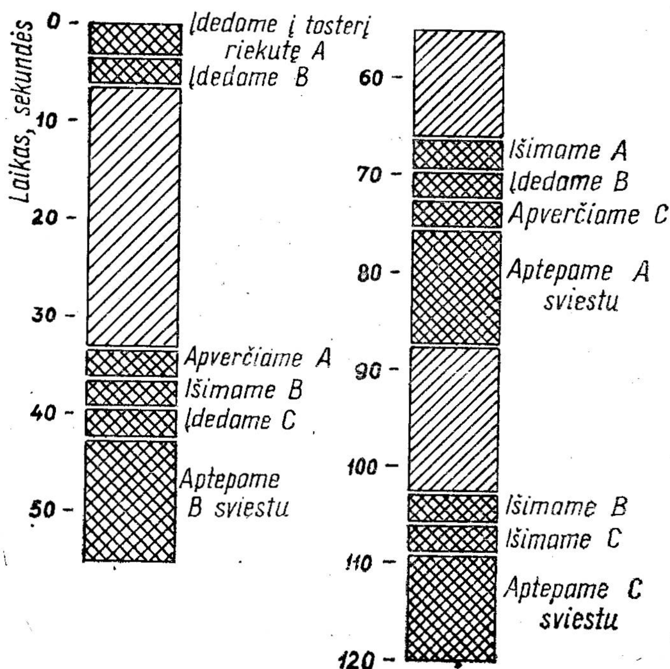
1) 3 ir 4 monetas perkelti į dešinę nuo 5 monetos, paliekant tarp 3 ir 4 dviejų monetų pločio tarpą;

2) 1 ir 2 monetas perkelti į dešinę nuo 3 ir 4 taip, kad 1 ir 4 monetos liestųsi;

3) 4 ir 1 monetas įstumti į tarpą tarp 5 ir 3 monetos;

4) 5 ir 4 monetas įstumti į tarpą tarp 3 ir 2 monetų.

2. Turint tokio tipo tosterį, apie kurį buvo kalbama uždavinio sąlygoje, galima per 2 minutes paskrudinti ir aptepti sviestu tris riekutes duonos *(A, B, C)*. Veiksmų seka parodyta 37 paveiksle.



37 pav. Uždavinio su tosteriu sprendimas

Kai šis sprendimas pasirodė žurnale, aš nustebęs sužinojau iš skaitytojų, kad trijų duonos gabaliukų paskrudinimo laiką galima sutrumpinti iki 111 sekundžių. Pasirodo, neatsižvelgiau į vieną dalyką: nepaskrudęs iki galo duonos gabaliukas išimamas iš tosterio, o po kurio laiko įdedamas atgal.

Žemiau pateikiamas vienas tokių sprendimų:

Sekundės		Operacijos
1— 3	....	Įdedame į tosterį riekutę *A*
3— 6	....	Įdedame *B*
6—18	....	15 sek. *A* skrunda iš vienos pusės
18—21	....	Išimame *A*
21—23	....	Įdedame *C*
23—36	....	*B* apskrunda iš vienos pusės
36—39	....	Išimame *B*

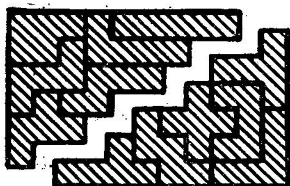
39—42	....	Įdedame *A*, apverstą kita puse
42—54	....	Tepame *B* sviestu
54—57	....	Išimame *C*
57—60	....	Įdedame *B*
60—72	....	Tepame *C* sviestu
72—75	....	Išimame *A*
75—78	....	Įdedame *C*
78—90	....	Tepame *A* sviestu
90—93	....	Išimame *B*
93—96	....	Įdedame *A*, apverstą nebaigta skrudinti puse
96—108	....	*A* apskrunda iki galo
108—111	....	Išimame *C*

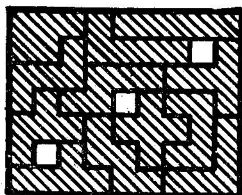
Dabar visos riekutės apskrudintos ir apteptos sviestu, bet riekutė *A* liko tosteryje. Net laikant, kad visoms operacijoms užbaigti riekutė *A* turi būti išimta iš tosterio, vis tiek bendras laikas sudarys tik 114 sekundžių.

Šio sprendimo autorius pastebi, kad galima naudingai leisti laiką, suvalgant jau paruoštą riekutę *B*, kol *A* baigs apskrusti.

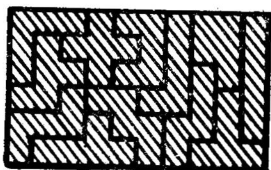
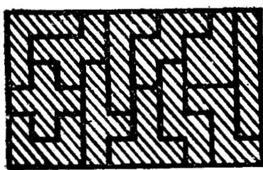
3. 38 paveiksle parodyta, kaip į dvi dalis reikia perkirpti stačiakampį 6×10, sudarytą iš 12 pentamino elementų, kad iš tų dalių būtų galima sudėti stačiakampį 7×9, turintį tris kvadratinius plyšius. 39 paveiksle pavaizduoti du stačiakampiai, sudaryti iš pentamino elementų, kurių kiekvienas turi bendrą atkarpą su kuria nors stačiakampio kraštine. Jokių kitų sudėjimo būdų aš nežinau. Dešinysis stačiakampis nepaprastas tuo, kad jį galima perpjauti į dvi lygias dalis (prisiminkite, kaip perpjovėme stačiakampį anksčiau pateiktame uždavinyje apie pentamino).

4. Žmogus pakyla į aukštą kalną ir, pabuvęs keletą dienų jo viršūnėje, leidžiasi žemyn. Ar ant tako bus toks taškas, kurį abu kartus jis praeina tuo pačiu paros me-





38 pav. Kaip stačiakampį 6×10, sudarytą iš pentamino, paversti stačiakampiu 7×9 su trimis plyšiais

39 pav. Visi pentamino elementai stačiakampiuose 6×10 liečia ribas

tu? Mano dėmesį į šį uždavinį atkreipė psichologas iš Oregono universiteto R. Chaimanas, kuris savo ruožtu jį rado vokiečių psichologo Dunkerio monografijoje „Apie uždavinių sprendimą“. Dunkeris rašo, kad jis pats negalėjo išspręsti uždavinio ir su pasitenkinimu pažymi, kad niekas iš tų, kam jis pasiūlė, jo taip pat neišsprendė. Toliau Dunkeris kalba apie tai, kad uždavinio sprendimas aiškinamas įvairiai, bet, jo nuomone, „suprantamiausias yra toks aiškinimas. Sakykim, tą pačią dieną kalno taku eina du žmonės: vienas jų kyla į viršų, o antras leidžiasi žemyn. Jie būtinai turi susitikti. Iš čia, kaip patys suprantate, išplaukia, kad... taip traktuojant, uždavinio prasmė iš karto paaiškėja“.

5. A. Koks skaičius atitinka raidžių junginį OODDF, jeigu jis yra kvadratinė šaknis skaičiaus, kuris su tomis pačiomis reikšmėmis rašomas žodžiu WONDERFUL? Pradėsime nuo raidės O. Visų pirma, O negali būti skaitmeniu, didesniu už 2; priešingu atveju skaičius $(OODDF)^2$ būtų dešimtženklis, o tuo tarpu žodžio WONDERFUL raidžių skaičius lygus devyniems. Raidė O vienetu taip pat negali būti todėl, kad vienetas negali būti antroje vietoje, rašant skaičiaus, prasidedančio dviem vienetais (11), kvadratą. Iš šių samprotavimų išplaukia, kad raidę O atitinka skaitmuo 2.

Skaičius, parašytas žodžiu WONDERFUL yra tarp $(22\,000)^2$ ir $(23\,000)^2$. Skaičiaus 22 kvadratas lygus 484, o skaičiaus 23 kvadratas lygus 529. Žinant, kad raidė O atitinka skaitmenį 2, galima iš karto pasakyti, kad WO==52.

Kokie dar turi būti nežinomi skaitmenys skaičiuje 22DDF, kad jo kvadratas būtų lygus 52NDERFUL? Skai-

čiaus 229 kvadratas lygus 52 441; skaičiaus 228 kvadratas lygus 51 984. Vadinasi, OODD lygu arba 2299, arba 2288.

Pritaikysime dabar vieną gudrų būdą: įvesime skaitmeninės šaknies sąvoką. Skaičiaus WONDERFUL devynių skaitmenų (tarp jų, kaip mums žinoma, nėra nulio) suma lygi 45; savo ruožtu skaičiaus 45 skaitmenų suma lygi 9 — jo skaitmeninei šakniai. Traukiant kvadratinę šaknį iš skaičiaus WONDERFUL, gaunamas skaičius, kurio skaitmeninę šaknį pakėlus kvadratu turi būti gautas tam tikras skaičius, kurio skaitmeninė šaknis lygi 9. Šį reikalavimą patenkina iš viso tik trys skaitmeninės šaknys: 3, 6, 9; viena jų ir turi būti skaičiaus OODDF skaitmeninė šaknis.

Raidė F negali reikšti 1,5 arba 6 todėl, kad šių skaitmenų kvadratai atitinkamai lygūs 1, 25, 36 ir žodis WONDERFUL baigtųsi raide F, o ne L. Iš visų skaičių, esančių tarp 2299F ir 2288F, tik trys skaičiai — 22 998, 22 884 ir 22 887 — turi išvardytas skaitmenines šaknis, patenkinančias aukščiau suformuluotą sąlygą.

Pakėlę kvadratu kiekvieną iš trijų skaičių kandidatų, įsitikinsime, kad tik vienu atveju rezultatas sudarytas iš skirtingų skaitmenų ir, vadinasi, atitinka žodį WONDERFUL.

B. Uždavinį spręsti bus žymiai lengviau, jeigu pastebėsime štai ką.

Išdėstę devynių langelių kvadrate devynis skaitmenis taip, kad juos galėtume apeiti bokštu, nelyginius skaitmenis būtinai turime išdėstyti centriniame ir keturiuose kampiniuose langeliuose.

Įsivaizduokime, kad kvadratas išpjautas iš šachmatų lentos taip, kad centrinis langelis — juodas. Aišku, kad juodų langelių vienu daugiau, negu baltų, ir todėl, apeinant skaitmenis, pradedama ir baigiama juodais langeliais, t. y. visus baltus langelius užima lyginiai skaitmenys.

Keturis lyginius skaitmenis galima išdėstyti baltuose kvadratėliuose dvidešimt keturiais skirtingais būdais; iš jų aštuonis galima iš karto atmesti, nes gaunami kvadratai, kuriuose skaitmenys 2 ir 4 yra ne gretimuose įstrižainės langeliuose, o kas antrame vienoje vertikalėje arba horizontalėje. Tokiuose kvadratuose apeiti bokštu iš eilės visų skaitmenų neįmanoma.

40 pav. Universalus kvadratas, turintis dvi reikalaujamas savybes

Belieka patikrinti dar 16 variantų. Tai padaryti galima gana greitai, pastebėjus, kad ieškomame kvadrate dešiniojo stulpelio dviejų viršutinių skaitmenų suma turi būti didesnė, o kairiojo — mažesnė už 10. Antrasis teiginys teisingas todėl, kad vienas iš dviejų vidurinio stulpelio viršutinių skaitmenų yra lyginis, kitas — nelyginis, o jų suma lyginė. Taip gali būti tada, kai, sumuojant dešiniojo stulpelio du viršutinius skaitmenis, į vidurinį stulpelį perkeliamas vienetas, t. y. kai dešiniojo stulpelio dviejų viršutinių skaitmenų suma daugiau kaip 10. Atmetę visus kvadratus, nepatenkinančius šios sąlygos, gausime vieną vienintelį kvadratą, kuriame skaičius, esąs apatinėje eilutėje, lygus dviejų viršutinių skaičių sumai. Šis kvadratas ir visų skaitmenų apėjimo bokštu būdas parodyti 40 paveiksle.

Šiam sprendimui pasirodžius žurnalo *Scientific American* puslapiuose, gavau du laiškus; juose pasiūlytas būdas, kaip galima žymiai greičiau rasti atsakymą. Mūsų kvadrate galimi tik trys iš esmės skirtingi būdai, kaip bokštu apeiti visus skaitmenis (apėjimo keliai, pereinantys vienas į kitą posūkiu ir atspindžiu, laikomi vienodais): pirmasis kelias parodytas 40 paveiksle, antrasis yra spiralės, kuri prasideda kampiniame langelyje, paeiliui eina lygiagrečiai trims kraštinėms ir baigiasi centriniame kvadratėlyje, formos ir galiausiai trečiasis kelias primena raidę S (jo pirmasis ir paskutinysis langelis yra tos pačios įstrižainės galuose). Kiekvieną kelią galima nueiti dviem skirtingomis kryptimis (nuo „pradžios" iki „galo" ir atvirkščiai), todėl iš viso gauname šešis skirtingus apėjimo variantus. Dabar reikia pažiūrėti, į ką pereina kiekvienas šių šešių kvadratų posūkiu arba atspindžiu veidrodyje. Peržiūrėję visus variantus, greitai rasime ieškomąjį kvadratą, kuris, pasirodo, yra vienintelis.

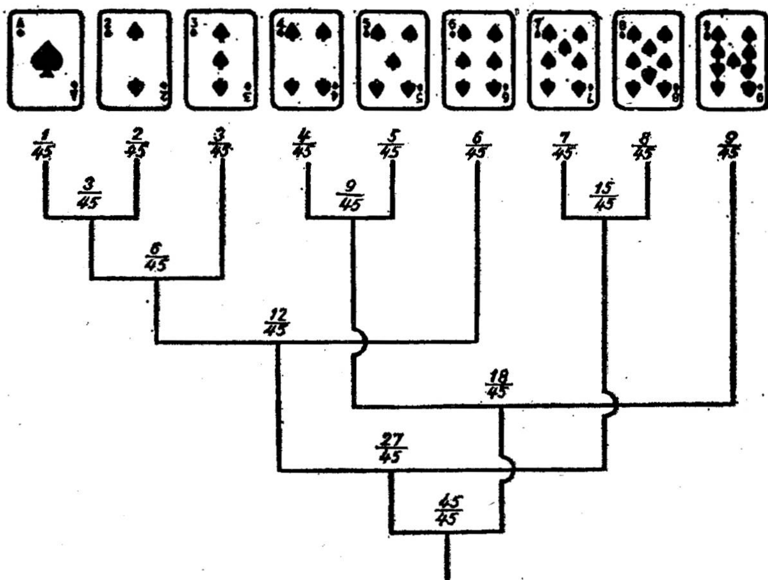
Pastebėsime, kad, atspindėjus sprendimą veidrodyje, naujame kvadrate išsidėstę skaitmenys taip pat bus apeinami bokštu didėjimo arba mažėjimo tvarka; iš viršutinės eilutės atėmę vidurinę, gausime skaičių, esantį apatinėje eilutėje.

Galimi dar trys sprendimai, kuriuose skaitmenys nuo 1 iki 9 iš eilės susieti ne bokšto, o valdovės ėjimu. Galima pagrįstai manyti, kad kitų panašaus pobūdžio sprendimų nėra.

6. Kantas tikslų laiką nustatė taip. Išeidamas iš namų, jis užvedė sieninį laikrodį, todėl, grįžęs ir pažvelgęs į ciferblatą, iš karto suprato, kiek laiko nebuvo namuose. Kantas tiksliai žinojo, kiek valandų praleido pas Šmitą, nes, atėjęs į svečius ir išeidamas namo, žvilgtelėjo į laikrodį prieškambaryje. Šį laiką Kantas atėmė iš viso laiko, kurį nebuvo namuose, ir taip nustatė, kiek laiko jis sugaišo, eidamas ten ir atgal. Kadangi abu kartus jis ėjo tuo pačiu keliu vienodu greičiu, tai kelyje į vieną galą užtruko lygiai pusę apskaičiuoto laiko. Taip Kantas tiksliai apskaičiavo sugrįžimo į namus laiką.

Vienas skaitytojas pasiūlė kitą sprendimą. Jis parašė, kad Šmitas buvo ne tik Kanto draugas, bet ir laikrodininkas. Taigi jam buvo nesunku, maloniai šnekučiuojantis, pataisyti draugui laikrodį.

7. Visų pirma surašysime iš eilės visų devynių verčių nuo tūzo iki devynakės kortų pasirodymo tikimybes: 1/45, 2/45, 3/45... Sudėję dvi mažiausias tikimybes, gausime naujo įvykio tikimybę 1/45+2/45=3/45, kad ištraukta korta bus tūzas arba dviakė. Taip sujungus tūzą ir dviakes, belieka aštuoni elementarūs įvykiai: ištraukta korta gali būti tūzas arba dviakė (vienas įvykis), taip pat triakė, keturakė ir t. t. iki devynių. Dar kartą sujunkime du įvykius su mažiausiomis tikimybėmis: tikimybė, kad ištraukta korta bus tūzas arba dviakė, lygi 3/45, ir su tokia pat tikimybe ištrauktoji korta bus triakė. Naujo elementaraus įvykio, kad iš kaladės ištraukta korta bus tūzas, dviakė arba triakė, tikimybė lygi 6/45. Ši tikimybė didesnė už keturakės arba penkakės pasirodymo tikimybę, todėl dvi pastarosios tikimybės bus mažiausios, ir, jas sudėję, gausime tikimybę naujo įvykio, kad pasirodys arba ketu-



41 pav. Būdas, kuriuo iki minimumo galima sumažinti klausimų skaičių, atspėjant vieną iš daiktų, kurių pasirodymo tikimybės duotos. Atsakyti į klausimus galima tik žodžiais „taip" arba „ne"

rakė, arba penkakė (tikimybė lygi 9/45). Taip reikia dėti visas tikimybes tol, kol liks iš viso vienas elementas su tikimybe 45/45 arba 1. Iš 41 paveikslo aišku, kaip elementai derinami vienas su kitu. Norint, kad klausimų būtų kuo mažiau, reikia įsivaizduoti, kad kortos išdėstytos pagal 41 paveikslo schemą, ir pateikti klausimus tvarka, priešinga schemos sudarymo tvarkai. Tai ir bus ieškomoji strategija. Paaiškinsime pavyzdžiu, kaip naudotis schema. Pirmas klausimas turi būti toks: ar yra pasirinkta korta tarp keturakių, penkakių ir devynakių? Jeigu atsakymas bus neigiamas, pateikite tokį klausimą: ar yra ta korta tarp septynakių ir aštuonakių? Klausimus kelkite tol, kol atspėsite kortą.

Pasirinkę tūzą arba dviakę, atspėti galite penkiais klausimais. Pasirinkę „dichotominę" strategiją (kiekvienu klausimu dalydami visus elementus į dvi maždaug ly-

gių galių aibes), sumažinsite būtiną klausimų skaičių iki keturių, o kai kurias kortas galėsite atspėti, pateikę iš viso tris klausimus. Tačiau, kai kortų yra labai daug, pagal parašytą schemą klausimų galima pateikti mažiau, negu paprastai dalijant visą elementų aibę pusiau, be to, šis klausimų skaičius yra kartu ir mažiausiai galimas. Kai yra devynios kortos, mažiausias klausimų skaičius lygus trims.

Šis minimumas apskaičiuojamas taip. Norėdami atspėti tūzą, turėsite pateikti penkis klausimus. Tiek pat klausimų prireiks, pasirinkus dviakę, bet jos yra dvi, todėl iš viso bus dešimt klausimų. Norint atspėti triakę, reikia pateikti keturis klausimus. Kadangi yra trys triakės, reikia dvylikos klausimų (3×4=12). Iš viso 45 kortoms susidaro 135 klausimai, vidutiniškai po tris klausimus vienai kortai.

Aprašytąją strategiją pirmasis atrado D. Chufmanas. Šis uždavinys populiariai išdėstytas Dž. Pirso knygoje.*

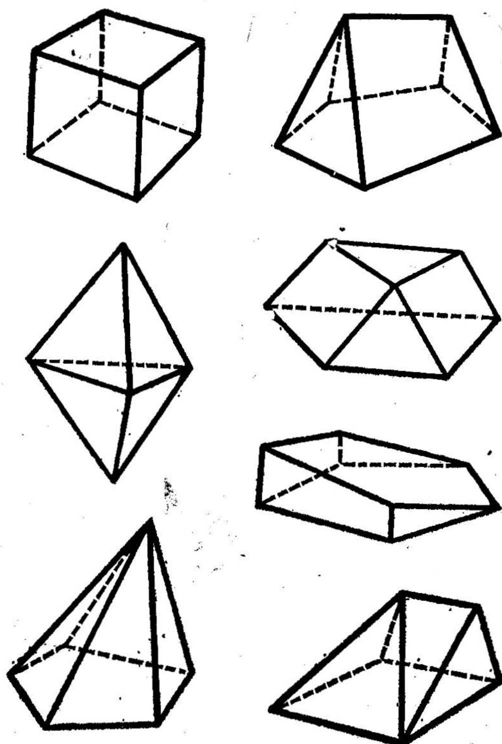
8. Baltieji vieninteliu būdu gali nepaskelbti mato juodajam karaliui: perėjus bokštu iš laukelio g6 į laukelį c6. Tiesa, tuo ėjimu juodajam karaliui skelbiamas šachas, bet juodieji išvengs pavojaus, bokštu (b2) nukirtę baltąjį rikį (h7).

Išspausdinę šį uždavinį žurnale *Scientific American*, gavome dešimtis laiškų, kurių autoriai nurodė, kad pavaizduota pozicija susidaryti negali, nes du baltieji rikiai negali užimti tos pačios spalvos langelių. Tiems, kas yra tos pačios nuomonės, primenu, kad pėstininką, pasiekusį paskutinę eilę, galima pakeisti bet kokia figūra, ne vien valdove. Lentoje trūksta dviejų baltųjų pėstininkų, todėl aišku, kad vienas jų pakeistas rikiu.

Žinoma nemažai atvejų, kai meistrai pėstininką pakeisdavo žirgu, bet rikiu pėstininkas pakeičiamas nedažnai. Tačiau galima įsivaizduoti situacijas, kai toks pakeitimas labai pageidautinas, pavyzdžiui tam, kad nebūtų duotas matas varžovui. Gali būti ir taip, kad baltieji gudriai sugalvojo paskelbti matą valdove arba rikiu. Nei

---

* Дж. Пирс. Символы, сигналы и шумы. М., изд-во «Мир», 1967.



42 pav. Septyni iškiliųjų šešiasienių tipai

vienos, nei kitos figūros lentoje nėra, bet vieną jų galima pastatyti vietoj pėstininko. Baltiesiems pėstininką pakeitus valdove, varžovas nedelsdamas ją nukerta juodųjų bokštu, o šį nukirs baltųjų žirgas, taigi baltieji paliks be nieko. Bet jeigu ant lentos sugrįš baltųjų rikis, labai įtikėtina, kad varžovas nepanorės už rikį aukoti bokštą, ir rikis galės įsijungti į žaidimą.

9. 42 paveiksle pavaizduoti septyni tipai iškiliųjų šešiasienių, kurių briaunos sudaro topologiškai skirtingus karkasus. Paprasto įrodymo, kad kiti modeliai negalimi, aš nežinau.

Baigtinių skirtumų apskaičiavimas

Nelabai žinoma, bet kartkartėmis labai naudinga matematikos atšaka — baigtinių skirtumų apskaičiavimas — yra tarpinė grandis tarp elementarinės algebros ir matematinės analizės.

Žinomas matematikas V. V. Sojeris baigtinių skirtumų apskaičiavimo paskaitų kursą, kurį jis skaitė Vesliano universitete (Konektikuto valstija), paprastai pradėdavo... mįslių įminimu.

Priešingai tradicijai, paprašykite ką nors užminti ne skaičių, o formulę. Fokusą parodyti lengviau, jeigu jūsų partneris pasako kokį nors kvadratinį trinarį (reiškinį, neturintį už x^2 aukštesnio x laipsnio). Tarkime, kad sugalvotas reiškinys $5x^2+3x-7$. Nusisukę nuo žiūrovų, paprašykite juos vietoje x įrašyti skaičius 0, 1, 2 ir pranešti jums, kam lygus visas reiškinys su tomis x reikšmėmis. Tarkime, jog žiūrovai praneša tris skaičius: -7, 1, 19. Jūs mikliai popieriuje apskaičiuojate (pasipraktikavę, visus reikalingus apskaičiavimus išmoksite atlikti ir mintinai) ir pasakote užmintą kvadratinį trinarį!

Įminta labai paprastai. Tris paskelbtus skaičius surašykite į vieną eilutę. Kitoje eilutėje surašykite gretimų skaičių skirtumus (kiekvieną kartą reikia iš dešiniojo skaičiaus atimti kairįjį). Trečiojoje eilutėje surašykite antrosios eilutės skaičių skirtumus. Lapelyje bus šitoks užrašas:

$$\begin{array}{ccccc} -7 & & 1 & & 19 \\ & 8 & & 18 & \\ & & 10 & & \end{array}$$

Užmintame reiškinyje koeficientas x^2 visada lygus pusei apatinio skaičiaus. Koeficientas x gaunamas iš vidurinės eilutės pirmojo skaičiaus atėmus pusę apatinės eilutės skaičiaus, o laisvasis narys tiesiog lygus pirmosios eilutės pirmajam skaičiui. Veiksmai, kuriuos ką tik atlikote, analogiški integravimui. Jeigu y lygus užminto reiškinio reikšmei, tas reiškinys apibrėžia mums y kaip x funkciją. Tarkime, pavyzdžiui, kad x įgyja reikšmes, sudarančias aritmetinę progresiją (0, 1, 2, ...); tuomet y įgis reikšmių eilutę $(-7, 1, 19, ...)$. Tokios eilutės ir yra

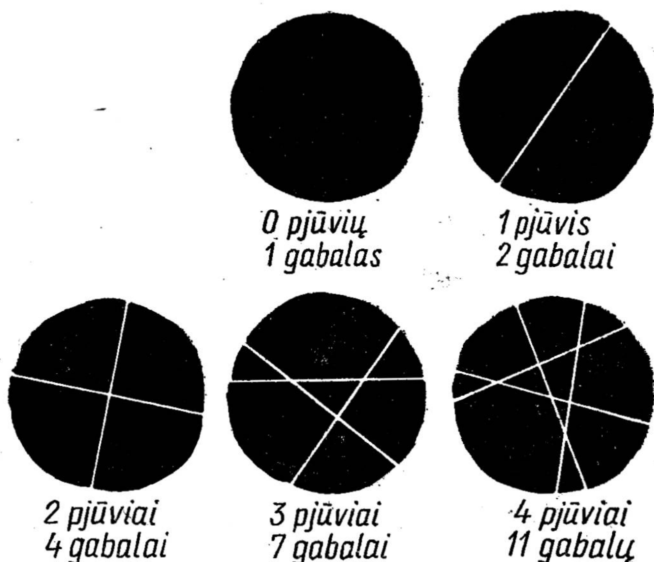
baigtinių skirtumų apskaičiavimo objektas. Fokuse, išnagrinėtame skyriaus pradžioje, jūs, remdamiesi labai paprastu metodu, trimis nariais atstatėte eilutės generuojančią (kvadratinę) funkciją.

Baigtinių skirtumų apskaičiavimas atsirado XVIII amžiuje (1715—1717 metais), kai anglų matematikas Brukas Teiloras (jo garbei matematinėje analizėje pavadinta „Teiloro eilutė") parašė traktatą „Baigtinių pokyčių metodu". Pirmas išsamus darbas ta tema, parašytas angliškai, buvo paskelbtas 1860 metais. Jį parašė Džonas Bulis, žinomas simbolinės logikos tyrinėjimais. XIX amžiuje algebros vadovėliuose buvo skelbiamos tik ribotos žinios apie baigtinių skirtumų apskaičiavimą, po to baigtinių skirtumų apskaičiavimas ir visai išėjo iš mados; jo metodus toliau taikė tik draudimo draugijos savo lentelėms tikrinti ir kada ne kada mokslininkai — skaitinei interpoliacijai arba funkcijos išraiškai išaiškinti, remiantis keliomis skaitinėmis jos reikšmėmis. Dabar baigtinių skirtumų apskaičiavimas tapo galingu statistikos bei socialinių mokslų metodu.

Tie, kurie domisi įdomiąja matematika, pastebės labai didelę daugelio elementarių baigtinių skirtumų apskaičiavimo metodų naudą. Pažiūrėsime, pavyzdžiui, kaip jie pritaikomi, sprendžiant seną apvalaus pyrago suraikymo uždavinį. Į kiek daugiausia dalių galima padalyti apvalų pyragą *n* pjūviais, kurių kiekvienas kerta visus kitus? Be abejo, ieškomasis skaičius yra *n* funkcija; jeigu ši funkcija nėra per daug sudėtinga, ją galima rasti empiriškai, skirtuminiu metodu.

Visai neraikant pyrago, gaunamas vienas gabalas; vienu pjūviu gaunami du gabalai, dviem pjūviais — keturi gabalai ir t. t. Bandymų ir klaidų metodu nesunku apskaičiuoti keletą pirmųjų eilutės narių: 1, 2, 4, 7, 11, ... (43 pav.). Apskaičiuokite šių skaičių skirtumus, paskui skirtumų skirtumus ir t. t., išdėstydami juos eilutėmis, kaip ir prieš tai pateiktame pavyzdyje. Kiekvienas sekančios eilutės skaičius turi būti lygus skirtumui dviejų greta esančių skaičių, surašytų prieš tai esančioje eilutėje:

Pjūvių skaičius	0	1	2	3	4
Gabalų skaičius	1	2	4	7	11
Pirmieji skirtumai	1	2	3	4	
Antrieji skirtumai	1	1	1		



43 pav. Apvalaus pyrago supjaustymo uždavinys

Kai pradinės eilutės generuojanti funkcija tiesinė, visi pirmieji skirtumai tarpusavyje lygūs, o kai kvadratinė, — tarpusavyje lygūs antrieji skirtumai. Kubinis reiškinys (reiškinys, turintis už x^3 neaukštesnį x laipsnį) turės lygius trečiuosius skirtumus ir t. t. Kitaip sakant, iš skirtumų sudarytų eilučių skaičius turi būti lygus funkcijos eilei. Kai skirtumai pradeda sutapti tik dešimtoje eilutėje, aišku, kad pradinės eilutės generuojanti funkcija turi x^{10}. Mūsų pavyzdžio schema turi tik dvi eilutes, todėl funkcija x atžvilgiu kvadratinė; ją galima rasti tuo pačiu paprastu metodu, kurį taikėme „minčių skaitymo" fokuse.

Kaip suraikyti pyragą? Šį uždavinį galima interpretuoti dvejopai. Pirma, jį galima suprasti kaip grynosios geometrijos abstraktų uždavinį (idealaus skritulio susikirtimas su idealiomis tiesėmis); antra vertus — jį galima nagrinėti taikomosios geometrijos požiūriu (tikrą pyragą suraikyti tikru peiliu).

Fizikoje daug pavyzdžių, kai vieną ir tą patį reiškinį galima nagrinėti ir abstrakčiai, teoriškai, ir eksperimentuojant. Fizikoje neretai pasitaiko, kad sudėtingos formulės atsiranda, eksperimentinius rezultatus apdorojant skirtuminiais metodais.

Išnagrinėsime garsiąją kvadratinę formulę, kuri parodo atomo apvalkalo numerio ir maksimalaus elektronų skaičiaus, galinčio jį sudaryti (t. y. užpildyti skaičiais), ryšį. Tolstant nuo branduolio elektronų, reikalingų apvalkalui užpildyti, skaičius auga ir įgyja tokias reikšmes: 0, 2, 8, 18, 32, 50, ... Pirmųjų skirtumų eilutė atrodo taip: 2, 6, 10, 14, 18, ... ; antrųjų skirtumų eilutė 4, 4, 4, 4, ... Su tais skaičiais atlikdami tuos pačius, kaip ir fokuse, veiksmus, gausime paprastą n-tojo apvalkalo užpildymo skaičiaus formulę $2n^2$.

Kyla klausimas: ką daryti, kai funkcija aukštesnės, negu kvadratas, eilės? Šiuo atveju galima pritaikyti Niutono formulę, tinkančią bet kokiam eilučių skaičiui schemoje.

Niutono formulėje suprantama, kad eilutė prasideda tokia funkcijos reikšme, kurią ji įgyja, kai $n=0$. Pažymėsime šį skaičių a. Skaičių, kuriuo pradedama pirmųjų skirtumų eilutė, pažymėsime raide b; pirmąjį antrųjų skirtumų skaičių pažymėsime raide c ir t. t. Tuomet pradinės eilutės n-tojo nario formulė turės išraišką

$$a+bn+\frac{cn(n-1)}{2}+\frac{dn(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}+$$
$$+\frac{en(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots.$$

Formulė tęsiama tol, kol visi tolesni nariai nepasidaro lygūs nuliui. Pavyzdžiui, pritaikant ją pyrago raikymo uždaviniui, reikia paimti $a=1$, $b=1$, $c=1$ (visi kiti formulės nariai virsta nuliais, nes visos eilutės, esančios žemiau antrosios, — jos net ir nesurašytos — sudarytos iš vienų nulių, t. y. tuo atveju koeficientai d, e, f ... lygūs nuliui). Taigi gauname kvadratinę funkciją $\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1$.

Ar tai reiškia, kad drauge gauname formulę maksimaliam gabalų, į kuriuos galima padalyti pyragą, atliekant n pjūvių, skaičiui nustatyti? Gaila, bet į šį klausimą galima atsakyti tik: „Reikia tikėtis, taip“.

Jūs, tikriausiai, susidomėsite, kodėl toks netvirtas atsakymas. Taip yra dėl to, kad bet kokiai baigtinei skaičių eilutei egzistuoja be galo daug generuojančių funkcijų. (Šis teiginys ekvivalentus kitam, labiau suprantamam: per bet kokį baigtinį skaičių taškų galima nubrėžti begalinę aibę kreivių.) Išnagrinėsime, pavyzdžiui, eilutę

0, 1, 2, 3, ... Koks sekantis narys? Vienas iš teisingų atsakymų bus — keturi. Iš tikrųjų, pritaikę ką tik išaiškintą metodą, nustatysime, kad visi pirmieji skirtumai lygūs 1 ir pagal Niutono formulę eilutės n-tasis narys tiesiog lygus n. Tuo tarpu pagal kitą formulę

$$n+\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

gausime eilutę, kurios kiekvienas pirmųjų keturių narių taip pat bus lygus savo numeriui n, o visi kiti nariai, pradedant penktuoju, skirsis nuo n. Apskaičiavę pagal antrąją formulę keletą pirmųjų narių, gausime 0, 1, 2, 3, 5, 10, 21, ...

Minėtų dviejų eilučių situacija labai panaši į mokslo dėsnių atradimus. Taikant skirtuminį metodą, galima analizuoti fizikinius reiškinius ir spėlioti tuos dėsnius, kuriems jie paklūsta. Sakykim, pavyzdžiui, koks nors fizikas pirmasis tiria kūnų kritimo dėsnius. Jis mato, jog akmuo per pirmąją sekundę nukrenta 16 pėdų, per antrąją — 64 pėdas ir t. t. Savo stebėjimus jis užrašo schemiškai:

0 16 64 144 256
16 48 80 112
32 32 32

Aišku, realūs matavimai neišvengiamai turės paklaidas, todėl apatinės eilutės skaičiai šiek tiek skirsis nuo 32. Kadangi tas skirtumas nedidelis, fizikas priima hipotezę, kad sekanti eilutė sudaryta vien tik iš nulių. Tuomet pagal Niutono formulę gaunama, kad per n sekundžių akmuo nuskriejo atstumą, lygų $16n^2$ pėdų. Tačiau formulė $16n^2$ nepaaiškina paties kritimo dėsnio; mums kol kas pasisekė gauti paprasčiausią funkciją, kuria remdamiesi, galime aprašyti baigtinę atliktų stebėjimų eilę. Kitaip sakant, nubrėžėme žemiausios eilės kreivę per baigtinį eksperimentinių taškų skaičių. Didindami stebėjimų skaičių, aišku, pastebėsime, kad antrasis dėsnis vis labiau pasitvirtina, bet niekada negalima tikėtis, kad nauji stebėjimai nepateiks kokių nors esminių pataisų.

Grįždamas prie pyrago raikymo uždavinio, noriu pabrėžti, kad jis labai panašus į aukščiau išnagrinėtą pavyzdį, nors jame vietoje realių objektų yra idealios matematinės figūros. Iš visų mums žinomų faktų galime padaryti išvadą, kad, perpjovę pyragą penktą kartą,

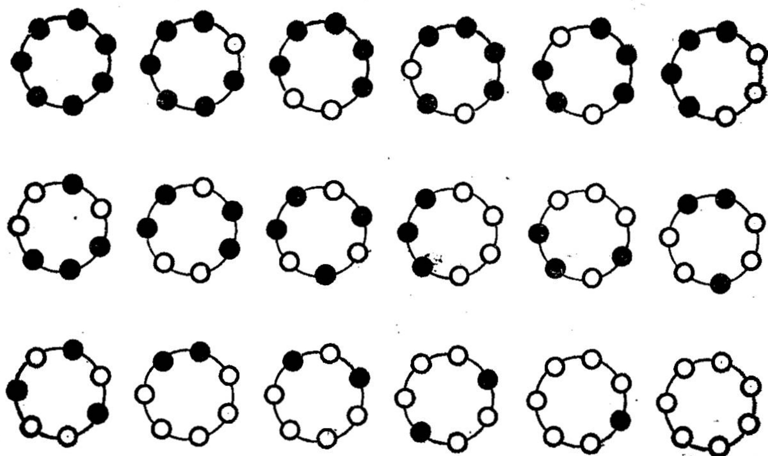
nebūtinai gausime 16 gabalų, kaip skelbia formulė. Viena maža nesėkmė — nesutapimas su iš anksto numatytu rezultatu — tuojau pat parodo, kad formulė neteisinga, tuo tarpu kai kiek norimai didelis (nors ir baigtinis) skaičius sėkmingų bandymų niekuomet negalės galutinai patvirtinti, kad ji teisinga.

D. Poja rašė: „Gamta gali atsakyti ir „ taip", ir „ne", bet vienas atsakymas bus vos girdimas, o kitas nugriaudės lyg perkūnas. Jos „taip" — iš viso tik spėjimas, užtat „ne" visada pagrįstas". Poja turi omenyje visai ne abstrakčius matematinius objektus, o mus supantį realų pasaulį, tačiau jo pažiūros nuostabiai teisingai nušviečia funkcijos išraiškos atgaminimą baigtinių skirtumų metodu. Matematikoje daugelis hipotezių pagrįstos metodais, panašiais į gamtos mokslų induktyvinį metodą; Poja parašė puikią knygą, skirtą matematinėms hipotezėms.

Pavaizdavę popieriuje keletą galimų pyrago suraikymo būdų, pamatysime, kad šešiolika — vis dėlto maksimalus gabalų skaičius, kurį galima gauti penkiais pjūviais. Šiuo atveju pagal formulę gauname teisingą rezultatą, ir tai leidžia tikėtis, kad ji teisinga; tačiau tol, kol ji nebus įrodyta (pyrago raikymo uždaviniui jos įrodymas visai nesudėtingas), formulė liks mums ne daugiau kaip sėkmingas spėjimas. Klausimas, kodėl ir gamtos moksluose, ir matematikoje paprasčiausia formulė pasirodo esanti ir pati geriausia, iki šiol karštai svarstomas gamtos mokslų filosofijoje. Niekas, tiesa, tiksliai nežino, ką reiškia žodžiai „paprasčiausia formulė".

Žinomi dar keli uždaviniai, panašūs į pyrago raikymo uždavinį. Jie taip pat sprendžiami baigtinių skirtumų metodu. Iš pradžių suformuluojamas labiausiai įtikimas spėjimas apie formulės išraišką, paskui deduktyviniu metodu bandoma ją įrodyti. Į kiek daugiausia dalių galima padalyti plokščią pusmėnulį, padarius vienu metu *n* pjūvių? Kiek gabaliukų gausime, *n* plokštumomis vienu metu suraikę vieną ritinio formos keksą? Į kiek dalių padalija plokštumą vienodų spindulių susikertantys apskritimai? Skirtingų spindulių? Kas gaunama, susikirtus skirtingų dydžių elipsėms? Į kiek sričių padalija erdvę susikertančios sferos?

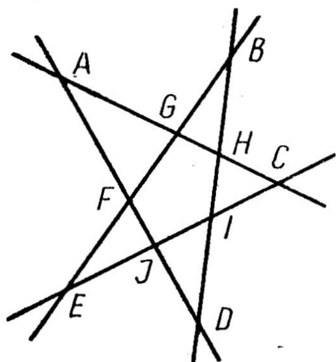
Įdomiosios matematikos kombinatorikos ir kėlinių uždaviniai neretai sprendžiami žemų eilių formulėmis, kurios lengvai atspėjamos baigtinių skirtumų metodu ir tik



44 pav. Kaip suverti septynis dviejų skirtingų spalvų karolius 18 skirtingų būdų, norint gauti 18 skirtingų vėrinių

paskui (ir tai ne visais atvejais) įrodomos. Įsivaizduokite begalinės aibės n skirtingų spalvų dantų šepetukų, iš kurių sudarote plokščius trikampius, komplektą. Trikampiai, sudarą vienas kito veidrodinį atspindį, laikomi skirtingais, o trikampiai, gaunami vienas iš kito posūkių, — vienodais. Kiek skirtingų trikampių galima sudaryti iš dantų šepetukų, kiekvienai trikampio kraštinei paėmus po šepetuką? Tarkime, kad sudarome ne trikampius, o kvadratus. Kiek tuomet gausime skirtingų kvadratų? Kiek gausime skirtingų tetraedrų, kurių kiekviena siena nudažyta vis kitokia spalva, iš viso turėdami n spalvų dažų? (Du tetraedrai laikomi vienodais, kai jų išklotinės, uždėtos viena ant kitos, sutampa vienodų spalvų sienomis.) Kiek panašiomis sąlygomis bus gauta skirtingų kubų?

Kai eilutės generuojanti funkcija nėra daugianaris, tenka remtis kitais skirtuminiais metodais. Pavyzdžiui, funkcija 2^n įvairioms n reikšmėms generuoja eilutę 1, 2, 4, 8, 16, ... Pirmųjų skirtumų eilutė bus tiksliai tokia pati, kaip ir pradinė, todėl aukščiau išnagrinėtas metodas nieko neduoda. Kartais iš pažiūros paprastas uždavinys sukuria eilutę, kuriai niekaip nepavyksta parinkti generuojančios funkcijos. Štai vienas nemalonus pavyzdys iš Henrio Djudenio galvosūkių rinkinio. Uždaras vėrinys



45 pav. Kaip išvesti penkias tieses, norint gauti dešimtį trikampių

sudarytas iš n karoliukų. Kiekvienas karoliukas — arba juodas, arba raudonas. Kiek skirtingų vėrinių galima sudaryti iš n karoliukų? Pirmąjį eilutės narį gausime, kai $n=0$ ir vėrinio iš viso nėra. Apskaičiuodami kitus narius, gauname 0, 2, 3, 4, 6, 8, 13, 18, 30, ... (44 paveiksle pavaizduoti vėriniai, kai $n=$ $=7$). Manau, kad uždaviniui išspręsti reikia dviejų formulių: vienos formulės lyginiams n, antros — nelyginiams, bet aš nieko negaliu pasakyti apie tai, ar galima gauti tas formules baigtinių skirtumų metodu. Djudenis rašė, kad „bendras sprendinys labai sudėtingas, jeigu jis iš viso galimas". Išnagrinėtas uždavinys ekvivalentus tokiam informacijos teorijos klausimui: kiek yra skirtingų derinių („žodžių"), kuriuos galima sudaryti iš duotojo skaičiaus dvejetainės sistemos skaitmenų (deriniai, kuriuose skaitmenys, išdėsčius juos apskritimu ir skaitant iš kairės į dešinę arba iš dešinės į kairę, reiškia tą patį žodį, nelaikomi skirtingais).

Skaitytojai gali patikrinti savo sumanumą paprastesniu uždaviniu. Kiek daugiausia stačiakampių galima sudaryti, nubrėžus n tiesių? 45 paveiksle parodyta, kaip penkiomis tiesėmis sudaryta 10 trikampių. Kiek trikampių galima sudaryti iš šešių tiesių ir kokia bendrosios formulės išraiška?

Iš pradžių tą formulę galima rasti baigtinių skirtumų metodu, paskui, smulkiau išnagrinėjus gautąjį reiškinį, taip pat lengvai galima įrodyti ir tai, kad ji teisinga.

ATSAKYMAI

Taikant Niutono formulę eksperimentiniams duomenims apdoroti, kartais gali pasitaikyti, kad su $n=0$ ji praranda prasmę. Pavyzdžiui, knygoje „Matematiniai galvosūkiai ir pramogos" jau pateikėme maksimalaus

gabalų, į kuriuos galima padalyti riestainį n vienkartiniais plokščiais pjūviais, skaičiaus formulę. Formulė pasirodė esanti kubinė

$$\frac{n^3+3n^2+8n}{6}$$

ir gaunama pagal Niutono formulę iš eksperimentinių rezultatų, tačiau kai $n=0$, ji netaikoma. Kai riestainis visai nepjaustytas, turime vieną gabalą, o pagal formulę neturi būti nė vieno. Norėdami taikyti formulę visiems n, „gabalą" turėsite apibrėžti kaip riestainio dalį, kuri gaunama, supjausčius jį. Tais atvejais, kai formulė nepritaikoma, kada $n=0$, reikia atlikti atvirkštinę ekstrapoliaciją ir nuliui priskirti tokią funkcijos reikšmę, kuriai skirtumų lentelės paskutinės eilutės pirmasis narys įgytų reikiamą reikšmę.

Įrodysime aukščiau pateiktą maksimalaus gabalų, į kuriuos galima n pjūviais padalyti apvalų pyragą, skaičiaus formulę. Pirmiausia pastebėsime, kad n-toji linija perkerta $(n-1)$ liniją, kuriomis plokštuma padalyta į n dalių. Kai n-toji linija eina per tas n dalių, kiekvieną dalį ji padalija vėl į dvi dalis, ir sričių padaugėja n vienetų. Iš pradžių yra vienas gabalas, kuris po pirmo pjūvio suskyla į du; antras pjūvis šį skaičių dar 2 gabalais padidina; po trečio pjūvio padaugėja trimis gabalais ir t. t. iki tol, kol po n-tojo pjūvio gabalų skaičius nepadidės n. Sudėdami visus tuos skaičius, gauname $1+1+2+3+\ldots+n$. Pradedant antruoju nariu, tai aritmetinė progresija $(1+2+3+\ldots+n)$, kurios suma lygi $\frac{1}{2}n(n-1)$. Pridėję prie šio reiškinio vienetą, gauname galutinę formulę.

Žemiau pateiktą uždavinį apie vėrinį išsprendė jau minėtas Solomonas V. Golombas. Prisiminsime uždavinio sąlygą: nustatyti, kiek skirtingų vėrinių galima sudaryti iš n karoliukų, kai kiekvienas karoliukas nudažytas viena iš dviejų spalvų ir vėriniai, gauti vienas iš kito pasukimu arba veidrodiniu atspindžiu, nelaikomi skirtingais. Žvilgtelėję į formulę, įsitikinsite, kad pagal sudėtingumą ji toli išeina už baigtinių skirtumų paprasto metodo rėmų.

Skaičiaus n daliklius (įskaitant 1 ir n) pažymėsime raidėmis d_1, d_2, d_3, ...Kiekvienam dalikliui rasime vadinamą Oilerio fi-funkciją, kuri žymima $\varphi(d)$. Ji lygi skaičiui sveikų skaičių, neviršijančių d ir neturinčių su

d bendro daliklio. Vienetas laikomas vienu iš tokių skaičių, o pats d — ne. Pavyzdžiui, $\varphi(8)$ lygi 4, nes yra keturi sveikieji skaičiai, neviršijantys 8 ir neturintys su 8 nė vieno bendro daliklio. Pagal apibrėžimą $\varphi(1)=1$. Oilerio φ— funkcijos reikšmės skaičiams 2, 3, 4, 5, 6, 7 atitinkamai lygios 1, 2, 2, 4, 2, 6. Pažymėję skirtingų spalvų, kuriomis gali būti nudažytas karoliukas, skaičių a, gautume formulę

$$\frac{1}{2n}\left[\varphi(d_1)\cdot a^{\frac{n}{d_1}}+\varphi(d_2)\cdot a_2^{\frac{n}{d_2}}+\ldots+n\cdot a^{\frac{n+1}{2}}\right],$$

pagal kurią apskaičiuojama, kiek skirtingų vėrinių galima sudaryti iš n karoliukų, kai n nelyginis. Formulė lyginiam n bus tokia:

$$\frac{1}{2n}\left[\varphi(d_1)\cdot a^{\frac{n}{d_1}}+\varphi(d_2)\cdot a^{\frac{n}{d_2}}+\ldots+\frac{n}{2}\ (1+a)\cdot a^{\frac{n}{2}}\right].$$

Pateiktosios formulės yra sprendiniai kur kas bendresnio uždavinio, negu tas, kurį pasiūliau tekste, nes jos teisingos bet kokiam karoliukų spalvų skaičiui.

Djudenio knygoje „Įdomieji uždaviniai ir galvosūkiai" paskelbtas 275 uždavinys apie karoliukus. Tą patį uždavinį mini Riordanas.*

Jis parodo, kaip uždavinį spręsti, bet nepateikia galutinių formulių**. Vėliau šį uždavinį smulkiai išgvildeno E. Hilbertas ir Dž. Riordanas, suradę daug žaismingų jo pritaikymų muzikos ir perjungiklių teorijoje. ***

Hilbertas ir Riordanas apskaičiavo, kiek skirtingų vėrinių galima suverti iš dviejų spalvų karoliukų, jų skaičiui svyruojant nuo vieno iki dvidešimties. Jų apskaičiavimų rezultatai pateikti lentelėje:

Karoliukų skaičius	Vėrinių skaičius
1	2
2	3
3	4
4	6
5	8
6	13

* Дж. Риордан. Введение в комбинаторный анализ. М., ИЛ. 1963, p. 192—193.

** Žr. taip pat *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 5, Nr. 4, 1957, p. 232—234.

*** *Illinois Journal of Mathematics*, 5, Nr. 4, 1961, p. 657—665.

Karoliukų skaičius	Vėrinių skaičius
7	18
8	30
9	46
10	78
11	126
12	224
13	380
14	687
15	1224
16	2250
17	4112
18	7685
19	14310
20	27012

Tarp kitko, formulės uždaviniui apie karoliukus egzistavimas visai nereiškia, kad Djudenis klydo, laikydamas, jog sprendinio nėra. Jis tiesiog turėjo galvoje, kad negalima rasti tokio kintamojo n daugianario, kuris duotų reikalingą skaičių iš karto, neskaičiuojant kelių pirmųjų reikšmių. Reikalas tas, kad formulėje yra Oilerio funkcija φ, ir dėl to vėrinių skaičių tenka apskaičiuoti rekurentiškai. Djudenis nelabai tiksliai formuluoja savo mintį, tačiau rekurentinių formulių jis nelaiko „sprendiniais". Baigtinių skirtumų metodas bet kokiu atveju netaikomas išnagrinėtam uždaviniui, ir jam žinomi tik rekurentiniai sąryšiai.

Daugelis skaitytojų pastebėjo, kad, kai karoliukų skaičius lygus kokiam nors pirminiam skaičiui (nelygiam 2), skirtingų vėrinių skaičiaus formulė gerokai supaprastėja:

$$\frac{2^{n-1}-1}{2}+2^{\frac{n-1}{2}}+1.$$

Įdomų laišką mums atsiuntė Dž. Hameris, mokyklos direktorius iš Filadelfijos.

Gerbiamoji redakcija!

Aš labai susidomėjęs perskaičiau straipsnį apie baigtinių skirtumų apskaičiavimą, ir man atėjo į galvą, kad dar gerokai prieš susipažindamas su baigtinių skirtumų apskaičiavimu, aš savarankiškai atskleidžiau vieną įdomiausių Niutono formulės pritaikymų: ją pritaikiau laipsnių eilutei. Žaisdamas su skaičiais, pastebėjau, kad parašę kvadratų eilutę 4, 9, 16, 25, 36, 49 ir atėmę skaičius vieną iš kito pagal jūsų rekomendaciją, o gautoje eilutėje atlikę tokią pat atimtį, gausime kažkokį skirtumą, kuris jau nesikeis, ir paskutinės eilutės nariai bus vienodi.

Po to, tą patį atlikęs su kubinėmis eilutėmis ir su eilutėmis, sudarytomis iš natūrinių skaičių ketvirtųjų laipsnių, radau bendrą dėsningumą, kurio esmė tokia: jeigu eilutės laipsnis n, tai, n kartų atėmę, gausite galutinį skirtumą, lygų n! Apie tai papasakojau tėvui, daugelį metų dirbusiam Harvardo koledžo observatorijos direktoriumi ir dėsčiusiam ten matematiką. Jis atsakė: „Žinai, Džonai, juk tu atradai baigtinių skirtumų apskaičiavimą".

Kiek skirtingų trikampių gali susidaryti, susikirtus n tiesių? Vienam trikampiui reikia mažiausia trijų tiesių, keturiomis tiesėmis galima sudaryti keturis trikampius, penkiomis — dešimtį. Baigiant penkiomis tiesėmis, toliau galima trikampių nebeskaičiuoti, o, pritaikius baigtinių skirtumų metodą, sudaryti tokią lentelę:

Tiesių skaičius	0	1	2	3	4	5
Trikampių skaičius	0	0	0	1	4	10
Pirmieji skirtumai	0	0	1	3	6	
Antrieji skirtumai	0	1	2	3		
Tretieji skirtumai	1	1	1			

Tai, kad gavome tris eilutes, liudija, jog generuojanti funkcija yra kubinė n atžvilgiu; pagal Niutono formulę gauname reiškinį $\frac{1}{6}\, n(n-1)\ (n-2)$, kurį atitinka eilutė 0, 0, 0, 1, 4, 10, ..., pateikta lentelėje. Formulė $\frac{1}{6}\, n(n-1)$ $(n-2)$ su didele tikimybe reiškia maksimalų skaičių trikampių, kuriuos galima sudaryti n tiesėmis. Tačiau kol kas tai tik spėjimas, paremtas nesudėtingais apskaičiavimais: ar jis pagrįstas, galima patikrinti samprotaujant taip.

Tieses reikia brėžti taip, kad nė viena jų pora nebūtų lygiagreti, ir kad viename taške susikirstų ne daugiau kaip dvi tiesės. Tuomet visos tiesės tikrai kertasi, o kiekvienas jų trejetas sudaro trikampį. Tos pačios trys tiesės negali sudaryti daugiau kaip vieną trikampį, todėl, remdamiesi nustatytomis sąlygomis, sudarysime maksimaliai galimą skaičių trikampių. Taigi išnagrinėtas uždavinys ekvivalentus klausimui: keliais (skirtingais) būdais galima išrinkti tris linijas iš rinkinio, turinčio n linijų? Atsakymas, kurį duoda elementari kombinatorika, sutampa su formule, gauta empiriškai.

Žemiau pateikti atsakymai į visus kitus klausimus, iškeltus šiame skyriuje.

1. Dalių, į kurias galima n pjūviais padalyti plokščią pusmėnulį, skaičius:

$$\frac{n^2+3n}{2}+1.$$

2. Riekučių, į kurias galima n plokščiais pjūviais supjaustyti ritinio formos keksą, skaičius $\frac{n^3+5n}{6}+1.$

3. Sričių, į kurias padalija plokštumą n susikertančių apskritimų, skaičius:

$$n^2-n+2.$$

4. Sričių, į kurias padalija plokštumą n susikertančių elipsių, skaičius:

$$2n^2-2n+2.$$

5. Sričių, į kurias padalija erdvę n susikertančių sferų, skaičius:

$$\frac{n(n^2-3n+8)}{3}.$$

6. Trikampių, kuriuos galima sudėti iš n spalvų dantų šepetukų, skaičius:

$$\frac{n^3+2n}{3}.$$

7. Kvadratų, kuriuos galima sudėti iš n spalvų dantų šepetukų, skaičius

$$\frac{n^4+n^2+2n}{4}.$$

8. Skirtingų keturspalvių tetraedrų, sudarytų, panaudojant n spalvų, skaičius:

$$\frac{n^4+11n^2}{12}.$$

9. Skirtingų šešiaspalvių kubų, sudarytų, panaudojant n spalvų, skaičius:

$$\frac{25n^4-120n^3+209n^2-108n}{6}.$$

Netikėta mirties bausmė ir su ja susijęs loginis paradoksas

„Pasirodė puikus naujas paradoksas“, — taip prasidėjo neinformuotam skaitytojui menkai suprantamas Maiklo Skriveno straipsnis britų filosofinio žurnalo *Mind* 1951 metų liepos numeryje. Skrivenas vadovavo Indianos valstijos Universiteto filosofijos katedrai, ir panašiais klausimais su jo nuomone nebuvo galima nesiskaityti. Paradoksas iš tikrųjų buvo puikus. Tai liudija daugiau kaip dvidešimt straipsnių apie jį įvairiuose moksliniuose žurnaluose. Autorių, jų tarpe ir žymių filosofų, nuomonės griežtai skyrėsi dėl to, ką reikia laikyti paradokso sprendiniu. Per daugelį metų nepavyko prieiti vieningos nuomonės, taigi paradoksas ir lig šiol yra karštų ginčų objektas.

Neaišku, kam pirmam atėjo į galvą paradokso idėja. Pagal V. V. Kuainą, Harvardo universiteto logiką, vieno iš aukščiau minėtų straipsnių autorių, pirmiausia apie šį paradoksą imta kalbėti mūsų amžiaus ketvirtojo dešimtmečio pradžioje, neretai jį formuluojant kaip galvosūkį apie žmogų, nuteistą mirties bausme pakariant.

Pasmerktąjį įmetė į kalėjimą šeštadienį.

— Tave pakars vidurdienį, — pasakė jam teisėjas, — vieną kurią kitos savaitės dieną. O kurią dieną tai įvyks, tu sužinosi tik bausmės dienos rytą.

Teisėjas garsėjo tuo, kad visuomet tesėjo duotą žodį. Pasmerktasis grįžo į kambarį, lydimas advokato. Vos tik jie liko dviese, gynėjas patenkintas nusišypsojo.

— Nejaugi nesupranti? — sušuko jis. — Juk teisėjo nuosprendžio negalima įvykdyti!

— Kaip? Nieko nesuprantu, — sumurmėjo kalinys.

— Tuojau paaiškinsiu. Aišku, kad sekantį šeštadienį tavęs negali pakarti: šeštadienis — paskutinė savaitės diena, todėl jau penktadienį tikrai žinotum, kad tave pakars šeštadienį. Taigi apie bausmės dieną tu žinotum prieš oficialiai pranešant šeštadienio rytą, vadinasi, teisėjo įsakymas būtų pažeistas.

— Teisingai, — sutiko kalinys.

— Vadinasi, šeštadienis visiškai atkrinta,— tesė advokatas, todėl penktadienis lieka paskutinė diena, kai tave gali pakarti. Tačiau ir penktadienį to padaryti negalima, nes po ketvirtadienio liktų iš viso dvi dienos — penktadienis ir šeštadienis. Kadangi šeštadienis negali būti bausmės diena, tave pakarti turi tik penktadienį. Bet jeigu tu apie tai sužinosi dar ketvirtadienį, teisėjo įsakymas vėl bus pažeistas. Vadinasi, penktadienis taip pat atkrinta. Taigi paskutinė diena, kai tave dar galėtų nubausti, yra ketvirtadienis. Tačiau ketvirtadienis taip pat netinka, nes, likęs trečiadienį gyvas, tu iš karto suprasi, kad bausmė bus įvykdyta ketvirtadienį.



46 pav. „...Lygiai taip pat aš galiu išbraukti trečiadienį, antradienį ir pirmadienį. Lieka tik rytojaus diena. Bet rytoj tikrai manęs nepakars, nes apie tai aš žinau jau šiandien“

— Viskas suprantama! — sušuko pagyvėjęs kalinys. — Lygiai taip pat aš galiu išbraukti trečiadienį, antradienį ir pirmadienį. Lieka tik rytojaus diena. Bet rytoj tikrai manęs nepakars, nes apie tai aš žinau jau šiandien!

Trumpai kalbant, nuosprendis yra prieštaringas. Viena, dviejuose teiginiuose, iš kurių jis sudarytas, nėra nieko logiškai prieštaringo, antra — jį įvykdyti pasirodo neįmanoma. Būtent taip suprato paradoksą D. Dž. O'Konoras, Ekseterio universiteto filosofas, pirmas išspausdinęs straipsnį apie tą paradoksą (*Mind, July* 1948). O'Konoro formuluotėje figūravo karininkas, savo pavaldiniams paskelbęs, kad kitą savaitę turi būti aliarmas, apie kurį niekas neprivalo iš anksto žinoti iki pat 18.00 val. tos dienos, kurią numatytas aliarmas.

„Lengva pastebėti, — rašė O'Konoras, — iš paties apibrėžimo, kad apskritai jokio aliarmo negali būti“. O'Konoras, matyt, turėjo galvoje, kad paskelbti aliarmą,

nepažeidžiant kartu aukščiau pateiktos sąlygos, neįmanoma. Analogiška ir vėlesniųjų straipsnių autorių nuomonė.

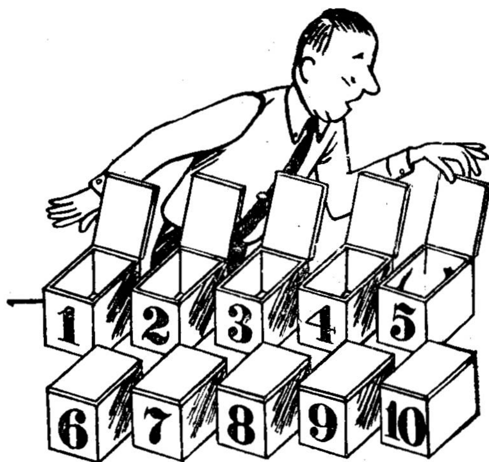
Jeigu tuo paradoksas būtų išnagrinėtas, būtų galima pritarti O'Konorui, kuriam visa problema pasirodė „tikras menkniekis". Tačiau Skrivenas pirmasis pastebėjo „kažką", darantį problemą visiškai ne tokia paprasta. Norėdami išaiškinti Skriveno pastabos esmę, grįšime prie istorijos su žmogumi, įmestu į kalėjimą. Nepriekaištingi loginiai samprotavimai jį, atrodo, įtikino, kad, nepažeidus nuosprendžio, bausmės įvykdyti neįmanoma. Ir staiga, nuteistojo nuostabai, ketvirtadienio rytą kameroje pasirodo budelis. Nuteistasis, aišku, to nelaukė, bet nuostabiausia, kad nuosprendis pasirodė esąs visiškai tikslus — jį galima įvykdyti pagal formuluotę. „Man atrodo, — rašo Skrivenas, — kad kaip tik grubus išorinio pasaulio įsikišimas, sugriaunantis subtilią loginę konstrukciją, suteikia paradoksui ypatingo pikantiškumo. Logikas jaudinančiai atkakliai skelbia užkeikimus, praeityje davusius reikiamą rezultatą, bet pabaisa — realybė — šį kartą nepaklūsta ir toliau eina savo keliu."

Norint susivokti tuose lingvistiniuose keblumuose, kurių yra šiame paradokse, tenka pateikti dvi naujas jo formuluotes, ekvivalenčias pirmajai. Tai padės atmesti įvairius nereikalingus ir tik nustelbiančius galutinį rezultatą faktorius: galimybę, kad teisėjas pakeis nuosprendį, mirtį bausme ir t. t.

Išnagrinėsime pirmą paradokso variantą, kurį pateikė Skrivenas, — paradoksą su kiaušiniu siurprizu.

Įsivaizduokite, kad yra dešimt dėžučių, sunumeruotų nuo *1* iki *10* (47 pav.). Nusigręžiate, o jūsų bičiulis deda į vieną iš dėžučių kiaušinį ir prašo jus atsigręžti. „Atidaryk visas dėžutes iš eilės, — sako jis, — iš pradžių pirmą, paskui antrą ir t. t. iki dešimtos. Garantuoju, kad vienoje jų yra kiaušinis siurprizas. Vadindamas kiaušinį siurprizu, turiu galvoje, kad, neatidaręs dėžutės ir nepamatęs kiaušinio, negalėsi sužinoti dėžutės su kiaušiniu numerio."

Sakykime, kad jūsų bičiulis visuomet sako tik tiesą. Ar jo pranašystė gali būti teisinga? Matyt, ne. Jis tikrai nepadės kiaušinio į 10 dėžutę, nes, atidarę pirmąsias devynias ir jose nieko neradę, galėsite neabejodami tvirtinti, kad kiaušinis yra vienintelėje likusioje dėžutėje. Tai prieštarautų jūsų bičiulio pranašystei, todėl dešimtoji dė-



47 pav. Paradoksas su kiaušiniu siurprizu

žutė atkrinta. Dabar pažiūrėsim, kas atsitiktų, jeigu jūsų bičiulis nesupratingai paslėptų kiaušinį devintoje dėžutėje. Tuomet pirmosios aštuonios dėžutės bus tuščios ir jums liks dvi uždarytos dėžutės: devintoji ir dešimtoji. Dešimtojoje dėžutėje kiaušinio negali būti, vadinasi, jis yra *9* dėžutėje. Jūs atidarote devintąją dėžutę, ir kiaušinis, žinoma, yra ten. Tačiau aišku, kad kiaušinio negalima laikyti siurprizu. Taigi vėl įrodėme, kad jūsų bičiulis neteisus. *9* dėžutė taip pat atkrinta. Kaip tik šiuo momentu jūs ir „atitrūkstate nuo tikrovės“: samprotaujant analogiškai, galima nekreipti dėmesio iš pradžių į aštuntąją dėžutę, paskui į septintąją ir t. t. iki pat pirmosios! Pagaliau, absoliučiai įsitikinę, kad visos dėžutės tuščios, jūs pradedate jas iš eilės atidarinėti ir... Kas baltuoja *5* dėžutėje? Kiaušinis siurprizas. Taigi, nepaisant visų samprotavimų, jūsų draugo pranašystė pasiteisino. Vadinasi, suklydot jūs, bet kur?

Kad paradoksas būtų dar „paradoksiškesnis“, išnagrinėsime trečią jo formuluotės variantą, kurį galima pavadinti paradoksu su neatspėjama korta. Įsivaizduokite, kad už staliuko prieš jus sėdi jūsų bičiulis ir laiko rankose trylika lapų spalvos kortų. Sumaišęs tas kortas ir išskleidęs jas rankoje vėduokle paveikslėliais į save, jis pakloja

ant stalo vieną užverstą kortą. Jūs turite pamažu išvardyti iš eilės visas trylika kortų, pradėdami tūzu * ir baigdami karaliumi. Kai atspėsite ant stalo gulinčią kortą, jūsų bičiulis turi pasakyti „taip“, visais kitais atvejais jis sako „ne“.

— Statau tūkstantį dolerių prieš dešimt centų, — sako jis, — kad tu negalėsi nustatyti šios kortos tol, kol aš nepasakysiu „taip“.

Sakykim, jūsų bičiulis padarys viską, kad neprarastų pinigų. Ar gali jis, esant tokiai sąlygai, ant stalo padėti lapų karalių? Aišku, kad ne. Kai išvardysite pirmąsias dvylika kortų, liks tik karalius, ir jūs tikrai jį nurodysite. Galbūt apversta korta — dama? Ne, todėl, kad ištarus bernelį, liks tik dvi kortos: karalius ir dama. Kadangi karalių atmetėte, neatspėta korta gali būti tik dama. Atrodytų, viskas teisinga, ir jūs vėl laimite 1 000 dolerių. Analogiškai atmetamos ir visos kitos galimybės. Išeina, kad kokia bebūtų korta, ją žinote iš anksto. Aukščiau pateikta samprotavimų grandinė atrodo nepažeidžiama. Antra vertus, aišku, kad jūs, žiūrėdami į apverstosios kortos kitą pusę, net neįsivaizduojate, kokia ji!

Net ir tada, kai šio paradokso variantas suprastintas (su dviem dienom, su dviem dėžutėm arba iš viso su dviem kortom), sunku atsikratyti labai savotiško neaiškumo jausmo. Tarkim, kad jūsų bičiulis turi tik tūzą ir dviakę. Jeigu jis padės ant stalo dviakę, jūs iš tikrųjų išlošite. Pasakę tūzą, jūs drauge jį atmetate ir, būdami visai tikri, galite pareikšti: „Aš padariau išvadą, kad ant stalo yra dviakė“. Darydami šią išvadą, remiatės prielaida, kad teisingas toks teiginys: „Prieš mane esanti korta turi būti arba lapų tūzas, arba lapų dviakė“. (Trijuose atitinkamuose paradokso variantuose tariama, kad nuteistasis bus pakartas, kortos bus tik tokios, kokias išvardijo jūsų bičiulis, ir kad vienoje dėžučių būtinai yra kiaušinis). Jūs nenusikaltote logikai ir galite tikėtis, kad jums pavyks iš savo bičiulio išlošti 1 000 dolerių.

Tačiau sakykim, kad jūsų bičiulis padėjo ant stalo lapų tūzą. Ar galite iš karto suvokti, kad tai tūzas? Be abejo, jūsų bičiulis nerizikuos 1 000 dolerių, padėdamas dviakę. Todėl nežinomoji korta *turi būti* tūzas. Ištariate šiuos žodžius garsiai ir girdite atsakymą

* Tūzas atitinka 1, bernelis — 11, dama — 12 ir karalius — 13 akių.

„taip". Ar turite pagrindo manyti, kad laimėjote lažybas?

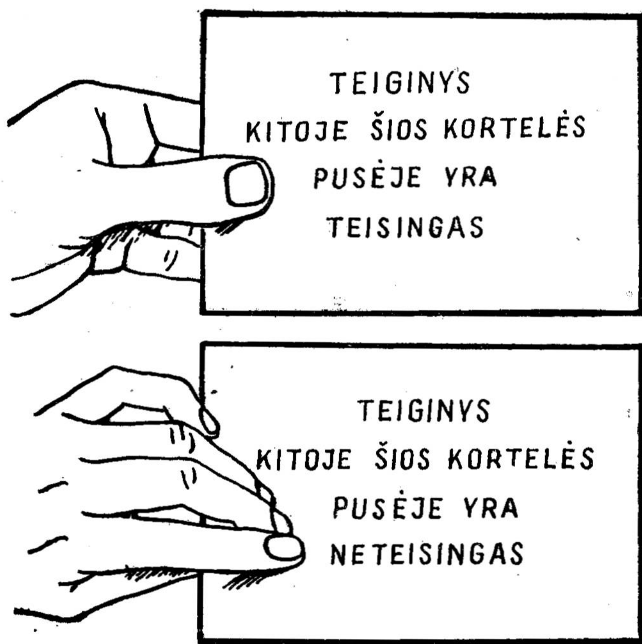
Kaip nekeista, taip galvoti negalite. Mėgindami suvokti tokio keisto tvirtinimo priežastis, pagauname pačią mūsų paradokso esmę. Jūsų ankstesnė išvada buvo pagrįsta tuo, kad korta gali būti arba tūzas, arba dviakė, todėl, jeigu nežinomoji korta nėra tūzas, tai ji būtinai turi būti dviakė. Tačiau čia pasinaudojote dar viena papildoma prielaida: manote, kad bičiulis sako tiesą arba, paprastai kalbant, daro viską, kad neprarastų 1 000 dolerių. Bet jeigu jūs, logiškai samprotaudami, nustatysite, kad ant stalo yra tūzas, jūsų bičiulis praras savo 1000 dolerių, net jeigu jis padėtų ne dviakę, o tūzą. Kadangi jūsų bičiulis bet kuriuo atveju netenka savųjų pinigų, tai jis neturi pagrindo vienai kortai atiduoti pirmenybę. Šitai supratus, jūsų įsitikinimas, kad ant stalo yra tūzas, iš karto susvyruos. Tiesa, jūs elgiatės protingai, kirsdami lažybų, kad nežinomoji korta — tūzas, nes ji iš tikrųjų gali būti tūzas. Tačiau norint išlošti, reikia įrodyti, kad savo išvadą padarėte, remdamiesi „geležine" logika, o tai neįmanoma. Taigi jūsų samprotavimuose susidarė klaidingas ratas. Iš pradžių galvojate, kad jūsų bičiulis teisingai nusakė įvykį, ir, remdamiesi savo prielaida, darote išvadą, kad nežinomoji korta turi būti tūzas. O jeigu ant stalo yra tūzas, jūsų bičiulio spėjimas neteisingas, todėl, spėdami, kokia yra atverstoji korta, jūs neturite kuo remtis. Bet ir tai dar ne viskas. Jeigu negalite atspėti kortos, jūsų draugo prognozė teisinga. Vadinasi, grįžote į išeities tašką, ir viskas prasideda iš naujo. Ta prasme situacija primena klaidingą ratą, sprendžiant paradoksą, kurį pirmas pateikė anglų matematikas P. E. B. Žurdenas



48 pav. Paradoksas su neatspėjama korta

1913 metais (49 pav.). Samprotaudami analogiškai, einate ratu, visą laiką grįždami į išeities poziciją: loginiu keliu nustatyti, kokia korta yra ant stalo, neįmanoma. Gali būti, kad ją atspėsite. Pažindami savo bičiulį, galite padaryti išvadą, kad ant stalo, tikriausiai, yra tūzas. Tačiau nė vienas save gerbiąs logikas jūsų schemos nepavadins tikslia.

Kad jūsų samprotavimai visai nepagrįsti, vaizdžiai matyti iš dešimties dėžučių pavyzdžio. Iš pradžių „darote išvadą“, kad kiaušinis yra *1* dėžutėje (47 pav.), bet ji pasirodo esanti tuščia. Todėl nusprendžiate, kad kiaušinis įdėtas į *2* dėžutę, bet ir joje nieko nerandate. Tai jums perša mintį, kad kiaušinis yra *3* dėžutėje, ir t. t. (Viskas vyksta taip, tarytum sekundę prieš jums pažvelgiant į dėžutę, kur, jūsų manymu, turi būti kiaušinis, kažkas visiškai nesuprantamu būdu jį perdeda į dėžutę su didesniu numeriu.) Pagaliau ilgai ieškotą kiaušinį randate *8* dėžutėje. Ar dabar šį įvykį galima pavadinti iš anksto nu-



49 pav. Paradoksas su Žurdeno kortele

matytu, o visus jūsų samprotavimus laikyti nepriekaištingais logikos požiūriu? Aišku, ne, nes aštuonis kartus pritaikėte tą patį metodą ir septyniais atvejais gavote neteisingą rezultatą. Lengva suprasti, kad kiaušinis gali būti bet kurioje dėžutėje, tarp jų ir paskutinėje.

Net atidarius 9 tuščias dėžutes, į klausimą, ar galima logiškai samprotauti, kur yra kiaušinis (ar jis yra *10* dėžutėje, ar ne), lieka neatsakyta. Priėmę tik vieną prielaidą („Vienoje dėžučių būtinai yra kiaušinis"), jūs, neprieštaraudami logikos dėsniams, suprantama, turėsite teisę tvirtinti, kad kiaušinis yra *10* dėžutėje. Šiuo atveju kiaušinio radimas *10* dėžutėje — įvykis, numatytas iš anksto, o tvirtinimas, kad to negalima numatyti, — neteisingas. Priėmę dar vieną prielaidą (kad jūsų bičiulis sako tiesą, tvirtindamas, jog kiaušinio „koordinačių", t. y. dėžutės su kiaušiniu numerio, negalima numatyti iš anksto), jūs negalite daryti kokių nors loginių išvadų, nes pagal pirmą prielaidą kiaušinis turi būti *10* dėžutėje (tai galite teigti iš anksto), o pagal antrą — kiaušinį turite rasti netikėtai. Kadangi padaryti kokios nors išvados negalima, tai kiaušinio radimą *10* dėžutėje reikia laikyti iš anksto nenumatytu įvykiu, o abi prielaidas — teisingomis, tačiau jas „reabilituosime" ne anksčiau, negu atidarysime paskutinę dėžutę ir rasime joje kiaušinį.

Dar kartą paseksime paradokso sprendimą. Šį kartą jam suteiksime paradokso apie žmogų, nuteistą pakarti, formą. Dabar žinome, kad teisėjas nuosprendį suformulavo teisingai, o kalinys samprotavo neteisingai. Jo samprotavimuose jau klaidingas buvo pirmasis žingsnis, kai jis tarė, kad, esą, jo negali pakarti paskutinę savaitės dieną. O iš tikrųjų nuteistasis neturi pagrindo daryti kokią nors išvadą apie savo likimą net bausmės išvakarėse (čia situacija tokia pati, kaip ir paradokse su kiaušiniu, kai lieka uždaryta viena paskutinioji dėžutė). Ši mintis yra svarbiausia žinomo logiko Kuaino darbe, parašytame 1953 metais.

Kuainas pasakoja, kaip jis samprotautų kalinio vietoje. Reikia išskirti keturis atvejus: pirmasis — mane pakars rytoj dieną, ir tą žinau jau dabar (bet iš tikrųjų nežinau); antrasis — manęs rytoj nepakars, ir aš tą žinau jau dabar (bet iš tikrųjų nežinau); trečiasis — manęs rytoj nepakars, bet dabar aš to nežinau, ir pagaliau ketvirtas — mane pakars rytoj, bet dabar aš šito nežinau.

Du pastarieji atvejai yra galimi, paskutinis jų reikštų, kad nuosprendis įvykdytas. Tokioje situacijoje nėra ko iš anksto spėlioti ir įrodinėti, kad teisėjas prieštarauja. Belieka tik laukti, pasikliaujant geresne baigtimi.

Škotų matematikas Tomas G. O'Beirnas straipsnyje, kurio pavadinimas šiek tiek paradoksalus „Ar gali nelaukta *niekada* neįvykti?“ *, pateikia puikią nagrinėto paradokso analizę. Kaip parodo O'Beirnas, raktas šiam paradoksui išspręsti — tai įsisąmoninti vieną gana paprastą aplinkybę: vienas žmogus turi žinių, kurios jam leidžia kokio nors įvykio ateityje prielaidą laikyti teisinga, kitas nieko negali pasakyti, kad prielaida teisinga tol, kol tas įvykis neįvyks. Nesunku pateikti paprastų pavyzdžių, patvirtinančių O'Beirno mintį. Tarkime, kad kas nors, paduodamas jums dėžutę, sako: „Atidarykite ją — viduje kiaušinis“. Jis juk žino, kad jo prielaida teisinga, o jūs nežinote, kol neatidarote dėžutės.

Tą patį galima pasakyti ir apie mūsų paradoksą. Ir teisėjas, ir žmogus, dedąs kiaušinį į vieną iš dėžučių, ir mūsų bičiulis su trylika kortų — kiekvienas žino, kad jo tvirtinimas yra teisingas, tačiau jis negali būti pagrįstas samprotavimų grandinę, paneigiančia pagaliau patį tvirtinimą. Čia ir slypi begalinis klaidžiojimas ratu, kuris, panašiai kaip ir frazė ant viršutinės kortelės pusės iš Žurdeno paradokso, paneigia visus mėginimus įrodyti, kad tvirtinimas klaidingas.

Paradoksas pasidarys ypač aiškus, pasinaudojus viena idėja, išdėstyta Skriveno straipsnyje. Tarkim, kad vyras sako savo žmonai: „Gimimo dienos proga aš padarysiu tau siurprizą. Tu jokiu būdu neatspėsi, ką aš tau padovanosiu. Tai ta pati apyrankė, kurią matei praeitą savaitę parduotuvės vitrinoje“.

Ką dabar daryti nelaimingai žmonai? Viena, ji žino, kad vyras niekada nemeluoja ir visuomet išpildo savo pažadus. O jeigu jis vis dėlto padovanos apyrankę, tai jau nebus siurprizas ir tuomet pažadas liks neištęsėtas, vadinasi, vyras jai sakė netiesą. O jeigu taip, tai kokias išvadas ji gali padaryti, logiškai samprotaudama? Gali būti, kad vyras tesės žodį ir padovanos jai apyrankę, sulaužydamas pažadą ją nustebinti netikėta dovana. Antra vertus, jis gali tesėti savo žodį, kad dovana bus netikėta,

* *The New Scientist*, May 25, 1961.

bet sulaužys antrą pažadą ir vietoj apyrankės padovanos jai, pavyzdžiui, naują dulkių siurblį. Vyras, taip tvirtindamas, pats sau prieštarauja, todėl ji neturi pagrindo teikti pranašumą vienai kuriai šių galimybių, vadinasi, ji negali tikėtis apyrankės. Nesunku atspėti, kas bus toliau: kai gimimo dieną vyras įteiks apyrankę, dovana jai bus malonus siurprizas, nes jo negalima numatyti iš anksto jokiais loginiais samprotavimais. Vyras visą laiką žinojo, kad gali ištesėti žodį ir ištesės jį. O žmona to nežinojo tol, kol vyras jai nepadovanojo apyrankės. Dar vakar vyro tvirtinimas jai atrodė nesąmonė ir sukėlė loginių prieštaravimų painiavą, o šiandien, gavus seniai lauktą apyrankę, pasidarė visiškai teisingas ir neprieštaringas.

Iš nagrinėtų paradoksų aiškiai pajutome kerinčią žodžio jėgą (arba tiksliau, pritaikius Burbaki išsireiškimą, „kalbos laisvės“ jėgą). Dėl to paradoksai tokie sudėtingi ir drauge patrauklūs.

Labai daug skaitytojų pateikė be galo sąmojingų mėginimų išspręsti paradoksą apie nuteistąjį, kurį turi pakarti iš anksto nenurodytą savaitės dieną. Kai kurie jų paradokso sprendimui rimtuose žurnaluose paskyrė ištisus straipsnius.

L. Ekbomas, matematikos dėstytojas iš Stokholmo, pateikė istoriją, kuri galėjo būti pretekstas paradoksui apie netikėtą bausmę suformuluoti. Kartą 1943 ar 1944 metais švedų radijas pranešė, kad kitą savaitę numatoma paskelbti mokomąjį oro aliarmą. Siekiant patikrinti, kaip pasiruošusi priešlėktuvinės gynybos kariuomenė, aliarmą nutarta paskelbti netikėtai, tad net aliarmo dienos rytą nė vienas žmogus negalės numatyti, kurią valandą jis bus paskelbtas. Laiško autorius čia įžiūrėjo loginį paradoksą ir jį apsvarstė su savo studentais. 1947 metais vienas šių studentų, būdamas Prinstone, iš žinomo matematiko ir logiko Kurto Hiodelio lūpų išgirdo kažkokį to paties paradokso variantą. Toliau autorius rašo, kad iš pradžių jis niekaip negalėjo susieti nagrinėjamo paradokso su minėtu aliarmo paskelbimu per švedų radiją; bet tas įvykis visiškai galėjo būti pagrindas paradoksui atsirasti, nes Kuainas pirmą kartą sužinojo apie šį paradoksą penktojo dešimtmečio pradžioje.

Žemiau perskaitysite du laiškus, kurių autoriai visiškai nemėgina išspręsti paradokso, bet pateikia daugybę labai įdomių (ir painių) samprotavimų.

Gerbiamoji redakcija!

Skaitant straipsnį apie paradoksą su kiaušiniu siurprizu, susidaro įspūdis, lyg autorius, logiškai įrodęs, kad kiaušinis negali būti nė vienoje dėžutėje, šiek tiek nustębo, radęs jį 5 dėžutėje. Iš pirmo žvilgsnio tai iš tikrųjų nuostabu, bet, kruopščiai išanalizavus uždavinį, galima įrodyti, kad kiaušinis visuomet bus 5 dėžutėje.

Įrodoma taip:

Sakykim, S — visų teiginių aibė, o T — teisingų (tikrų) teiginių aibė. Bet kuris aibės elementas (t. y. bet kuris teiginys) gali priklausyti arba aibei T, arba aibei C = S—T, t. y. aibės T papildiniui, bet negali priklausyti abiem aibėm kartu. Išnagrinėsime tokius du teiginius:

1. Kiekvienas teiginys, parašytas šiame stačiakampyje, priklauso aibei C.
2. Kiaušinis visuomet turi būti 5 dėžutėje.

1 teiginys priklauso arba aibei T, arba aibei C, bet ne abiem kartu.

Jeigu 1 teiginys priklauso aibei T, jis yra teisingas. O jeigu jis teisingas, bet kuris teiginys, parašytas stačiakampiame rėmelyje — tarp jų ir 1 teiginys, — priklauso aibei C. Taigi tarę, kad 1 teiginys priklauso aibei T, gauname, kad jis priklauso aibei C. Tai jau prieštaravimas.

Tarkime, kad 1 teiginys priklauso aibei C. Tuomet mums teks išnagrinėti du atvejus: atvejį, kai 2 teiginys priklauso aibei C, ir atvejį, kai 2 teiginys priklauso aibei T.

Sakykim, 2 teiginys priklauso aibei C, tuomet 1 ir 2 teiginiai, t. y. abu teiginiai, parašyti stačiakampiame rėmelyje, priklauso aibei C. Tai tvirtina 1 teiginys; vadinasi, jis teisingas ir turi priklausyti aibei T. Taigi tarę, kad abu teiginiai priklauso aibei C, gavome, kad 1 teiginys priklauso aibei T. Tai vėl prieštaravimas.

O jeigu 2 teiginys priklauso aibei T (o 1 teiginys — aibei C), 1 teiginys, kad kiekvienas teiginių, esančių stačiakampiame rėmelyje, priklauso aibei C, prieštarauja tam, kad 2 teiginys yra aibės T elementas. Vadinasi, 1 teiginys klaidingas ir turi priklausyti aibei C, visiškai atitikdamas tai, kas pasakyta aukščiau.

Taigi egzistuoja vienintelis neprieštaringas atvejis: kai 1 teiginys priklauso aibei C, o 2 teiginys — aibei T. Vadinasi, 2 teiginys teisingas.

Taigi kiaušinis visuomet bus 5 dėžutėje.

Kaip matote, labai stebėtis, radus kiaušinį 5 dėžutėje neverta.

DŽ. VERIJENAS
D. S. BIORKSAS

Kalifornijos valstija,
Stanfordo universitetas

Gerbiamoji redakcija!

Aš labai susidomėjęs perskaičiau paradoksą apie žmogų, nuteistą pakarti. Negaliu nepastebėti, kad jeigu mūsų kalinys būtų kvalifikuotas statistikas, jis bevelytų, jog bausmę paskirtų trečiadienį, t. y. trečiąją savaitės dieną. Iš tikrųjų žinoma, kad kalinį gali pakarti tik vieną kartą. Tarkime, kad teisėjas bausmės dieną paskiria atsitiktinai. Tuomet tikimybė to, kad kaliniui teks laukti bausmės x dienų, lygi $p(x)=\frac{1}{7}$, kitaip tariant, bet koks dienų skaičius nuo nuosprendžio paskelbimo iki bausmės vienodai galimas. Šis uždavinys yra tikimybės

$$p(x)=\frac{\left[\frac{(x-1)!}{(x-k)!\,(k-1)!}\right]\left[\frac{(N-x)!}{(N-x-h+k)!\,(h-k)!}\right]}{\frac{N!}{(N-h)!\,(h)!}}$$

bendresnio hipergeometrinio pasiskirstymo paprastas dalinis atvejis. Čia p(x) — tikimybė, kad, norint gauti k palankių rezultatų, būtina atlikti x bandymų, be to, žinoma, kad h „kandidatų" į palankius rezultatus atsitiktinai pasiskirstę bendrame galimų rezultatų skaičiuje N. Mūsų uždavinyje N=7 (laikant, kad vieno pakorimo pakanka), h=k=1. Tuomet matematinis vidurkis arba vidutinė x reikšmė sudaro $\frac{1}{7}(1+2+\ldots+7)=4$ dienas. Tačiau man atrodo, kad niekuomet negalima pamiršti kai kurių ypač įkyrių skaitytojų, kurie trečiadienio nelaikys bausmės įvykdymo diena vien dėl to, kad jis yra „laukiama" diena.

MILTONAS R. SEILERIS

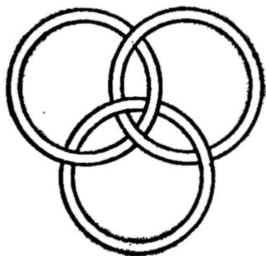
Ohajo valstija,
Uortingtonas

Boromėjaus mazgai ir žiedai

Amerikiečiai gerai pažįsta vienos populiarios alaus rūšies firminį ženklą: tris keistokai sukabintus žiedus, pavaizduotus 50 paveiksle. Lygiai tokie patys žiedai Renesanso epochos laikais buvo garsios italų Boromėjų šeimos herbe, todėl kartais jie ir vadinami Boromėjaus žiedais. Perskirti tų žiedų negalima, nors jokie du žiedai nėra tarpusavyje sukabinti. Pažvelgus į paveikslą matyti, jog, išėmus bet kurį žiedą, kiti du atsiskirtų.

Savo pirmosios knygos VII skyriuje minėjau, kad nesugebu padaryti iš popieriaus nesusikertančio paviršiaus modelio taip, kad trys to paviršiaus kraštai susijungtų kaip Boromėjaus žiedai: „Galbūt, — rašiau aš, — kam nors iš sąmojingų skaitytojų pavyks padaryti tokį modelį“.

Mano iššūkį priėmė Devidas A. Hafmenas. Jis ne tik sugebėjo padaryti keletą įvairių modelių su kraštais, susikabinusiais kaip Boromėjaus žiedai; triūsdamas jis pastebėjo nuostabiai paprastus ir grakščius paviršių popierinių modelių sudarymo metodus, kuriais naudojantis, galima pasiekti, kad modelių kraštai būtų topologiškai ekvivalentūs kokiam nors mazgui arba ištisai bet kaip persipynusių ir tarpusavyje sumaišytų mazgų kombinacijai. Vėliau Hafmenas atskleidė, jog dar mūsų amžiaus ketvirtojo dešimtmečio pradžioje topologai taikė lygiai tuos pačius metodus, bet jų aprašymus galima buvo rasti tik vokiškuose matematikos žurnaluose, todėl juos žinojo tik specialistai, o eilinis skaitytojas to nepastebėjo.



50 pav. Trys Boromėjaus žiedai

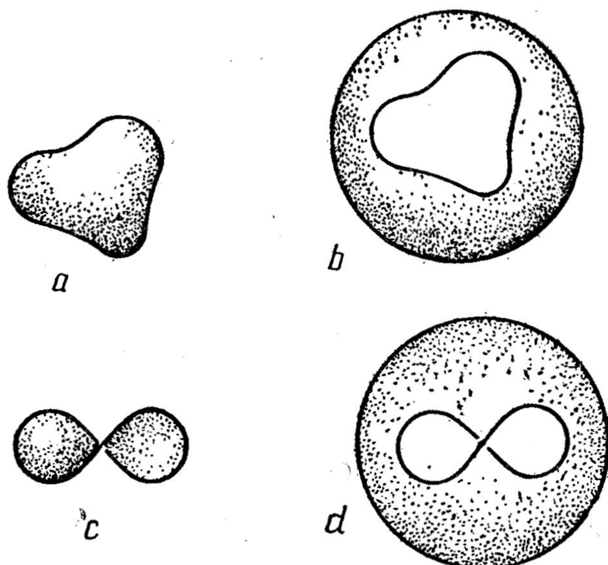
Prieš taikydami vieną iš Hafmeno metodų Boromėjaus žiedams, pasvarstykime, kuo jis naudingas kokiai nors paprastesnei struktūrai. Aišku, kad paprasčiausia trimatės erdvės uždara kreivė yra kreivė, neturinti mazgų. Matematikai kartais ją vadina nuli-

nio sankryžų skaičiaus mazgu, analogiškai kaip tiesė vadinama nulinio kreivumo kreive. Tokia kreivė pavaizduota 51 paveiksle, *a*. Subrūkšniuota vidinė kreivės dalis reiškia dvipusį paviršių, kurio kraštai yra jau minėta kreivė. Tokį paviršių nesunku iškirpti iš popieriaus: jo kraštų forma neturi ypatingos reikšmės. Reikalaujama tik vieno: paviršiaus kraštai turi būti paprasta uždara kreivė. Tą patį 51 paveikslą, *a*, galima nuspalvinti kitaip. Subrūkšniuokime išorinę kreivės dalį ir įsivaizduokime, kad visas (51 pav., *b*) paveikslas atliktas ant sferos paviršiaus. Tuomet uždara kreivė bus kiaurymės sferoje pakraštys. Abu modeliai (iš popieriaus iškirptas paviršius ir sfera su kiauryme) topologiškai ekvivalentūs. Sutapdinę jų kraštus, gausime uždarą dvišonį sferos paviršių.

Pamėginkime tą patį metodą pritaikyti šiek tiek sudėtingesniam atvejui (51 pav., *c*). Įsivaizduokime, kad ta pati erdvinė kreivė „padaryta" iš virvės gabaliuko. Sankryžos taškus, t. y. taškus, kuriuose viena virvės dalis praeina po kita tartum kelias, praneriantis po pereja, pažymėsime trūkio tašku kreivės dalyje, esančioje apačioje. Gautąją kreivę taip pat galima vadinti nulinės sankryžos mazgu, nes, deformuodami ją erdvėje, visada galime pašalinti sankryžos taškus (mazgo eilė lygi minimaliam sankryžų taškų skaičiui, kurį galime gauti tolydžia mazgo deformacija). Scheminį mūsų paviršiaus brėžinį vėl nudažysime dviem spalvomis taip, kad jokios dvi sritys, turinčios bendrą sieną, nebūtų vienos spalvos. Tai visada galima padaryti dviem būdais, iš kurių vienas yra tarytum negatyvus, o antras — pozityvus.

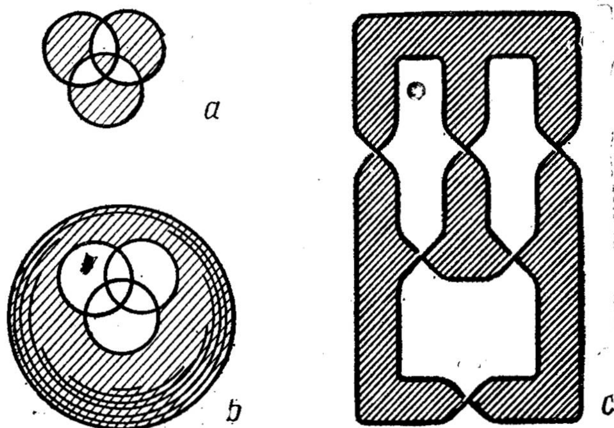
Jeigu scheminis paviršiaus brėžinys nudažytas taip, kaip parodyta 51 paveiksle, *c*, modelis iš esmės yra pusiau susuktas popieriaus lapas. Tai dvipusis paviršius, topologiškai ekvivalentus kiekvienam iš aukščiau minėtų paviršių. Jeigu tą paviršių nuspalvinsime taip, kaip parodyta 51 paveiksle, *d*, ir baltus sklypelius laikysime sferos skylėmis, gausime Miobijaus lapą. Jo kraštus taip pat sudaro nulinio sankryžų skaičiaus mazgas (iš esmės tai visai ne mazgas).

Skirtingai nuo aukščiau nagrinėtų paviršių, Miobijaus lapas iš viso turi tik vieną pusę. Kiaurymę sferoje užklijavę Miobijaus lapu, gausime uždarą paviršių be kraštų — vadinamą krosskep, arba projektyvinę plokštumą. Padaryti tokio paviršiaus modelį be sankryžos neįmanoma.



51 pav. Paviršių, kurių kraštai nesurišti į mazgą, modeliai

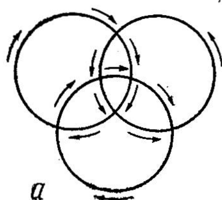
Hafmeno metodą galima panaudoti bet kokio mazgo schemai ir net bet kokiai mazgų sekai. Pažiūrėsime, ką duoda šis metodas, taikant jį Boromėjaus žiedams. Pirmiausia reikėtų sudaryti žiedus, primenančius „kelių mazgą“, sudarytą laikantis taisyklės, kad nė viename taške nesusikirstų daugiau kaip du keliai. Paskui gautąją schemą reikia nuspalvinti dviem galimais būdais — „negatyviu“ ir „pozityviu“ (52 pav., *a* ir *b*). Kiekviena sankryža reiškia, kad toje vietoje popierius (subrūšniuoti sklypeliai) pusiau susuktas į atitinkamą pusę. 52 paveiksle, *a,* pavaizduotą vienpusį paviršių nesudėtinga pagaminti iš popieriaus arba simetriškos formos topologiškai ekvivalentaus paviršiaus, pavaizduoto 52 paveiksle, *c.* 52 paveiksle, *b,* pavaizduota sfera su trimis kiaurymėmis, kurių kraštai yra Boromėjaus žiedų formos. Iš pirmo žvilgsnio gali atrodyti, kad tokio paviršiaus modelis nieko bendra neturi su prieš tai nagrinėtu. Iš tikrųjų abu modeliai topologiškai ekvivalentūs. Nuspalvindami paviršių schemas „pozityviai“ ir „negatyviai“, kartais gauname ekvivalenčius, o kartais — neekvivalenčius modelius.

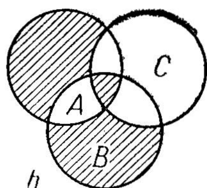


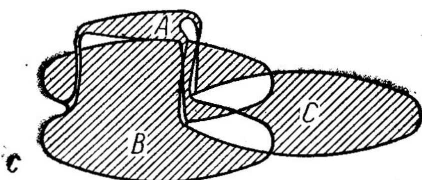
52 pav. Topologiškai ekvivalentūs vienpusiai paviršiai, kurių kraštai tarpusavyje sukabinti kaip Boromėjaus žiedai

Galima įrodyti, kad dvejopo nuspalvinimo būdas pritaikomas bet kokiam mazgui arba bet kokios eilės kelių mazgų grupei, nesvarbu, kokiu nuoseklumu jie būtų vienas po kito išsidėstę. Tačiau daugelis modelių, sudarytų šiuo metodu, pasirodo esą vienpusiai. Kartais pavyksta taip pergrupuoti sankryžas, kad modelis pasidaro dvipusis, tačiau paprastai sunku suvokti, kaip tai padaryti. Yra metodas, taip pat pakartotinai Hafmeno atrastas, pagal kurį galima sudaryti dvipusį paviršių.

Pailiustruosime šį metodą Boromėjaus žiedais. Iš pradžių plonomis linijomis nubrėšime žiedų schemą. Paskui pieštuko smaigalį įbesime į bet kurį vieno iš apskritimų tašką ir paryškinsime apskritimą dar kartą bet kokia kryptimi. Kiekviename sankryžos taške rodyklėle reikia parodyti, kuria kryptimi brėžiame. Analogiškai reikia paryškinti ir kitus du apskritimus. Šitaip gausime schemą, pavaizduotą 53 paveiksle, *a*. Brėždami kryptimi, nurodyta rodyklėlėmis, visas linijas paryškinkime spalvotu pieštuku. Pradėti galime bet kuriame bet kurios linijos taške. Priėję sankryžą, pasukime į kairę arba į dešinę priklausomai nuo to, kurią kryptį nurodo rodyklė, ir judėkime naująja kelio trasa iki kitos sankryžos, čia vėl pasukime rodyklėlės nurodyta kryptimi ir t. t. Judame schema, tarsi autokelių, išsidėsčiusių įvairiuose aukščiuose, sistema: kiekvieną



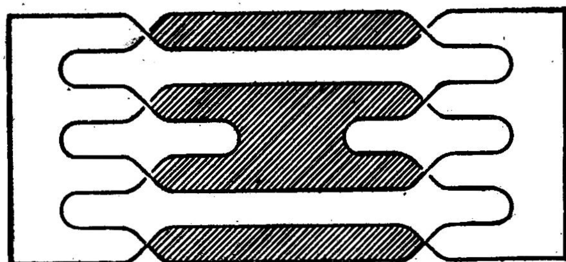




53 pav. Nuoseklūs dvipusio paviršiaus, kurio kraštai sujungti tarpusavyje kaip Boromėjaus žiedai, sudarymo etapai

kartą, kai po mumis arba virš mūsų pasirodo kuri nors magistralė, nedelsiant pasukame į ją ir judame kryptimi, kaip ir kitas transportas. Aprašę paprastą uždarą kreivę, būtinai grįšime į pradinį tašką. Perstatykime pieštuką į kurį nors kitą schemos tašką ir pakartokime viską iš pradžių, paskui perstatykime pieštuką į trečią tašką, ir taip darykime tol, kol apibrėšime visą schemą. Įdomu pažymėti, kad mūsų nupieštos uždaros kreivės niekur nesusikerta. Gautoji figūra parodyta 53 paveiksle, *b*.

Kiekviena uždara schemos kreivė atitinka tam tikrą popierinio modelio sklypą (sritį). Ten, kur sklypai ribojasi vienas su kitu, bendros sienos dalies taškai atitinka „bendruosius" sklypelius jungiančius „perėjimus", kuriuos simbolizuoja pusiau susuktos popieriaus juostelės (schemoje rodyklėlės nurodyta kryptimi). Jeigu vienas sklypas yra kito viduje, laikoma, kad mažasis sklypas yra virš didžiojo, t. y. paviršius toje vietoje laikomas „dviaukščiu". Taip išsidėsčius sklypams, jų bendrų sienų taškai, kaip ir pirma, atitinka „perėjimus" — pusiau susuktas popieriaus juosteles, — bet dabar tos juostelės jungia sklypus, esančius skirtinguose aukščiuose. Galutinis modelis, pavaizduotas 53 paveiksle, *c*, — dvipusis paviršius su trimis kraš-

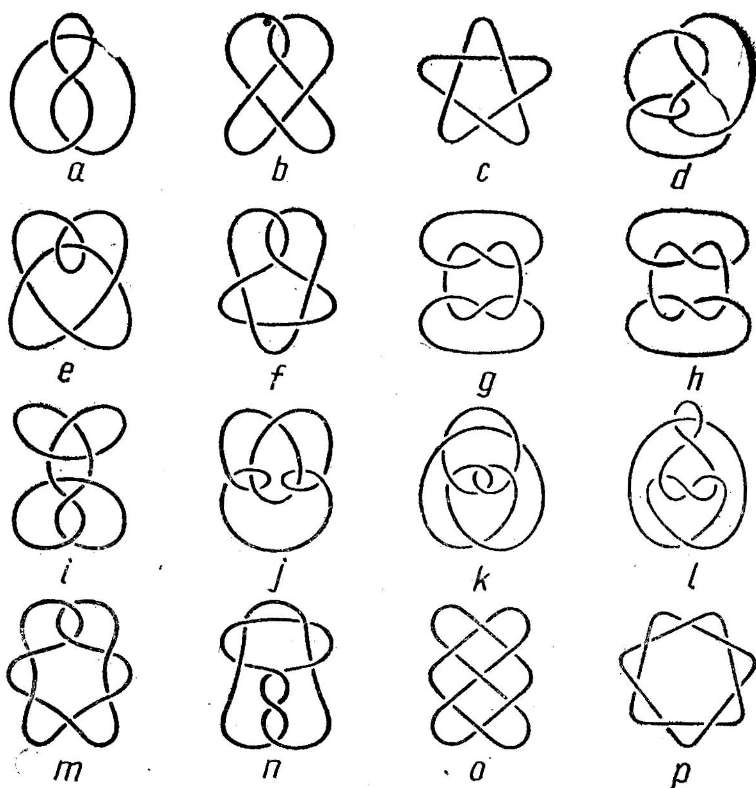


54 pav. Dvipusis paviršius, kurio kraštai sukabinti taip pat, kaip Boromėjaus žiedai

tais, topologiškai ekvivalenčiais Boromėjaus žiedams. Galima įrodyti, kad bet kuris šitaip sudarytas modelis bus dvipusis. Vadinasi, jo puses galima nuspalvinti skirtingomis spalvomis (arba paviršiaus modelį padaryti iš popieriaus lapo, kurio geroji ir išvirkščioji pusė skirtingų spalvų), nebijant, kad spalva bus užtepta ant spalvos.

Galbūt norėsite pasigaminti kokių nors kitų mazgų ar sudėtingesnių sandarų modelių, sudarytų iš kelių vienas po kito einančių mazgų? Labai gražūs paviršiai gaunami, pavyzdžiui, iš aštuoniukės formos mazgo. Šio gerai žinomo mazgo schema gali būti ir tokia, kaip 55 paveiksle, *a*. Tarp kitko, analogiškomis schemomis mazgų teorijoje randama bet kokio mazgo algebrinė išraiška. Ekvivalentūs mazgai, t. y. mazgai, kurių kiekvieną galima gauti tolydžia kito mazgo deformacija, aprašomi viena ir ta pačia algebrine išraiška, tačiau ne visi mazgai, kuriuos atitinka viena ir ta pati formulė, ekvivalentūs. Mazgai trimatėje erdvėje visada laikomi uždaromis kreivėmis. Visus virvės su laisvais galais mazgus, taip pat uždarų keturmatės erdvės kreivių mazgus galima atrišti, todėl jie ekvivalentūs nulinio sankryžų skaičiaus „mazgams“, t. y. jie iš esmės nėra mazgai.

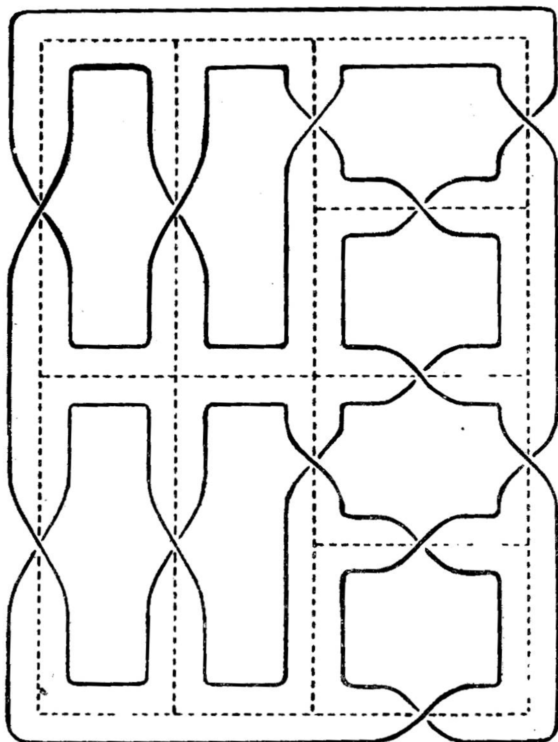
Mazgas, panašus į aštuoniukę, — vienintelis, kurio minimalus sankryžų skaičius lygus 4. Mazge, kuriame virvė primena sukryžiuotas ant krūtinės rankas (toliau tokį mazgą vadinsime trilapiu mazgu), minimalus sankryžų skaičius lygus 3. Kitų tokio sankryžų skaičiaus mazgų nėra. Skirtingai nuo trilapio, mazgas aštuoniukė neturi veidrodinio antrininko arba, kitais žodžiais tariant, tolydžiai deformuojant, tampa savo paties veidrodiniu



55 pav. Įvairių sankryžų skaičiaus mazgai

atspindžiu. Panašūs mazgai vadinami „amfichiraliniais", t. y. „tinkamais abiem rankoms". Jie primena guminę pirštinę, kurią, reikalui esant, išvertus į kitą pusę, galima užmauti ir ant dešinės, ir ant kairės rankos.

Mazgų su viena ir dviem sankryžomis nėra. Žinomi tik 2 mazgai su penkiomis sankryžomis, 5 mazgai su šešiomis sankryžomis ir 8 mazgai su septyniomis sankryžomis (55 pav.). 55 paveiksle duota tik po vieną kiekvieno mazgo veidrodinį antrininką, bet už tai jame pateikti mazgai, sudaryti iš dviejų nuosekliai surištų paprastesnių mazgų. Pavyzdžiui, tiesioginis *g* mazgas sudarytas iš trilapio ir jo veidrodinio antrininko, tariamas tiesio-



56 pav. Vienpusis paviršius su vienu kraštu. Ar surištas jis mazgu?

ginis mazgas *h* sudarytas iš dviejų vienodų trilapių. Mazgus *c* ir *p* atitinka labai paprasti paviršių modeliai. Paimkime popieriaus juostelę, pusiau persukime ją penkis kartus ir suklijuokime galus — gausime paviršių, kurio kraštai turi *c* mazgo formą. Pusiau persukę septynis kartus, gausime paviršių su kraštu, turinčiu *p* mazgo formą.

Visus 16 mazgų 55 paveiksle galima pavaizduoti taip, kad „virvė" sankryžų vietose pakaitomis eitų tai per viršų, tai per apačią (tik mazgas *g* pavaizduotas kitaip). Kai sankryžos bus aštuonios, susidarys pirmieji mazgai (iš viso 3), kuriems negalima nupiešti schemų su nuosekliu „viršutinių" ir „apatinių" sankryžų keitimusi.

Gali kilti klausimas, kodėl mazgo *i*, sudaryto iš trilapio ir aštuoniukės, negalima išreikšti dviem skirtingomis

schemomis, kaip, pavyzdžiui, mazgus *g* ir *h*, kurių kiekvienas reiškia dviejų trilapių derinį. Toks skirtumas yra dėl to, kad mazgo *i* dalį, turinčią aštuoniukės formą, galima pakeisti jos veidrodiniu atspindžiu, nekeičiant trilapio sudarytos dalies orientacijos. Todėl galimas tik toks mazgas, koks parodytas 55 paveiksle, *i*, ir jo pilnas veidrodinis atspindys.

Mazgas, iš kurio tolydžios deformacijos būdu negalima gauti dviejų mažiau sudėtingų mazgų, surištų nuosekliai vienas po kito, analogiškai pirminiams skaičiams, vadinamas pirminiu mazgu. Visi mazgai, pavaizduoti 55 paveiksle, išskyrus *g*, *h* ir *i*, pirminiai. Sudarytos išsamios lentelės mazgų, turinčių ne daugiau kaip dešimt sankryžų, tačiau formulė, pagal kurią galima nurodyti skaičių skirtingų mazgų, turinčių lygiai *n* sankryžų, iki šio laiko nežinoma. Kai $n=10$, visokių mazgų skaičius, matyt, lygus 167. Kiek yra pirminių mazgų, kai $n=11$ ir $n=12$, galima tik spėlioti.

Mazgų teorija yra glaudžiai susijusi su topologija, ir joje, kaip ir topologijoje, daugybė neišspręstų problemų. Nėra bendro metodo, kuriuo būtų galima nustatyti, ekvivalentūs ar neekvivalentūs vienas kitam du bet kokie mazgai, ar jie sukibę, ar apskritai kokia nors sudėtinga erdvinė kreivė „surišta" mazgu. Į pastarąjį klausimą atsakyti sunku. Tai galima spręsti ir iš galvosūkio, pavaizduoto 56 paveiksle. Jame matome keistą vienpusį paviršių su vienu kraštu (tuo jis panašus į Miobijaus lapą). Neaišku tik viena: ar kraštas „perrištas" mazgu ir jeigu taip, tai kokiu? Iš pradžių atidžiai išnagrinėkite paveikslą, suformuluokite savo spėjimą, paskui patikrinkite jį „eksperimentu".

Padarykite paviršiaus popierinį modelį ir perkirpkite jį išilgai punktyrinės linijos. Gausite vienintelę juostelę, surištą tiksliai tuo pačiu mazgu, kaip ir kreivė, ribojanti paviršių. Stengdamiesi neperplėšti popieriaus, pabandykite iš to mazgo gauti jo paprasčiausią pavidalą, ir tada paaiškės, ar teisingai spėjote. Rezultatas gali būti visiškai nelauktas.

Septintajame pereito amžiaus dešimtmetyje britų fizikas Viljamas Tomsonas (vėliau tapęs lordu Kelvinu) sukūrė teoriją, pagal kurią atomai esą sudaryti iš sūkurinių žiedų nesuspaudžiamame, per viską pereinančiame, trinties neturinčiame eteryje. Vėliau kitas britų fizikas

Dž. Dž. Tomsonas molekules įsivaizdavo kaip kombinacijas įvairių mazgų ir grandinių, sudarytų iš Kelvino sūkurinių žiedų. Tomsono hipotezė sužadino fizikų domėjimąsi topologija (ja itin susidomėjo škotų fizikas Piteris Gutris Tetas), bet vos tik sūkurių teorija patyrė nesėkmę, šis domėjimasis iš karto nuslūgo. Tačiau galimas dalykas, kad jis vėl atgims dėl kai kurių neseniai atliktų cheminių tyrimų. Organinės chemijos specialistams pavyko susintetinti visiškai naujas medžiagas, pavadintas katenanais, kurių molekulės yra grandinėlių formos. Jos sudarytos iš sukabintų žiedų. Teoriškai galima susintetinti junginius, kurių molekulės turės grandinėlių, perpintų keisčiausiu būdu, formą. Išsamiau apie katenanus pasakojama Edelio Vasermano straipsnyje „Cheminė topologija“. * Kas žino, kokias nežemiškas savybes turėtų anglies junginiai, jeigu jų visos molekulės būtų surištos kokiu nors mazgu, pavyzdžiui, aštuoniukės formos mazgu, arba jeigu jos būtų sujungtos po tris, sudarydamos Boromėjaus žiedus?

Iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad gyvuose organizmuose neturėtų būti mazgų, tačiau iš patirties matome, jog taip nėra. Mikrobiologas Tomas D. Brokas atrado panašų į virvę mikrobą **, kuris daugindamasis susiriša į mazgą. Mazgas gali būti įvairių formų: aštuoniukės, trilapio, tiesioginis mazgas ir t. t. Mazgas veržiamas tol, kol virsta tiesiog „virvės“ sustorėjimu. Toje vietoje virvė trūksta, ir susidaro du nauji mikrobai. Perskaitę puikų D. Jenseno straipsnį „Hegfiš“ ***, sužinosite, kad viena vijūnų šeimos žuvis, susirišdama trilapiu, moka apsivalyti kūną nuo gleivių ir atlikti kitus stebinančius veiksmus.

O ką, jūsų nuomone, galima pasakyti apie žmones? Galbūt ir jie moka kokias nors savo kūno dalis surišti mazgais? Siūlau jums truputį pasėdėti, *sunėrus rankas,* ir pagalvoti.

ATSAKYMAS

Padarę iš popieriaus paviršių, pavaizduotą 56 paveiksle, ir perkirpę jį išilgai punktyro linijos, gausite juostelę „be pradžios ir galo“, kurioje nebus nė vieno mazgo.

* *Scientific American,* November 1962, p. 94—102.
** *Science,* 144, № 1620, May 15, 1964, p. 870—872.
*** *Scientific American,* February 1966, p. 82—90.

Drauge įrodysite, kad pradinio paviršiaus kraštas nebuvo surištas mazgu. Paviršius sudarytas taip, kad jo kraštas topologiškai ekvivalentus pseudomazgui, fokusininkų vadinamam Čefalo mazgui. Jis surišamas taip: surišant tiesioginį mazgą, vienas virvės galas prakišamas pirmiausiai pro viršutinę kilpą, paskui pro apatinę, dėl to, patraukus virvę už abiejų galų, mazgas išnyksta.

X skyrius

Transcendentinis skaičius *e*

Šita mažoji *e*
Taip piktina mane:
Pasakius atvirai,
Ji elgias negerai
Ir daro tai su sąžine ramia
(ypač atsižvelgiant į tai,
kad *e* — natūrinių logaritmų pagrindas).

Dž. A. Lindonas

Savo pirmojoje knygoje jau minėjau įdomius uždavinius, susijusius su dviem pagrindinėmis matematinėmis konstantomis — skaičiumi π ir auksiniu pjūviu φ. Šiame skyriuje nagrinėsime trečiąjį, ne mažiau svarbų pastovų dydį — skaičių *e*. Tam, kas nesidomi matematika arba gamtos mokslais, šis skaičius pasitaiko rečiau, negu π arba φ. Tačiau aukštojoje matematikoje skaičius *e* labai svarbus ir pasitaiko stačiai kiekviename žingsnyje. Skaičiaus *e* fundamentalumas labiausiai matyti, nagrinėjant kokio nors dydžio augimą. Sakykim, kad kažkas padėjo 1 dolerį į banką, išmokantį kasmet 4%. Jeigu procentai paprasti, kiekvienais metais indėlio suma išauga 4% pradinio kapitalo. Kiekvienas doleris po dvidešimt penkerių metų pavirs dviem doleriais. O jeigu bankas išmoka sudėtinius procentus, doleris augs sparčiau, nes, kievieną kartą apskaičiavus procentus, kapitalas šiek tiek padidėja ir jau kitą kartą procentas apskaičiuojamas nuo didesnės sumos. Juo dažniau perskaičiuojama ir prieaugis pridedamas prie pagrindinio kapitalo, juo sparčiau auga in-

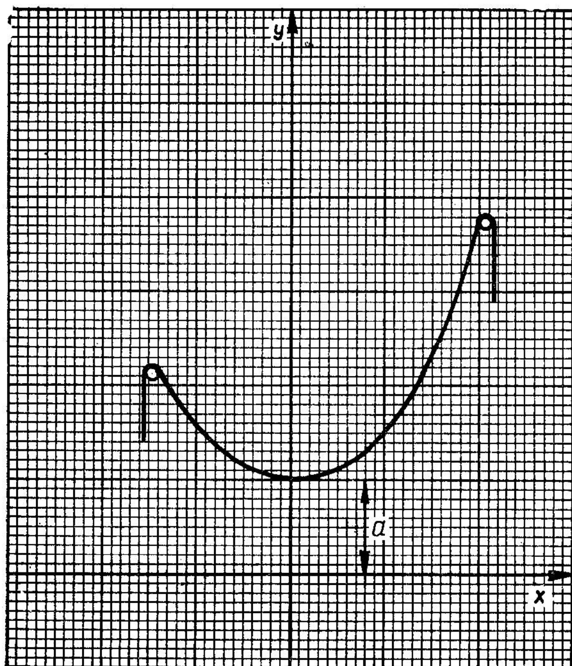
dėlis. Kasmet apskaičiuojant sudėtinius procentus, doleris po 25 metų duos $\left(1+\frac{1}{25}\right)^{25}$, t. y. 2,66 dolerio. Apskaičiuojant sudėtinius procentus kas pusmetį (jeigu bankas išmoka kasmet 4 (sudėtinius) procentus, indėlio prieaugis per kiekvienus šešis mėnesius sudaro 2%), doleris po 25 metų pavirs $\left(1+\frac{1}{50}\right)^{50}$, arba 2,69 dolerio.

Bankų reklaminiuose prospektuose ypač pabrėžiama, kiek kartų per metus apskaičiuojamas prieaugis. Nenusimanančiam gali atrodyti, kad, dažnai apskaičiuojant procentus (pavyzdžiui, perskaičiavus milijoną kartų per metus), per 25 metus doleris pavirs didele sumą. Iš tikrųjų nieko panašaus nebus.

Per 25 metus vienas doleris išaugtų iki dydžio $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$; čia n — prieaugio apskaičiavimų skaičius. Kai n artėja prie begalybės, reiškinys artėja prie ribos, lygios 2,718...; tai iš viso 3 centais daugiau už tą sumą, kuri būtų gaunama, prieaugį apskaičiuojant tik kartą per pusmetį. Ši riba ir vadinama skaičiumi e.

Sakykime, kad banke, išmokančiame paprastus procentus, vienas doleris per tam tikrą laiko intervalą „padvigubėja". Ištisai apskaičiuojant prieaugį, doleris per tą patį laiką pavirstų e doleriais nepriklausomai nuo to, kiek paprastų prieaugio procentų iš tikrųjų išmoka bankas. Tačiau per labai didelį laiko intervalą net ir labai mažas kasmetinis prieaugis pradinį kapitalą gali padidinti iki milžiniškos sumos. Jeigu kas nors pirmaisiais mūsų eros metais būtų padėjęs vieną dolerį į banką, išmokantį kasmet 4%, 1970 metais jo sąskaitoje būtų jau $(1{,}04)^{1970}$ dolerių, t. y. indėlio suma būtų išreiškiama maždaug trisdešimt penkių ženklų skaičiumi!

Ne visi dydžiai didėja taip, kaip didėja kapitalas mūsų nagrinėtuose pavyzdžiuose. Augimo, apie kurį kalbėta, tipas turi vieną labai svarbią ypatybę: bet kuriuo laiko momentu augimo greitis proporcingas dydžiui to, kas auga. Kitaip tariant, kintamojo dydžio pokyčio ir to dydžio dabartinės reikšmės santykis visuomet tas pat. Tokio tipo dydžiai kinta panašiai kaip sniego gniužulas, riedantis nuo kalno viršūnės: juo didesnis darosi gniužulas, juo sparčiau limpa prie jo sniegas. Šis augimo tipas būdingas daugeliui gyvosios ir negyvosios gamtos procesų. Visi jie išreiškiami formulėmis, į kurias įeina funkcija $y=e^{x}$.



57 pav. Grandininė linija.
Tokią formą įgyja kabanti grandinė. Šios kreivės lygtis yra tokia:

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{\frac{-x}{a}}\right).$$

Ši funkcija tokia svarbi, kad ji, skirtingai nuo kitų rodiklinių funkcijų, $y=a^x$, čia $a \neq e$ (pavyzdžiui, $y=2^x$), kitaip vadinama. Ji vadinama *eksponentine funkcija,* arba eksponente. Eksponentė tiksliai sutampa su savo išvestine. Tuo paaiškinama, kodėl taip dažnai eksponentė būna matematinės analizės formulėse. Inžinieriai dažniau naudojasi dešimtainiais logaritmais, matematinėje analizėje randami beveik vien tik natūriniai logaritmai, kurių pagrindas lygus skaičiui *e*.

Laikant leiną grandinę už abiejų galų, ji nusvyra kreive, kuri vadinama grandinine linija (57 pav.). Į šios kreivės lygtį, parašytą Dekarto koordinatėse, taip pat įeina skaičius *e*. Tokia pat lygtimi išreiškiamas vėjo išpūs-

tos burės pjūvis: jeigu vėjo greičio vertikali sudaromoji lygi nuliui, vėjas išlenkia burę taip pat, kaip vertikali žemės traukos jėga išlenkia grandinę. Maršalų, Karolinų salos, taip pat ir Gilberto salos — užgesusių povandeninių vulkanų viršūnės. Perkirtus vertikalia plokštuma, jos turėtų grandininės linijos formą. Grandininė linija nėra kūgio pjūvis, nors iš pažiūros labai primena parabolę. Iškirpus iš kartono parabolinį lekalą ir paritinus jį tiese, parabolės židinys nubrėš grandininę liniją.

Prancūzų entomologas Žanas Anri Farbas knygoje „Voro gyvenimas“ pateikia gražbylų grandininės linijos aprašymą: „Beprasmiškas skaičius *e* vėl pasirodo, tik šį kartą nubrėžtas voratinklyje. Išėję iš namų ūkanotą rytą, atidžiai įsižiūrėkite į per naktį suraizgytą voratinklį. Jo lipnūs siūlai, apkibę mažyčiais lašeliais, svyra nuo svorio naštos, sudarydami grandinines linijas, ir visas tinklas darosi panašus į daugybę vėrinių, lyg pakartojančių nematomo varpo bruožus. Vos tik saulės spinduliai prasiskverbia pro rūką, voratinklis ima tviskėti visomis vaivorykštės spalvomis, pavirsdamas žėrinčia briliantų keke, ir skaičius *e* prieš mus iškyla visa savo didybe“.

Kaip ir skaičius π, *e* — transcendentinis skaičius, t. y. jis negali būti kokios nors algebrinės lygties su racionaliaisiais koeficientais šaknis. Panašiai kaip skriestuvu ir liniuote negalima nubrėžti tiesės atkarpos, kurios ilgis atitinkamais vienetais tiksliai būtų lygus π, taip nėra būdo nubrėžti atkarpą, kurios ilgis būtų išreiškiamas skaičiumi *e*. Skaičių *e*, taip pat kaip ir skaičių π, galima parašyti tik dviem būdais: begaline ištęstine trupmena arba begaline eilute. Štai, pavyzdžiui, kaip skaičius *e* rašomas ištęstine trupmena:

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{\cdots}}}}}$$

Šią begalinę trupmeną XVIII amžiuje atrado įžymus matematikas Leonardas Oileris. Jis taip pat pirmasis įvedė simbolį *e*. (Galimas daiktas, kad Oileris pasirinko raidę *e* todėl, kad ji buvo sekanti balsė po *a*, kuria jis jau buvo pažymėjęs kitą dydį. Tačiau Oileris padarė tiek

daug atradimų, susijusių su skaičiumi e, kad pagaliau e pradėta vadinti „Oilerio skaičiumi".)

Reiškinį $(1+\frac{1}{n})^n$ išskaidę n laipsniais, gausime gerai žinomą eilutę, kurios suma lygi skaičiui e:

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...$$

Šauktukas čia reiškia faktorialą ($3!=1\cdot2\cdot3=6$, $4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$,..., $n!=1\cdot2\cdot3...(n-1)\cdot n$). Eilutė sparčiai konverguoja, todėl skaičių e nesunku apskaičiuoti bet kokio dešimtainio ženklo tikslumu (šiaip ar taip paprasčiau, negu π). 1952 metais Ilinojaus universiteto bendradarbiai apskaičiavo 60 000 skaičiaus e ženklų, o 1961 metais viena ESM mašina buvo gauti jau 100 265 skaičiaus e ženklai! (Šį kartą šauktukas jau nereiškia faktorialo.) Skaičiuje e, taip pat, kaip ir skaičiuje π, dešimtainiai ženklai niekur nenutrūksta, o rasti dėsnį, pagal kurį jie keičiasi, kol kas dar niekam nepavyko.

Ar yra koks nors ryšys, siejantis du žinomiausius transcendentinius skaičius π ir e? Taip, yra, ir ne vienas. Žinomiausia yra formulė, kurią išvedė Oileris, remdamasis vienu Abrahamo de Muavro atradimu:

$$e^{i\pi}+1=0.$$

„Lakoniškas, grakštus, kupinas gilios prasmės, — taip atsiliepia apie šį sąryšį E. Kasneris ir Dž. R. Njumenas knygoje „Matematika ir vaizduotė". * — Mes tik atkuriame jį, detaliai nenagrinėdami. Šį ryšį turi drauge tirti matematikai, gamtininkai ir filosofai." Pateiktame reiškinyje yra penki pagrindiniai dydžiai: 1, 0, π, e ir i ($=\sqrt{-1}$). Kasneris ir Njumenas pasakoja, kaip ši formulė nustebino Bendžaminą Pirsą (Harvardo universiteto matematiką, filosofo Čarlzo Sanderso Pirso tėvą). „Džentelmenai,— kreipėsi jis kartą į studentus, parašęs tą formulę lentoje,— aš įsitikinęs, kad parašytoji formulė absoliučiai paradoksiška. Mes nepajėgiame jos suprasti ir nežinome, ką ji reiškia, tačiau ją įrodėme ir todėl laikome, kad ji turi būti teisinga."

Skaičiaus n faktorialas lygus kėlinių iš n daiktų skaičiui, todėl nenuostabu, kad skaičius e pasitaiko tikimy-

* E. Kasner, J. R. Newman. Mathematics and imagination. London, Bell, 1950.

bių teorijos uždaviniuose apie kėlinius. Klasikinis yra uždavinys apie supainiotas skrybėles. Dešimt vyrų atidavė į rūbinę savo skrybėles. Išduodama numeriukus, rūbininkė juos supainiojo. Kokia tikimybė, kad bent vienas savininkas gaus savo skrybėlę? (Yra ir kitų to uždavinio formulavimų. Pavyzdžiui, galima kalbėti apie išsiblaškiusią sekretorę, kuri sudėjo kaip pakliuvo keletą laiškų į iš anksto adresuotus vokus. Kokia tikimybė, kad bent vienas laiškas pasieks savąjį adresatą? Arba: kartą visi jūreiviai buvo išleisti į krantą; jie sugrįžo išgėrę ir krito kaip negyvi į pirmus pasitaikiusius gultus. Kokia tikimybė, kad bent vienas jūreivis miega savo gulte?)

Norint išspręsti uždavinį, reikia žinoti du dydžius: pirma, visų kėlinių iš 10 skrybėlių skaičių ir, antra, „visiškai netvarkingų" kėlinių skaičių, t. y. skaičių kėlinių, kurių atveju nė vienas savininkas negauna savo skrybėlės. Pirmasis skaičius lygus 10!, t. y. 3 628 800. Tačiau vargu ar kas nors ryšis parašyti visus šiuos kėlinius, norėdamas iš jų išrinkti „visiškai netvarkingus". Laimei, yra vienas paprastas, nors šiek tiek ir neįprastas metodas reikiamam skaičiui rasti. Pasirodo, kad „visiškai netvarkingų" kėlinių skaičius iš n daiktų lygus sveikam skaičiui, artimiausiam trupmenai $\frac{n!}{e}$. Mūsų atveju toks sveikas skaičius yra 1 334 961, todėl tikimybė, kad nė vienas žmogus neatgaus savo skrybėlės, lygi $\frac{1\,334\,961}{3\,628\,800} = 0{,}367\,879\ldots$ Paskutinysis skaičius labai artimas $\frac{10!}{10!e}$. Suprastinę iš 10!, gausime $\frac{1}{e}$. Vadinasi, mūsų apskaičiuota tikimybė beveik nesiskiria nuo $\frac{1}{e}$. Tad tikimybė, kad visos skrybėlės supainiotos, mums žinoma. Aišku, kad visuomet įvyksta viena iš dviejų: arba visos skrybėlės yra supainiotos, arba bent viena jų atsidurs pas savininką. Vadinasi, atimdami $\frac{1}{e}$ iš 1 (tikro įvykio tikimybė lygi 1), gauname tikimybę, kad bent vienas žmogus atgauna savo skrybėlę. Taigi ieškomoji tikimybė pasirodo lygi 0,6321 arba beveik $\frac{2}{3}$.

Ką tik išspręstas uždavinys turi vieną keistą ypatybę: kai skrybėlių skaičius pasiekia šešis arba septynis,

tolesnis jo didėjimas faktiškai neturi įtakos rezultatui. Nepriklausomai nuo žmonių skaičiaus (jų gali būti dešimt ar dešimt milijonų) tikimybė, kad viena arba daugiau skrybėlių atsidurs pas savininką, lygi 0,6321. Žemiau pateiktoje lentelėje matyti, kad tikimybė, jog niekas negaus savo skrybėlės, labai greitai pasiekia ribą, lygią $\frac{1}{e}$ =0,3678794411. Dešimtainė trupmena, esanti paskutinėje lentelės skiltyje, be galo daug kartų įgyja reikšmę, šiek tiek didesnę arba mažesnę už ribinę.

Yra įdomus būdas patikrinti, ar gautasis rezultatas teisingas. Tai galima padaryti, žaidžiant tokį kortų žaidimą (šiek tiek panašų į soliterį). Kruopščiai sumaišę kortas, dėstykite jas po vieną ant stalo paveikslėliais į viršų, garsiai vardydami visas 52 kortas iš anksto sumanytu nuoseklumu (pavyzdžiui, iš pradžių visas lapų spalvos kortas nuo tūzo iki karaliaus, paskui iš eilės visas čirvų spalvos kortas, po to — gilių ir būgnų). Laimėsite, jeigu bent viena korta bus dedama ant stalo tuo momentu, kai sakysite jos pavadinimą. Kokia tikimybė jums laimėti šį žaidimą ir kokia — pralaimėti?

Skrybėlių skaičius	Kėlinių skaičius	Skaičius kėlinių, kurių atveju nė viena skrybėlė neatsiduria pas savininką	Tikimybė, kad niekas neatgaus savo skrybėlės
1	1	0	0
2	2	1	0,5
3	6	2	0,333 333
4	24	9	0,375 000
5	120	44	0,366 666
6	720	265	0,3 778 014
7	5 040	1 854	0,367 857
8	40 320	14 833	0,367 881
9	362 880	133 496	0,367 879
10	3 628 806	1 334 961	0,367 879
11	39 916 800	14 684 570	0,367 879
12	479 001 600	176 214 841	0,367 879

Nesunku suprasti, kad uždavinys identiškas uždaviniui apie skrybėles. Intuityviai atrodo, kad tikimybė laimėti maža: geriausiu atveju neviršija $\frac{1}{2}$. O iš tikrųjų, kaip jau matėme, ji lygi $\left(1-\frac{1}{e}\right)$, t. y. beveik $\frac{2}{3}$! Tai reiškia, kad, esant pakankamai žaidimų serijai, galite tikėtis laimėti maždaug dvi partijas iš trijų.

Pirmieji dvidešimt skaičiaus e ženklų po kablelio yra tokie: 2,71828182845904523536. Yra tokia nuostabi trupmena $\frac{355}{113}$; remdamiesi ja, galime gauti π reikšmę su šešiais dešimtainiais ženklais. Trupmenos, išreiškiančios skaičių e šešiais dešimtainiais, skaitiklis ir vardiklis turi būti mažiausiai keturženkliai skaičiai $\left(\text{pavyzdžiui, } \frac{2721}{1001}\right)$. Norint apskaičiuoti e su keturiais ženklais, galima sugalvoti trupmeną, kurios skaitiklis ir vardiklis sudaryti ne daugiau kaip iš trijų skaitmenų. Pradėję ieškoti tokių trupmenų, greitai įsitikinsite, kad tai labai sudėtinga. Mėgstantiems skaičiuoti siūlau rasti trupmeną su triženkliu skaitikliu ir vardikliu, kuri būtų geriausias skaičiaus e galimas artinys.

Daugelis skaitytojų atsiuntė man gana netikėtų uždavinių, kuriuose skaičius e arba iš karto buvo atsakymas arba įėjo į jį. Čia pateiksiu tik du iš jų. Su kuria n reikšme n-tojo laipsnio šaknis iš n turi didžiausią reikšmę? *Atsakymas:* kai $n=e$*.

Sakykime, kad jūs kaip pakliuvo renkatės bet kuriuos realiuosius skaičius iš intervalo nuo 0 iki 1 tol, kol jų suma nepasidarys didesnė už 1. Kam lygus atsitiktinai parinktų dėmenų skaičiaus matematinis vidurkis? *Atsakymas:* skaičiui e. **

Prieš keletą metų, pirmą kartą susidūręs su įžymiąja Oilerio formule, siejančia skaičius π ir e bei menamąjį vienetą i, susidomėjau, ar galima šį sąryšį pavaizduoti grafiškai. Man nepavyko to padaryti, bet L. U. Ch. Chalas straipsnyje „Konvergavimas Argano diagramoje" *** pasiūlė, kaip paprastai ir puikiai traktuoti uždavinį. Iš pradžių Chalas $e^{i\pi}$ išskleidžia begaline eilute, kuri paskui atvaizduojama kompleksinėje plokštumoje begalinio vektorių rinkinio suma. Dėl to, kad kiekvienas eilutės narys skiriasi nuo prieš jį esančio daugikliu i, kiekvienas vektorius, atitinkąs bet kurį eilutės narį, pasuktas vektoriaus, atitinkančio pirmesnįjį narį, atžvilgiu 90°. Visa diagrama kompleksinėje plokštumoje turi spiralės, kurią sudaro vis mažėjančio ilgio atkarpos ir kuri susisuka taške $-1+0i$, formą.

* H. Dörrie. 100 Great Problems of Elementary Mathematics, N. Y., 1965, p. 359.
** *Amer. Math. Monthly,* January 1961, p. 18, problem 3.
*** *Mathematical Gazette,* 43, № 345, October 1959, p. 205—207.

Nedaugeliui žinomas toks įdomus uždavinys su skaičiais π ir *e:* nesiremiant lentelėmis ir neskaičiuojant raštu, nustatyti, kuris iš dviejų skaičių didesnis: e^{π} ar π^{e}? Išspręsti šį uždavinį galima daugeliu būdų.

ATSAKYMAI

Kokia trupmena, kurios ir skaitiklis, ir vardiklis sudarytas ne daugiau kaip iš trijų skaitmenų, yra geriausias skaičiaus *e* artinys? *Atsakymas:* trupmena $\frac{878}{323}$. Ji, parašyta dešimtaine forma, yra tokia: 2,71826..., t. y. skiriasi nuo *e* tik penktuoju ženklu po kablelio (skaitinių kuriozų mėgėjams: šios trupmenos skaitiklyje ir vardiklyje yra skaičiai palindromai, vienodai skaitomi iš dešinės į kairę ir iš kairės į dešinę. Skaitiklio ir vardiklio skirtumas, lygus 555, taip pat išreiškiamas skaičiumi palindromu). Skaitiklyje ir vardiklyje nubraukus po vieną skaitmenį, gautoji trupmena yra $\frac{87}{32}$ geriausias skaičiaus *e* artinys tarp trupmenų su dviženkliu skaitikliu ir vardikliu.

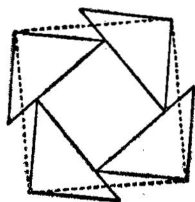
XI skyrius

Figūrų pjaustymo geometriniai uždaviniai

Prieš daug tūkstančių metų kažkuriam pirmykščių žmonių pirmą kartą pasitaikė galvosūkis — figūrų pjaustymo geometrinis uždavinys. Buvo, matyt, taip. Pirmykštis žmogus turėjo didelį, netaisyklingos formos kažkokio gyvūno kailį. Jį reikėjo supjaustyti į dalis, paskui iš naujo susiūti, norint gauti reikiamą kailio formą. Kaip padaryti, kad pjūvių ir siūlių būtų kuo mažiau? Tokių uždavinių sprendimas įdomiajai geometrijai atskleidžia neaprėpiamą veiklos lauką.

Daugelio paprastų pjaustymo uždavinių sprendimus atrado dar senovės graikai, tačiau pirmąjį sisteminį traktatą šia tema parašė Abul-Vefas, įžymus X amžiaus per-

sų astronomas, gyvenęs Bagdade. Iki mūsų išliko atskiri jo knygos fragmentai — tikri perlai. 58 paveiksle parodyta, kaip Abul-Vefas tris vienodus kvadratus supjaustė į devynias dalis, iš kurių paskui sudėjo vieną didelį kvadratą. Du kvadratus jis perpjovė išilgai įstrižainių, o keturis gautus trikampius išdėliojo apie nepjaustytąjį kvadratą. Dar keturiais pjūviais (išilgai punktyro linijos) uždavinys baigiamas spręsti.



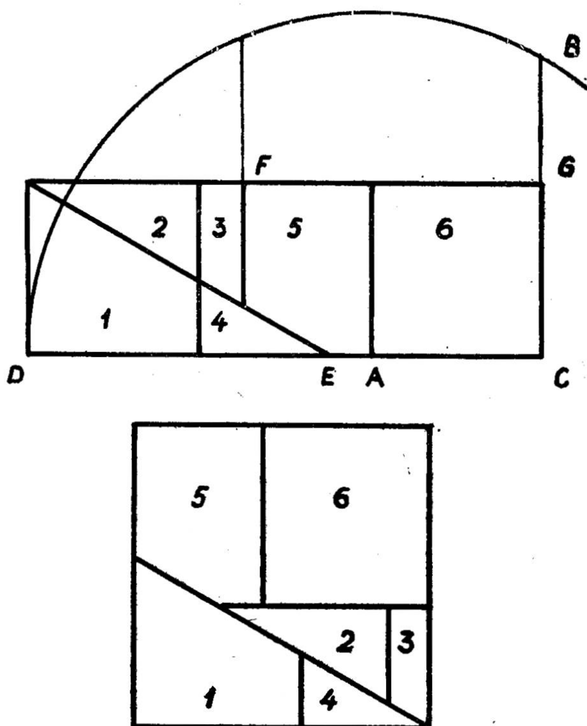
58 pav. Abul-Vefo uždavinio sprendimas (trys kvadratai padalyti į 9 dalis)

Geometrai rimtai pradėjo domėtis figūrų pjaustymo į mažiausią dalių skaičių uždaviniais (vėliau iš tų dalių sudarydami kokią nors naują figūrą) tik mūsų amžiaus pradžioje. Vienas šio patrauklaus geometrijos skyriaus kūrėjų buvo įžymus galvosūkių sudarytojas anglas Henris E. Djudenis. 59 paveiksle parodyta, kaip jis išsprendė Abul-Vefo uždavinį. Trys kvadratai supjaustyti tik į 6 dalis! Rekordas išsilaikė iki šiol.

Mūsų dienomis galvosūkių mėgėjai geometrinių figūrų pjaustymo uždaviniais domisi dėl daugelio priežasčių, visų pirma, dėl to, kad tokiems uždaviniams spręsti nėra universalaus metodo ir kiekvienas, kuris imasi tokio uždavinio, gali visiškai remtis savo intuicija ir pademonstruoti kūrybinio mąstymo sugebėjimus. Kadangi čia nebūtina gerai mokėti geometriją, mėgėjai kai kada gali net aplenkti (ir iš tikrųjų aplenkia) profesionalius matematikus. Be to, daugeliu atvejų nepavyksta įrodyti, kad supjaustyta, gaunant mažiausią dalių skaičių. Rekordų lenteles tenka nuolat tikslinti, nes, žiūrėk, atsiranda naujų, paprastesnių senų uždavinių sprendimų.

Ypač daug ankstesnių figūrų pjaustymo rekordų (daugiau, negu bet kuris kitas iš dabar gyvenančių žmonių) yra pagerinęs Australijos patentų biuro ekspertas Haris Lindgrenas. Jis yra didžiausias figūrų pjaustymo specialistas. Svarbiausiu pjaustymo geometrijos istorijos įvykiu iš tiesų laikytinas jo knygos „Pjaustymo geometrija“ * pasirodymas. Tai didžiausias veikalas figūrų pjaustymo

* H. Lindgren. Geometric Dissections, Princenton, Van Nostrand, 1964.



59 pav. Kitas to paties uždavinio sprendimas (trys kvadratai supjaustyti tik į 6 dalis). Apskritimo centras yra taške A. $BC=DE=FG$

tema. Matyt, Lindgreno knyga daugelį dešimtmečių atstos savotišką tos geometrijos srities enciklopediją. Joje nurodyti visi rekordiniai pjaustymai, išskyrus neseniai atrastą būdą, kaip iš 13 taisyklingo dešimtkampio dalių sudėti taisyklingą septyniakampį.

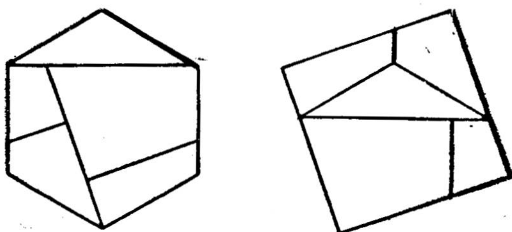
Lindgrenas išnagrinėjo visokiausių figūrų pjaustymo uždavinius, tame tarpe plokščių figūrų su kreiviniais kontūrais ir trimačių figūrų (kiek žinoma, nė vienas pjaustymo uždavinių mėgėjų kol kas dar nepradėjo domėtis daugiau kaip trijų matavimų erdvės figūromis!), bet daugiausia dėmesio jis skyrė daugiakampiams. Nesunku įrodyti, kad kiekvieną daugiakampį galima supjaustyti į baigtinį skaičių dalių, kurios, sudėjus jas kitokia tvarka,

	a	b	c	d	e	f
Kvadratas	4					
Penkiakampis	6	6				
Šešiakampis	5	5	7			
Septyniakampis	9	9	11	11		
Aštuoniakampis	8	5	9	9	13	
Devyniakampis	9	12		14		
Dešimčiakampis	8	8	10	9	13	12
Dvylikakampis	8	6		6		

60 pav. Daugiakampių pjaustymo rekordai (1968 m. duomenys): *a* — trikampis; *b* — kvadratas; *c* — penkiakampis; *d* — šešiakampis; *e* — septyniakampis; *f* — aštuoniakampis

sudaro bet kokį kitą daugiakampį, lygiaplotį pirmajam. Kur kas sunkiau rasti dalių, į kurias supjaustomas daugiakampis, skaičiaus minimumą.

Lindgreno sudarytoji lentelė (60 pav.) rodo, kokie 1968 m. buvo taisyklingų daugiakampių pjaustymo rekordai (kiekvienam daugiakampiui skirta speciali lentelės grafa). Langelyje, ties kuriuo susikerta atitinkama grafa ir eilutė, nurodytas mažiausias skaičius dalių, iš kurių galima sudaryti ir daugiakampį, nurodytą po grafa, ir daugiakampį, pavaizduotą atitinkamos eilutės kairėje. Asimetrines dalis, reikalui esant, galima apversti „blogąja puse aukštyn“, bet sprendimas be apvertimo laikomas geresniu. 61 paveiksle parodyta, kaip Lindgrenas taisyklingą šešiakampį pavertė kvadratu. Lindgreno būdas skiriasi nuo plačiau žinomo būdo, kurį Djudenis paskelbė 1901 metais (Djudenio sprendime taisyklingas šešiakampis ir kvadratas taip pat supjaustomi į 5 dalis). Tais atvejais, kai minimalus dalių skaičius gaunamas, pjaustant keliais būdais, sprendimai beveik visada visiškai skiriasi vienas nuo kito.

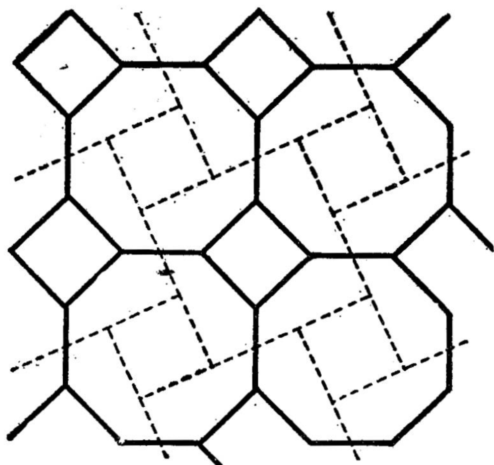


61 pav. Kaip iš taisyklingo šešiakampio, supjaustyto į 5 dalis, gauti kvadratą

Nuo ko reikia pradėti spręsti pjaustymo uždavinį? Štai, pavyzdžiui, vienas iš Lindgreno metodų. Kiekvieną figūrą (suprantama, lygiaplotę) iš pradžių reikia kokiu nors paprastu pjūviu pertvarkyti į figūrą su lygiagrečiomis kraštinėmis taip, kad, sujungę vieną po kitos tris ar keturias naujas figūras, gautume juostelę su lygiagrečiais kraštais. Nubraižę abi juosteles ant kalkės, uždėkime jas vieną ant kitos ir pasukime, stebėdami, kad kiekvienos juostos kraštai praeitų per kitos juostos taškus, kuriuos Lindgrenas pavadino „kongruentiniais". Po kelių bandymų pavyksta rasti geriausią sprendimą.

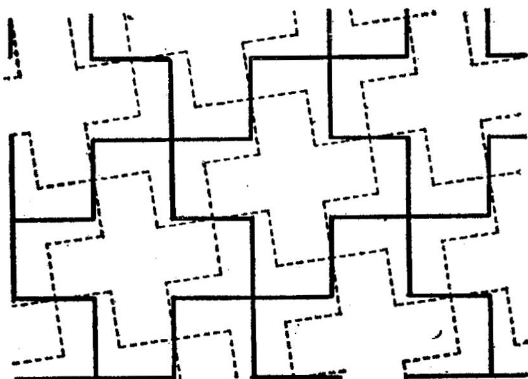
Kitas Lindgreno metodas taikytinas tais atvejais, kai kiekvienas daugiakampis gali būti panaudotas kaip elementas visą plokštumą užpildančio parketo. Pavyzdžiui, iš mažų kvadratų ir stambesnių aštuoniakampių galima sudėti parketą, pavaizduotą 62 paveiksle. Uždėkime ant jo kitą parketą, sudarytą iš didelių kvadratų, kurie lygiapločiai su aštuoniakampiais, ir tų pačių matmenų mažų kvadratų, kurių buvo ir pirmajame parkete (62 paveiksle antrasis parketas pavaizduotas punktyru). Gautąjį sprendinį — kvadrato sudarymą, supjausčius taisyklingą aštuoniakampį į 5 dalis — pirmasis atrado ir 1933 metais paskelbė galvosūkių sudarytojas anglas Džeimsas Traversas.

Apie Lindgreno virtuoziškumą iš dalies galima spręsti iš to, kad jis sugebėjo iš devynių kvadrato dalių sudaryti, pirma, lotynišką kryžių ir lygiakraštį trikampį, antra, taisyklingą šešiakampį ir lygiakraštį trikampį, ir, tre-



62 pav. Kvadrato sudarymas, pjaustant taisyklingą aštuoniakampį į 5 dalis parketo metodu

čia,- taisyklingą aštuoniakampį ir graikišką kryžių (supjaustymas visais trim atvejais skirtingas). Lindgrenas taip pat atskleidė būdą, kaip iš 12 dalių supjausčius graikišką kryžių galima gauti tris mažesnius vienodų matmenų kryžius. „Pagerinti pasiektą rezultatą buvo nelengva",— autoritetingai pareiškė Lindgrenas, turėdamas galvoje Djudenio būdą trims mažiems graikiškiems kryžiams gauti, supjausčius didesnį graikišką kryžių į 13 dalių. Kur



63 pav. Mažesnių matmenų graikiškų kryžių sudarymas iš graikiško kryžiaus parketo metodu

kas lengvesnį uždavinį — dviejų vienodų mažesnių matmenų kryžių sudarymą, supjausčius graikišką kryžių, — Djudenis išsprendė, supjaustęs didįjį kryžių į 5 dalis. Nežinia, ar jis šiuo atveju naudojosi Lindgreno vienas ant kito uždėtų parketų metodu, ar ne. Lindgrenas pastebėjo, kad šį metodą ypač patogu pritaikyti graikiškiems kryžiams. Uždėję vienas ant kito du parketus (63 pav.), vieną — sudarytą iš didelių kryžių, kitą — iš mažų, iš karto gausime Djudenio sprendinį.

Djudenis kartą pasakė, kad tam, kas domisi pjaustymo uždaviniais, „retai kada pasitaiko išvengti grožio pojūčio. Visada malonu stebėti gamtos dėsningumus, bet ypač stiprų įspūdį jie daro tada, kai atsiskleidžia tiesiog akyse. Net ir visai nemokančiam geometrijos sunku susilaikyti, nesušukus „O, kaip gražu!“, kai jis mato tokius dalykus. Aš pažįstu keletą žmonių, kurie rimtai pradėjo domėtis geometrija, patyrę pjaustymo uždavinių sprendimo žavesį.“

XII skyrius

Ketvirtojo Matavimo bažnyčia

Aleksandras Poupas kartą apibūdino Londoną kaip „mielą, juokingą miestą, išsklaidantį liūdesį“. Kažin ar kas nors prieštaraus šiai nuomonei. Todėl, ruošdamasis tariamai aplankyti Londoną, ieškodamas naujų uždavinių ir galvosūkių, nesitikėjau, kad jis žada man ką nors ypatinga. Laimei, mano lūkesčiai nepasitvirtino.

...Sėdėjau viešbučio, esančio už dviejų kvartalų nuo Pikadilio aikštės, kambaryje, peržiūrėdamas Londono „Taims“. Staiga mano dėmesį patraukė toks skelbimas:

> „Jeigu jūs pavargote nuo trimačio pasaulio, aplankykite sekmadienio pamaldas Ketvirtojo Matavimo bažnyčioje. Pamaldos prasideda vienuoliktą valandą Platono oloje.
>
> Šventasis Artūras Sleidas,
> Ketvirtojo Matavimo bažnyčios šventikas“.

Išsikirpau skelbimą ir pirmąjį sekmadienį leidausi nurodytu adresu. Lauke buvo drėgna ir šalta, nuo jūros dvelkė lengvas rūkas. Pasukęs už kampo, netikėtai pamačiau kažkokį keistą statinį. Keturi didžiuliai kubai stūksojo vienas ant kito, o prie kiekvienos šoninės trečiojo iš apačios kubo sienos buvo prilipdyta dar po vieną tokį patį kubą. Iš karto supratau, kad tai keturmačio hiperkubo išklotinė. Panašiai kaip supjaustę trimatį kubą išilgai septynių briaunų, gausime jo išklotinę, turinčią dvimačio lotyniško kryžiaus formą (tokios formos neretai pasitaiko viduramžių bažnyčios išplanavime), keturmatį hiperkubą galima supjaustyti išilgai septyniolikos kvadratų ir gauti jo išklotinę, turinčią trimačio lotyniško kryžiaus formą.

Šypsodamasi jauna moteris, stovėjusi prie durų, parodė man sraigtinius laiptus, kurie vedė į rūsį. Nusileidęs žemyn, patekau į patalpą, labai primenančią kino salę, įrengtą klinčių oloje. Jos centrinė siena buvo nudažyta baltai. Palubėje vaiskiai žėrėjo kiek peršviečiami šviesiai rožiniai stalaktitai; nuo jų urvas rausvai švytėjo. Palei sienas stūksojo didžiuliai stalagmitai. Iš visų pusių, kaip fantastiniame filme, sklido elektroninių vargonų garsai. Prisilietęs prie stalagmito, pajutau, kad jis po mano ranka vibruoja, tartum šaltas akmeninio ksilofono klavišas.

Aš atsisėdau. Keista muzika dar skambėjo apie dešimt minučių. Paskui garsai ėmė tilti, o plūstanti iš viršaus šviesa — gesti. Kažkur užpakaly pasirodė melsvokas švytėjimas. Laipsniškai jis darėsi vis vaiskesnis, ir ant baltos sienos prieš mane ryškėjo besimeldžiančiųjų galvų šešėliai. Atsigręžęs kažkur tolumoj pamačiau vos pastebimą šviečiantį tašką.

Muzika nutilo, ir oloje pasidarė visai tamsu. Tik centrinė siena toliau ryškiai švietė. Staiga ant jos pasirodė kunigo šešėlis. Paskelbęs, kad skaitys Laišką efesiečiams (3 skyrius, 17—18 eilutės), kunigas pradėjo pamokslą. Jo žemas skambus balsas, atrodė, sklido tiesiai nuo šešėlio.

— ...Kad jūs, palaiminti dievo meilėje, galėtute su visais šventaisiais suvokti, jog plotis, ir ilgis, ir gylis, ir aukštis...

Bažnyčioje buvo perdaug tamsu, kad galėčiau ką nors užsirašyti, bet, kiek įsiminiau, pagrindinė Sleido pamokslo mintis buvo tokia.

Mus supantis kosmosas, t. y. pasaulis, kurį matome, girdime, jaučiame, yra neaprėpiamas keturmatės jūros trimatis „paviršius“. Intuityviai jausti ir mintyse įsivaizduoti šį „visiškai kitą“ aukštesnio matavimų skaičiaus pasaulį kiekviename amžiuje sugeba tik keletas išrinktųjų pranašų. Kiti prasiskverbia į hipererdvę netiesiogiai, analogiškai. Įsivaizduokite Flatlandiją — dvimatę šešėlių, panašių į šešėlius ant sienos įžymiojoje Platono oloje (žr. Platonas, „Respublika“, 7 skyrius), šalį. Tačiau šešėliai nematerialūs, todėl patogiau laikyti, kad Flatlandijoje visi objektai yra be galo ploni, lygūs vienos fundamentaliųjų Flatlandijos dalelių skersmeniui. Įsivaizduokim, kad tos dalelės plaukioja kokio nors skysčio lygiu paviršiumi. Jų šokis paklūsta dvimačio pasaulio dėsniams, todėl Flatlandijos gyventojams, kurių kūnai sudaryti iš šių dalelių, niekuomet nelemta suprasti, kad, be dviejų jiems žinomų matavimų, yra ir trečiasis, statmenas dviem Flatlandijos matavimams.

Tačiau, gyvenant trimačiame pasaulyje, galima pamatyti bet kurią dalelę Flatlandijoje. Mes matome visa, kas vyksta jų namuose ir kiekvieno flatlandiečio viduje. Neįkišdami piršto į jų kūną, galime paliesti kiekvieną jo dalelę. Ištempus flatlandietį iš uždaryto kambario per trečią matavimą, jam tai atrodys stebuklas.

Analogiškai mūsų trimatis pasaulis plaukioja gigantiško keturmačio hiperokeano ramiu paviršiumi; savo laiku Einšteinas spėjo, kad tas okeanas gali būti didžiulė hipersfera.

Keturmatėje erdvėje mūsų pasaulio storis lygus fundamentaliosios dalelės skersmeniui. Mūsų pasaulio dėsnius nusako hiperjūros „paviršiaus įtampos“ žaidimas. Hiperjūros paviršius vienalytis, nes priešingu atveju mūsų fizikos dėsniai pasirodytų esą nevienalyčiai. Nedidelis jūros paviršiaus kreivumas sukelia nedidelį pastovų mūsų erdvės — laiko — kreivumą. Hipererdvėje taip pat egzistuoja laikas. Nagrinėjant laiką kaip ketvirtą koordinatę, hiperpasaulyje atsiras penki matavimai. Elektromagnetinės bangos yra hiperjūros paviršiaus svyravimai. Sleidas pabrėžė, kad tik taip galima išvengti paradokso apie energijos perdavimą tuščioje erdvėje.

O kas yra už jūros paviršiaus? Visiškai kitas pasaulis, kuriame viešpatauja dievas! Teologams daugiau nebeteks išsisukinėti iš esančio prieštaravimo tarp abstrakcijos ir

dievo nuolatinio egzistavimo. Bet kuris trimatės erdvės taškas priklauso ir hipererdvei, todėl bet kuriam iš mūsų dievas yra arčiau, negu paties alsavimas. Jis mato kiekvieną mūsų pasaulio dalelę ir gali ją paliesti, neapsireikšdamas iš anapus mūsų erdvėje. Ir vis dėlto dievo karalystė yra visiškai už trimačio pasaulio ribų tokia kryptimi, kurios mes nė neįstengiame nurodyti.

Pasaulis buvo sukurtas prieš milijardus metų, kai dievas nukreipė (šioje vietoje Sleidas padarė pauzę ir paaiškino, kad tai, kas pasakyta, reikia suprasti perkeltine prasme) į hiperjūros paviršių srautą hiperdalelių, turinčių asimetrišką trimatį pjūvį. Vienos šių hiperdalelių, turėdamos dešiniąją simetriją, pateko į trimatę erdvę ir pavirto neutronais; kitos, turinčios kairiąją simetriją, sudarė antineutronus. Priešingo pobūdžio dalelės poromis anihiliavosi viena su kita. Kiekvieną anihiliaciją lydėjo baisus sprogimas. Kadangi, krintant hiperdalelėms, neutronų susidarė šiek tiek daugiau, jų perteklius nebuvo sunaikintas. Didesnė likusių neutronų dalis, suskildama į protonus ir elektronus, sudarė vandenilio atomus. Taip prasidėjo mūsų „vienpusio“ materialaus pasaulio evoliucija. Sprogimo veikiamos dalelės ėmė plisti Visatoje, ir iki šiol dievas, norėdamas palaikyti šią besiplečiančią Visatą maždaug stabilią, periodiškai paima iš savo atsargų saują hiperdalelių ir jas sviedžia į jūrą, papildydamas Visatos materiją. Dalelės, vadinamos antineutronais, anihiliuojasi, o dalelės, vadinamos neutronais, toliau egzistuoja. Kiekvieną kartą, kai laboratorijoje gimsta antidalelė, matome, kaip keturmatėje erdvėje „apsiverčia“ simetriška dalelė. Šis reiškinys visiškai analogiškas nesimetriško plokščio kartono gabalo apsivertimui „aukštyn kojomis“ trijų matavimų erdvėje. Taigi antidalelių susidarymą galima laikyti eksperimentiniu keturių matavimų erdvės egzistavimo įrodymu.

Baigdamas pamokslą, Sleidas pateikė citatą iš neseniai atrastos Tomo Evangelijos: „Jeigu tau dvasios tėvas pasakys: „Žinok, Dievo Karalystė Danguje“, — kelią tau parodys paukščiai. Jeigu jis pasakys tau, kad ji jūroje, kelią tau parodys žuvys. Tačiau Dievo Karalystė pačiame tavyje ir aplink tave“.

Vėl suskambo nežemiška vargonų melodija. Mėlynas švytėjimas užgeso, ir olą agaubė tamsa. Rausvi stalaktitai

palubėje iš naujo laipsniškai sušvito, ir aš užsimerkiau iš nuostabos, išvydęs, kad vėl esu trimatėje erdvėje.

Sleidas, aukštas tamsiaplaukis vyras su juodais ūsiukais, stovėjo prie įėjimo į olą ir sveikino tuos, kurie klausė jo pamokslo. Kai mes spaudėme vienas kitam rankas, aš prisistačiau.

— Kaip gi, kaip gi! — sušuko Sleidas. — Aš turiu kai kurias jūsų knygas. Jūs neskubate? Aš greitai būsiu laisvas, ir mes galėtume pasikalbėti.

Atsisveikinęs su paskutiniu parapijiečiu, Sleidas nusivedė mane prie sraigtinių laiptų, esančių priešingoje pusėje negu tie, kuriais aš nusileidau. Pakilome į pastoriaus kabinetą, esantį pačiame viršutiniame kube. Prie sienų stovėjo įvairiausi sudėtingi modeliai, vaizduojantys hiperstruktūrų projekcijas į trimatę erdvę. Ant vienos sienos kabėjo didelė Salvadoro Dalio paveikslo „Hiperkubo nukryžiavimas" reprodukcija. Paveiksle buvo pavaizduotas plokščias languotas paviršius, virš kurio sklendė trimatis aštuonių kubų kryžius, vaizduojantis lygiai tokią pačią hiperkubo išklotinę kaip bažnyčia, kurios viduje aš buvau.

— Pasakykite, Sleidai, — paklausiau, kai mes susėdome, — tai jūsų paties idėja ar kokių nors senų tradicijų tęsinys?

— Ne, idėja anaiptol nenauja, — atsakė Sleidas, — tačiau manau turįs teisę tvirtinti, kad man priklauso pirmosios bažnyčios, pagrįstos hipertikėjimu, įkūrimo garbė. Platonas, žinoma, neturėjo jokio supratimo apie ketvirtąją koordinatę geometrijoje, tačiau jo naudojamos analogijos su ola akivaizdžiai rodo, kad ketvirtasis matavimas yra. Iš tikrųjų aišku, kad bet kokia Platono dualizmo forma, kuomet visa, kas egzistuoja, dalijama į gamtiška ir antgamtiška, yra stačiai nematematinis būdas kreiptis į aukštesnio matavimo erdves. Henris Moras, XVII amžiaus filosofas, Platono pasekėjas iš Kembridžo, pirmasis istorijoje priskyrė bažnyčios pasauliui keturis matavimus. Sekantis buvo Imanuilas Kantas, kuris laikė erdvę ir laiką tam tikromis subjektyviomis linzėmis, pro kurias matome tik ploną abstrakčios realybės sluoksnį. Po viso, kas pasakyta, lengva suprasti, kad erdvės su didesniu matavimų skaičiumi koncepcija tampa jungiančia grandimi tarp šiuolaikinio mokslo ir visų pripažintų religijų.

— Jūs pasakėte „religijų“, — pertraukiau aš. — Ar tai reiškia, kad jūsų bažnyčia nėra krikščioniška?

— Tik ta prasme, kad mes sugebame įžvelgti tiesą bet kuriame pasauly egzistuojančiame tikėjime. Noriu dar pridurti, kad per keletą paskutiniųjų dešimtmečių teologai protestantai, gyvenantys kontinentinėje Europoje, pagaliau taip pat atrado ketvirtąjį matavimą. Kalbėdamas apie „vertikalųjį“ arba „statmenąjį“ matavimą, Karlas Bartas aiškiai suteikia šiems žodžiams erdvės keturmatiškumo prasmę. Ir jau, žinoma, išsamiausiai aukštesnio matavimo erdvė pripažįstama Karlo Haimo teologijoje.

— Na, gerai,— tariau aš.— Neseniai perskaičiau įdomią knygą „Fizikas ir Krikščionis“. Jos autorius — Viljamas T. Polardas — Okridžo Branduolinių tyrimų instituto administracinis direktorius ir kartu vyskupijos kunigas. Jis labai aštriai kritikuoja Haimo koncepciją apie hipererdvę.

Sleidas greitai užsirašė knygos pavadinimą.

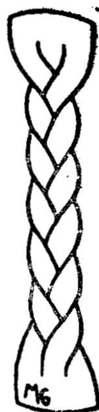
— Reikės ją paskaityti. Įdomu, ar žino Polardas, kad antrojoje praėjusio amžiaus pusėje nemažai protestantų rašė knygas apie ketvirtąjį matavimą. Galima paminėti, pavyzdžiui, A. T. Šofildo knygą „Kitas pasaulis“, išleistą 1888 metais, arba Artūro Vilinko knygą „Neregimo pasaulis“, išėjusią 1893 metais (ji turėjo paantraštę „Apybraiža apie aukštesniojo matavimo erdvių ryšį su amžinybe“). Dėl to tarp šiuolaikinių okultistų ir spiritistų taip pat buvo nemažai ginčų. Daug įdomaus galima, pavyzdžiui, perskaityti Peterio D. Uspenskio knygose, nors dauguma jo teiginių grindžiama amerikiečių matematiko Čarlzo T. Hintono idėjomis. 1920 metais anglų parapsichologas Uoteli Keringtonas pseudonimu U. Uoteli Smitas, parašė kiek neįprastą knygą apie „Mechanizmo išlikti gyvam teoriją“.

— Jis turėjo galvoje likti gyvam po mirties?

Sleidas papurtė galvą.

— Aš negaliu sutikti su Keringtonu, tikinčiu, kad nematomu svertu galima apversti stalą, arba aiškiaregystę laiko sugebėjimu matyti iš kokio nors taško, esančio aukštesniojo matavimo erdvėje, tačiau svarbiausios jo hipotezės man atrodo protingos. Mūsų kūnai yra trimačiai mūsų pačių pjūviai, bet tik keturmatėje erdvėje. Žmogus, aišku, paklūsta visiems mūsų pasaulio dėsniams, ir drauge jo gyvenimiška patirtis nuolat užrašoma (panašiai, kaip kaupiama informacija) toje jo „aš“ dalyje, kuri priklauso ket-





64 pav. Nejaugi šią odinę juostelę galima supinti tik keturmatėje erdvėje?

virtajai koordinatei. Kai žmogaus kūnas nustoja egzistavęs trimatėje erdvėje, šis įrašas saugomas tol, kol atsiranda naujas kūnas, kuriame įrašas pasikartos nauju gyvenimo ciklu, tik kitame trimačiame objekte.

— Man tai patinka,— tariau aš. Tuomet visiškai paaiškinama mūsų pasaulyje esanti sielos priklausomybė nuo kūno ir kartu susidaro sąlygos nuolat pereiti iš žemiško gyvenimo į nežemišką pasaulį. Ar tai nepanašu į idėjas, kurias Viljamas Džeimsas skelbia savo nedidelėje knygelėje apie nemirtingumą?

— Visiškai teisingai. Deja, Džeimsas nebuvo matematikas, todėl jis turėjo aiškinti metaforomis, nesiremdamas geometrija.

— O ką galite pasakyti apie kai kuriuos mediumus, demonstruojančius vadinamą' ketvirtąjį matavimą? — pasidomėjau aš. — Ar ne apie juos parašė knygą vienas Leipcigo astrofizikos profesorius?

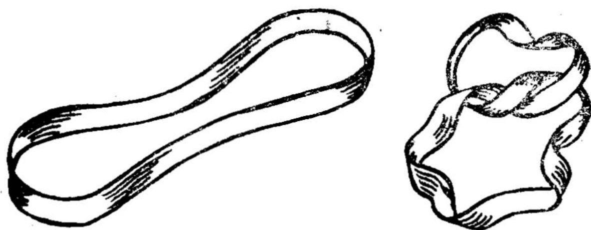
Sleido juoke buvo girdėti sumišimo gaidelės.

— Jūs teisus, tai iš tikrųjų padarė vargšas Johanas Karlas Fridrichas Celneris. Jo knyga „Nežemiškoji fizika“ buvo išversta į anglų kalbą 1881 metais, bet dabar net vertimas pasidarė didžiulė retenybė. Celneris atliko įdomius spektrinės analizės tyrinėjimus, bet jis laikė, kad nedera taikyti fokusininkų metodų, ir, matyt, todėl pakliuvo ant amerikiečių mediumo Henrio Sleido meškerės.

— Sleido? — nustebau aš.

— Taip, gėda prisipažinti, bet tai mano giminaitis. Jis buvo mano antrosios eilės senelis. Jam mirus, liko apie tuziną storų sąsiuvinių, į kuriuos jis surašinėjo savus metodus. Tuos sąsiuvinius paveldėjo mano šeimos nariai anglai, paskui jie buvo perduoti man.

— Nepaprastai įdomu, — tariau aš. — Ar negalėtute man parodyti kokį nors fokusą?



65 pav. Ar galima gumine juosta sumegzti mazgą, neišeinant į keturmatę erdvę?

Mano prašymas Sleidui patiko. Pasirodo, fokusai vienas jo hobi. Be to, Sleidas manė, kad kai kurie Henrio fokusai skaitytojams gali būti įdomūs matematikos požiūriu.

Sleidas iš rašomojo stalo stalčiaus ištraukė odinę juostelę su dviem išilginėmis įpjovomis, kaip parodyta 64 paveiksle, kairėje. Paskui, atkišęs man šratinuką, paprašė kaip nors pažymėti tą juostelę, kad, atliekant fokusą, nebūtų galima jos pakeisti. Juostelės kampe įrašiau savo inicialus. Mes atsisėdome prie mažo stalo vienas prieš kitą. Sleidas keletą sekundžių juostelę palaikė po stalu ir vėl man ją parodė. Siauros juostelės buvo supintos, kaip parodyta 64 paveikslo dešinėje! Taip supinti galima tik įsigudrinus visas tris juosteles pratempti pro hipererdvę, o trijų matavimų erdvėje uždavinys man pasirodė neišsprendžiamas.

Antrasis fokusas buvo dar nuostabesnis. Sleidas man pasiūlė atidžiai apžiūrėti platų žiedą, išpjautą iš minkštos gumos (65 pav.). Paskui jis žiedą įdėjo į degtukų dėžutę, kurios galus užklijavo lipnia juosta. Sleidas jau norėjo dėžutę paslėpti po stalu, bet staiga susigriebė, kad ji niekaip nepažymėta. Ant etiketės juodu šriftu parašiau raidę *X*.

— Jeigu norite, laikykite ją po stalu, — pasiūlė Sleidas.

Aš sutikau. Sleidas užčiuopė po stalu dėžutę ir suėmė ją iš kitos pusės. Pasigirdo šnaresys, ir aš pajutau, kad dėžutė lyg truputį sudrebėjo.

Sleidas atgniaužė rankas.

— Dabar prašau atidaryti dėžutę.

Iš pradžių aš ją labai atidžiai apžiūrėjau. Lipni juosta buvo nenuplėšta. Ant etiketės buvo mano atžyma.

Nagu nukrapštęs lipnią juostą, atidariau dėžutę. Guminė juosta buvo surišta paprastu mazgu, pavaizduotu 65 paveikslo dešinėje.

— Net jeigu jūs kažkokiu būdu įsigudrinote atidaryti dėžutę ir pakeisti žiedą,— tariau aš,— tai kur jūs gavote tokią nuostabią gumą?

— Mano dėdė buvo prityręs sukčius, — šyptelėjo Sleidas.

Man buvo nepatogu klausinėti Sleidą, kaip daromi abu fokusai. Prieš dirstelėdami į atsakymą, pamėginkite suvokti patys.

Tą dieną apie daug ką kalbėjomės su Sleidu. Kai aš pagaliau išėjau iš Ketvirtojo Matavimo bažnyčios, drėgnas Londono gatves apgaubė tirštas rūkas. Aš vėl pasijutau lyg Platono oloje. Migloti judančių mašinų siluetai su elipsiniais šviečiančiais žibintais man priminė žinomas didžiojo Omaro Chajano Rubajatų eilutes:

„Kas mes visi? Tik klaidžioją tamsoj šešėliai,
Paklusnūs Didžiojo gamtos Valdovo valiai.
Vos stebuklinguoju žibintu duos mums ženklą,
Nuolankiai nusilenksime jo galiai“.

ATSAKYMAI

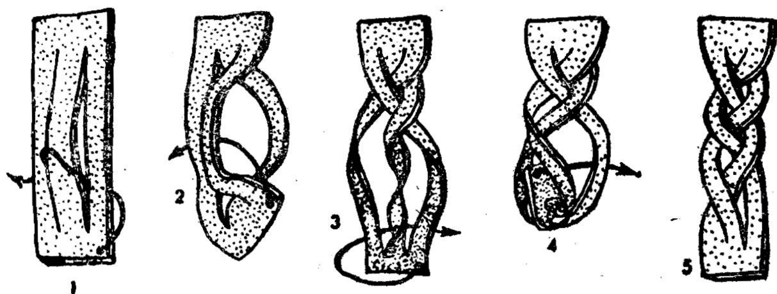
Skyriaus pradžioje rašiau, kad ketinu „tariamai aplankyti“ Londoną, tačiau daugelis skaitytojų paprašė, kad praneščiau Sleido bažnyčios adresą. Šventasis Sleidas — pramanytas asmuo, bet Henris Sleidas iš tikrųjų buvo vienas ryškiausių ir laimingiausių sukčių amerikiečių spiritizmo istorijoje. Kai kurių žinių apie jį ir pagrindines literatūrines nuorodas rasite mano knygos „Tas dešinysis, kairysis pasaulis“ * skyriuje apie Ketvirtąjį Matavimą.

Sleido pademonstruotą būdą supinti odinę juostelę gerai žino anglų boiskautai ir visi, mėgstantys meistrauti iš odos. Yra daug knygų, kuriose aprašomi Sleido metodai. Išsamią matematinę analizę galima rasti Dž. A. Šeperdo straipsnyje „Kasos, kurias galima supinti iš virvučių su sujungtais galais“.**

---

* М. Гарднер. Этот правый, левый мир. М., изд-во «Мир», 1967.

** *Proceedings of the Royal Society,* **A265 (1962)**, p. 229—244.



66 pav. Odinės juostelės pynimas

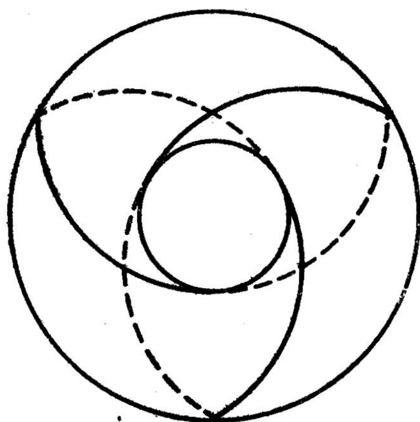


67 pav. Guminio žiedo sumezgimas

Apskritai yra keletas kasų pynimo būdų. Vienas jų parodytas 66 paveiksle. Atlikę visas operacijas keletą kartų, gausite kasą, sudarytą iš kelių „elementarių" kasų su šešiais sukryžiavimais, pavaizduotais paveiksle.

Kitas būdas toks: viršutinėje juostelės dalyje supinate paprasčiausią kasą su šešiais sukryžiavimais. Tuomet juostelės apačioje taip pat susidaro kasa, kuri yra viršutiniosios veidrodinis atvaizdas. Išvengti apatinės kasos labai paprasta. Ją išpinate viena ranka, o antrąja tuo metu prilaikote viršutiniąją, supintąją, juostelės dalį, kad ji neišsileistų. Abu būdai tinka tada, kai siaurų juostelių skaičius didesnis negu trys. Jeigu turite tik kietos odos, ją iš anksto suminkštinkite, pamerkę į šiltą vandenį.

Norint sumegzti plokščią guminį žiedą, visų pirma jį reikia pasidaryti. Paimkite vientisą guminį žiedą su apvaliais skersiniais pjūviais ir stropiai iš jo išpjaukite plokščią ruožą (67 pav.). Tris kartus pusiau apsukę (vidurinė iliustracija), nuo kitos žiedo dalies nupjaukite visa, kas nereikalinga, kad išeitų triskart persukta plokščia juosta. Paprasčiausia užšaldyti guminį žiedą, užmautą ant medinio kubelio, o paskui jį kuo nors išploti. Vėliau tą



68 pav. Kaip gauti sumegztą mazgu guminę juostą, supjausčius tuščiavidurį torą

plokščią juostą perpjovus išilgai vidurinės linijos, gaunamas dvigubai ilgesnis žiedas, sumegztas vienu mazgu.

Fokusui reikia dar antro lygiai tokio paties ilgio guminio žiedo, bet be mazgo. Žiedas su mazgu dedamas į degtukų dėžutę, o dėžutė apklijuojama lipnia juosta. Paskui reikia kaip nors šią dėžutę pakeisti kita, kurioje yra žiedas be mazgo. Pakeičiama tuo momentu, kai dėžutė akimirkai slepiama po stalu ir fokusininkas „atsimena“, kad ji nepažymėta. Paruoštą dėžutę galima iš anksto priklijuoti plastilinu prie stalo apačios, o greta prilipdyti dar vieną nedidelį plastilino gabaliuką. Taigi pakaks stačiai sekundės nereikalingai dėžutei po stalu priklijuoti ir paimti reikalingą.

Yra ir kitas, paprastesnis būdas, elastingai juostai, sumegztai mazgu, padaryti. Paimkite tuščiavidurį guminį torą (pavyzdžiui, vaikišką žiedą dantims; jį galite nusipirkti bet kurioje vaistinėje) ir jį supjaustykite taip, kaip parodyta punktyrinėmis linijomis 68 paveiksle. Gausite plačią uždarą juostą (žinoma, paskui ją galite susiaurinti), sumegztą vienu mazgu.

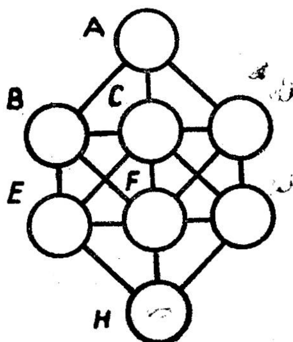
Beje, žinomas uždavinys, kaip sumegzti mazgu begalinę elastingą juostą. Iliuzionistas Vinstonas Friras, mačiusiųjų teigimu, mokėjo tokį mazgą surišti trimis būdais,

XIII skyrius

Dar aštuoni uždaviniai

1. Skaitmenų išdėstymo uždavinys. Šio painaus uždavinio su skaitmenimis autorius nežinomas. Skaitmenis nuo 1 iki 8 reikia išdėstyti 69 paveiksle pavaizduotos figūros aštuoniuose skrituliukuose taip, kad skrituliukuose, esančiuose vienas šalia kito išilgai tiesės, nebūtų dviejų nuosekliai vienas po kito einančių skaičių. Pavyzdžiui, jeigu viršutiniame (A) skrituliuke yra skaitmuo 5, nė viename iš trijų sekančios eilės skrituliukų (B, C ir D) jau negali būti įrašyti skaitmenys 4 arba 6, nes kiekvienas skrituliukas yra tiesia linija sujungtas su viršutiniu. Yra vienintelis uždavinio sprendinys (sprendiniai, gauti vienas iš kito posūkiu arba atspindžiu, nelaikomi skirtingais), bet rasti, jį paprastai parenkant. be analizės gana sunku.

2. Mergina ar tigras? Frenko Stoktono apsakyme „Mergina ar tigras“ pasakojama apie žiaurų vienos genties karaliuką, kuris turėjo įprotį savotiškai teisti pavaldinius. Ceremonija atrodė taip. Karaliukas įsitaisydavo aukštame soste salės gale. Priešingoje sienoje buvo dvejos durys. Teisiamajam buvo leidžiama atidaryti bet kurias iš jų, visiškai pasikliaujant „bešališko ir teisingo atsitiktinumo valia“. Už vienų durų tupėjo alkanas tigras, už antrųjų slėpėsi simpatiška jaunutė mergina. Jeigu, atidarius duris, iššokdavo tigras, karaliukas laikė, jog nelaimingas suimtasis už įvykdytą nusikaltimą gavo pagal nuopelnus. O jeigu duryse pasirodydavo mergina, tai, karaliuko nuomone, šis faktas liudydavo, jog teisiamasis nekaltas. Pastarasis gaudavo ne tik laisvę, bet ir gražios merginos ranką (vestuvių ceremonija įvykdavo čia pat, teismo salėje).



69 pav. Skaitmenų išdėstymo uždavinys

Kartą karaliukas sužinojo, kad jo duktė ir vienas dvariškis myli vienas kitą. Karaliuko nurodymu nelaimingasis jaunuolis buvo atiduotas teismui. Duktė žinojo, už kurių durų tupi tigras, bet ji taip pat žinojo, kad už kitų durų slepiasi gražiausia dvaro dama, kuri meilinosi jos mylimajam. Teisiamajam aišku, kad princesei žinoma, kur yra tigras, o kur mergina. Princesė „greitai, vos vos pastebimu judesiu" mostelį ranka į dešinę, dėl to jaunuolis atidaro dešiniąsias duris. Pasakojimas baigiasi klausimu: „Kas pasirodė duryse — tigras ar mergina?"

Aš ilgai narpliojau tą nebaigtą istoriją ir dabar galiu papasakoti jums, kas atsitiko toliau. Durys buvo vienos šalia kitų ir, tikriausiai atsidarydavo į priešingas puses. Atidaręs dešiniąsias, dvariškis tučtuojau trūktelėjo antrąsias ir pasislėpė trikampyje, kurį sudarė siena ir dvejos durys. Iššokęs iš vienų durų tigras, įlėkė į antrąsias ir surijo merginą. Karaliuką šis įvykis prislėgė, bet, būdamas azartiškas žmogus, jis kvietė antrą teismą. Šį kartą jis jau nenorėjo, kad gudruolis turėtų lygius šansus likti gyvas ar žūti, todėl salę perstatė, ir vietoje dvejų durų joje atsirado visas šešetas, suskirstytas poromis. Už pirmųjų dvejų durų pasmerktojo tykojo du alkani tigrai, už antrųjų dvejų slėpėsi tigras ir mergina, o už paskutiniųjų dvejų durų buvo dvi visiškai vienodai apsirengusios merginos dvynukės.

Žiaurus karaliuko planas buvo toks. Iš pradžių teisiamasis turi pasirinkti bet kurią durų porą. Po to jis nurodo vienas duris iš pasirinktosios poros, ir jam metamas raktas nuo jų. Jeigu už durų pasirodytų besąs tigras, teisingumas (karaliuko supratimu) triumfuotų. Jeigu ten būtų mergina, durys tučtuojau užsitrenktų. Paskui merginą ir jos nežinomą kaimyną (tai galėtų būti arba jos sesuo dvynukė, arba tigras) slapčia nuo visų priverstų pasikeisti kambariais (arba likti vietoje) priklausomai nuo to, kaip nukristų speciali auksinė moneta su mergaitės atvaizdu vienoje pusėje ir tigro — kitoje. Teisiamajam būtų pasiūlyta dar kartą pasirinkti duris iš tos pačios poros. Šiuo atveju jis nežinotų, ar mergaitė ir jos kaimynas priversti pasikeisti vietomis, ar ne. Jeigu teisiamasis papultų tigrui, „teisingumas" triumfuotų; jeigu prieš teisiamąjį vėl stovėtų mergina, durys užsitrenktų, procedūra su moneta kartotųsi ir jaunuoliui būtų suteikta paskutinė, trečioji, galimybė pasirinkti duris. Jeigu jam ir čia pasisek-

tų, visi kankinimai baigtųsi, ir mergina būtų atiduota jam į žmonas.

Atėjo teismo diena. Viskas vyko pagal planą. Teisiamasis du kartus atidarė duris, už kurių buvo mergina. Visi jo mėginimai sužinoti, ar antroji mergina buvo ta pati pirmoji, baigėsi nesėkmingai. Jo kakta išrasojo. Karaliuko duktė, šį kartą nežinanti, kas slepiasi už durų, išblyško.

Kokia tikimybė, kad jos mylimajam ir trečią kartą pavyks atidaryti duris, už kurių yra mergina?

3. Teniso varžybos. Teniso varžybose Miranda įveikė Rozmariją rezultatu 6 : 3. Penkias partijas laimėjo ta mergina, kuri neservavo. Kuri iš jų pirmoji servavo?

4. Įvairiaspalviai kėgliai. Vienas pasiturintis žmogus rūsyje buvo įsirengęs dvi kėglių žaidimo aikšteles. Vienoje jų buvo dešimt tamsių kėglių, kitoje — dešimt šviesių. Savininkas sugebėjo matematiškai samprotauti, ir kartą vakare, poilsio valandą žaisdamas kėgliais, jis sugalvojo tokį uždavinį.

Tarkime, jog visi kėgliai (ir tamsūs, ir šviesūs) sumaišyti. Ar galima išrinkti dešimt kėglių taip, kad, užpildžius jais, kaip paprastai, trikampį rėmelį, nerastume trijų vienos spalvos kėglių ne tik rėmelio, bet ir bet kokio lygiakraščio trikampio viršūnėse?

Jeigu toks kėglių rinkinys galimas, parodykite, kaip jį sudaryti. Priešingu atveju įrodykite, kad tokio rinkinio negalima sudaryti. Uždavinį patogiausia spręsti, turint po ranka šaškių rinkinį.

5. Šešių degtukų uždavinys. Profesorius Liucijus S. Vilsanas — puikus, nors ir šiek tiek ekscentriškas, topologas. Anksčiau jo pavardė buvo Vilsonas. Dar būdamas aspirantas, jis pastebėjo, kad jo pavardę WILSON parašius didžiosiomis raidėmis, visos jos, išskyrus raidę O, topologiškai ekvivalenčios. Vilsonas taip buvo sukrėstas, kad paprašė leidimo pakeisti pavardę į WILSUN.

Neseniai susitikęs Vilsaną pietaujantį, pamačiau, kad jis iš šešių degtukų dėlioja ant staltiesės kažkokias figūras.

— Naujas topologinis galvosūkis? — susidomėjęs paklausiau.

— Kaip jums pasakius,— atsakė Vilsanas. — Bandau nustatyti, kiek topologiškai skirtingų plokštumos figūrų galima sudaryti iš šešių degtukų, nededant jų vienas ant kito, o tik sujungiant galais.

— Turbūt tai nesunku,— tariau aš.

— Sunkiau, negu jums atrodo. Aš ką tik sudėjau visas galimas figūras iš mažesnio degtukų skaičiaus, — ir jis ištiesė man voką, kurio kitoje pusėje buvo 70 paveiksle pavaizduota lentelė.

— Ar nepraleidote vienos figūros iš penkių degtukų? — pastebėjau aš. — Žvilgtelėkite į vidurinę — kvadratą su uodega. Tarkime, kad uodega yra kvadrato viduje. Aišku, jog vienos šių figūrų negalima gauti iš kitos deformuojant, nes tuomet netektų nuimti degtuko nuo plokštumos.

Vilsanas neigiamai palingavo galvą.

— Tai labai paplitusi klaida — neteisingai suprantamas topologiškas ekvivalentumas.

Jeigu dvi figūras galima gauti vieną iš kitos, ištempiant jas, bet nelaužant ir nepertraukiant (kaip sako topologai, tolydžia deformacija), jos topologiškai ekvivalenčios (arba, pavartojus topologinius terminus, jos homeomorfinės). Atvirkščiai teigti neteisinga: jeigu kažkokios dvi figūros homeomorfinės, ne visada vieną jų galima gauti iš kitos tolydžia deformacija.

— Prašau atleisti,— tariau aš.

— Dvi figūros homeomorfinės, jeigu, apibrėždami vieną jų nenutrūkstamu judesiu (neatitraukę pieštuko nuo popieriaus), kartu galite apibrėžti kitą, suprantama, su sąlyga, kad tarp figūrų taškų egzistuoja abipus vienareikšmė atitiktis ir kiekvienu momentu jūsų pieštukų smailumos bus vienas kitą „atitinkančiuose" taškuose. Pavyzdžiui, virvė, kurios galai sujungti taip, kad ji sudaro žiedą, homeomorfinė virvei, kuri, prieš sujungiant galus, surišama mazgu, nors tolydžia deformacija iš žiedo su mazgu gauti žiedą be mazgo, suprantama, negalima. Dvi išore susiliečiančios sferos homeomorfinės dviem viena kiton įdėtoms skirtingo dydžio sferoms, taip pat turinčioms lietimosi tašką.

Tikriausiai atrodžiau labai suglumęs, nes Vilsanas skubiai pridūrė:

— Žiūrėkite, štai pavyzdys, kurį puikiai supras jūsų

Degtukų skaičius	Topologiškai skirtingų (neekvivalenčių) figūrų skaičius
1	1
2	1
3	3
4	5
5	10
6	?

70 pav. Topologiškai neekvivalenčios figūros, sudarytos iš 1, 2, ..., 6 degtukų.

skaitytojai. Figūros iš degtukų išdėstytos plokštumoje, bet įsivaizduokite, kad jos sudarytos iš elastingų kaspinų. Jas galima išvesti iš plokštumos, bet kaip deformuoti, išversti į kitą pusę ir vėl pakloti plokštumoje. Jeigu taip jums pavyks iš vienos figūros gauti kokią nors kitą, abi figūras galima laikyti topologiškai ekvivalenčiomis.

— Suprantama,— sutikau aš. — Nugramzdinus figūrą į didesnio matmenų skaičiaus erdvę, deformuojant iš jos galima gauti kitą, topologiškai jai ekvivalenčią.

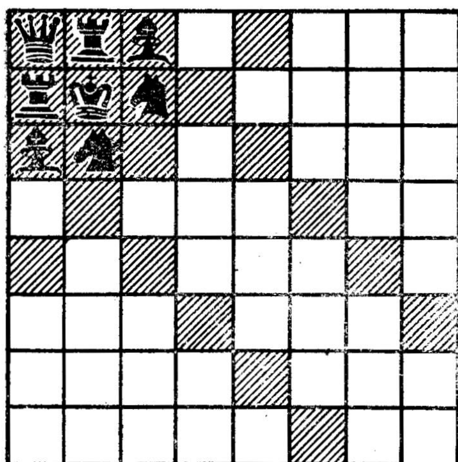
— Visiškai teisingai. Įsivaizduokite, kad begalinė virvutė arba dvi sferos, apie kurias kalbėjome, yra keturių matavimų erdvėje. Tuomet virvę galima surišti ir atrišti, neatskiriant jos galų, o mažąją sferą įdėti į didžiąją ir be jokių kliūčių ją iš ten išimti.

Apskaičiuokite, kiek topologiškai neekvivalenčių figūrų, sudarytų iš šešių degtukų, galima sudėti plokštumoje, topologinį ekvivalentumą suprantant taip, kaip jį supranta profesorius Vilsanas. Visi degtukai nelankstūs ir yra vienodo ilgio. Jų negalima ištempti, jie gali liestis tik galais ir net iš dalies negali pridengti vienas kito. Tačiau jau gatavą figūrą galima ištempti, pakelti nuo plokštumos, deformuoti trimatėje erdvėje ir vėl paguldyti plokštumoje. Be to, iš dviejų degtukų sudarytos viršūnės gali išnykti. Kitaip tariant, trikampio neskiriame nuo kvadrato arba penkiakampio, grandinė iš dviejų degtukų ekvivalenti bet kokio ilgio grandinei, visos didžiosios raidės *E*, *F*, *T*, *Y* ekvivalenčios viena kitai, raidė *B* ekvivalenti savo veidrodiniam atspindžiui ir t. t.

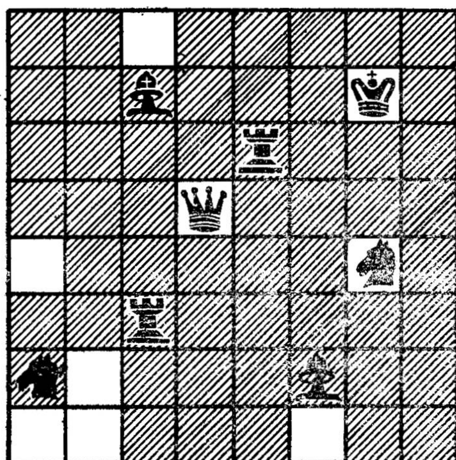
6. Du šachmatų uždaviniai. Žinoma nemažai puikių šachmatų uždavinių, kuriems lentos ir figūrų reikia tik tam, kad su jais būtų galima sugalvoti kokį nors painų matematinį uždavinį. Štai du klasikiniai tokio pobūdžio uždaviniai, iš esmės labai panašūs.

1. Uždavinys apie minimalų puolamų laukelių skaičių. Aštuonias vienos spalvos figūras (karalių, valdovę, du rikius, du žirgus, du bokštus) reikia lentoje išdėstyti taip, kad jos grasintų užpulti mažiausią skaičių langelių. Figūra negali eiti tik į tą laukelį, kuriame stovi; visi kiti ėjimai, tarp jų ir į užimtus laukelius, galimi. Du rikiai nebūtinai turi užimti skirtingos spalvos kvadratus. 71 paveiksle užpuolimas gresia dvidešimt dviem subrūkšniuotiems langeliams, bet šį skaičių galima gerokai sumažinti.

2. Uždavinys apie maksimalų puolamų laukelių skaičių. Tas pačias aštuonias figūras reikia išdėstyti taip, kad jos grasintų užpulti kuo daugiau langelių. Kaip ir pirmajame uždavinyje, figūra gali daryti ėjimą į bet kurį užimtą langelį, išskyrus savąjį, o rikiai nebūtinai bus skirtingų spalvų kvadratuose. 72 paveiksle penkiasdešimt penkiems kvadratams gresia užpuolimas, bet šis skaičius toli gražu dar ne maksimalus.



71 pav. Uždavinys apie aštuonias figūras, grasinančias užpulti minimalų šachmatų lentos langelių skaičių



72 pav. Uždavinys apie aštuonias figūras, grasinančias užpulti maksimalų šachmatų lentos langelių skaičių

Jeigu rikiai užima skirtingos spalvos langelius, galimas antrojo uždavinio sprendinys; šiuo atveju galima įrodyti, jog jis yra maksimumas. Jeigu rikiai yra ant vienos spalvos langelių, įrodyti gautų sprendinių optimalumo nepavyksta.

Minimalus langelių skaičius pirmame uždavinyje tikriausiai nepriklauso nuo to, ant kokių langelių — vienodos ar skirtingų spalvų — stovi rikiai, tačiau nei pirmuoju, nei antruoju atveju neįrodyta, jog sprendinių tikrai jau negali būti mažiau. Šiuos uždavinius nagrinėjo tiek specialistų, jog vargu ar jų sugalvotus sprendinius įmanoma bent kiek pakeisti. Jeigu kam nors pavyktų atrasti naują sprendinį, toks atradimas labai sudomintų šachmatų mėgėjus.

7. Kiek mylių nuvažiavo misteris Smitas ir misis Smit? Kartą misteris Smitas ir jo žmona 10 val. ryto išvažiavo iš savo namų, esančių Konektikuto valstijoje, ir pasuko pas misis Smit tėvus, gyvenančius Pensilvanijos valstijoje. Pakeliui Smitai ruošėsi sustoti tik vieną kartą, Vestčesteryje, ir papusryčiauti restorane „Prie žvakių šviesos", priklausančiame Patricijai Merfi.

Būsimasis vizitas žmonos giminaičiams ir nemalonumai darbe slėgė misterį Smitą. Tik 11 valandą misis Smit pagaliau išdrįso paklausti: „Kur dabar esame, brangusis?" Misteris Smitas žvilgtelėjo į spidometrą ir burbtelėjo: „Nuvažiavome lygiai pusę atstumo nuo čia iki restorano". Restoraną jie pasiekė vidudienį, neskubėdami papusryčiavo ir išvyko toliau. Tik penktą valandą vakaro, kai jie jau buvo nuvažiavę 200 mylių nuo tos vietos, kur misis Smit pirmą kartą paklausė, ji paklausė antrą kartą: „Kiek mums dar važiuoti, brangusis?" „Dar pusę atstumo,— sumurmėjo Smitas,— kokį įveikėme nuo restorano."

Kelionės tikslą jie pasiekė tos pačios dienos 7 valandą vakaro. Aplinkybės privertė misterį Smitą važiuoti įvairiais greičiais, tačiau nustatyti tikslų atstumą tarp namų Konektikute ir Pensilvanijoje (toks uždavinys) visai nesudėtinga.

8. Ties kuriuo pirštu baigsis skaičiavimas? 1972 m. sausio 1 d. vienas matematikas labai nustebo, pamatęs, kad jo duktė kažkaip keistai skaičiuoja kairės rankos pirš-

tais. Mergaitė pradėjo skaičiuoti nuo nykščio ir pavadino jį pirmuoju, smilių pavadino antruoju, didįjį — trečiuoju, bevardį — ketvirtuoju ir mažąjį — penktuoju. Palietusi mažąjį pirštą, mergaitė toliau skaičiavo priešinga kryptimi. Bevardį pirštą ji pavadino šeštuoju, didįjį — septintuoju, smilių — aštuntuoju, nykštį — devintuoju. Palietusi nykštį, ji vėl pasuko atgal, ir smilius tapo dešimtuoju, didysis — vienuoliktuoju ir t. t. Taip ji skaičiavo tol, kol pasiekė dvidešimt (dvidešimtasis pasirodė esąs bevardis pirštas).

„Ką čia veiki?" — pasidomėjo tėvas.

Mergaitė treptelėjo koja. „Na štai, per tave susimaišiau skaičiuodama. Dabar teks vėl viską pradėti iš pradžių. Aš noriu suskaičiuoti iki 1972 ir nustatyti, ties kuriuo pirštu sustosiu".

Matematikas užsimerkė ir atmintinai greitai suskaičiavo. „Tu sustosi ties...", ir jis nurodė pirštą, kuriam, jo nuomone, teks skaičius 1972.

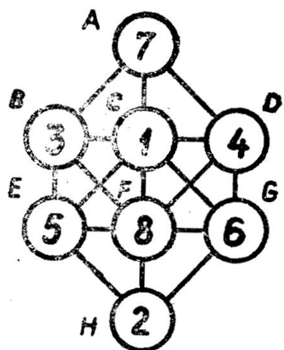
Baigusi skaičiuoti ir įsitikinusi, kad tėvas buvo teisus, mergaitė taip susižavėjo stebuklinga matematikos galybe, jog nusprendė tą pačią dieną dar uoliau mokytis aritmetikos.

Kaip sprendė šitą uždavinį tėvas ir ką jis gavo?

ATSAKYMAI

1. Skaitmenis nuo 1 iki 8 išdėsčius skrituliukuose taip, kaip parodyta 73 paveiksle, jokie du skaičiai, kurie skiriasi vienetu, nebus sujungti vienas su kitu tiesės atkarpa. Pateiktasis sprendinys vienintelis (neskaitant sprendinių, kurie gali būti gauti iš jo posūkių arba veidrodiniu atspindžiu).

Uždavinį galima išspręsti ir taip. Kiekvienas sekos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 narys, išskyrus pirmąjį (1) ir aštuntąjį (8), turi kaimynus iš kairės ir iš dešinės. Schemoje, pavaizduotoje 69 paveiksle, skrituliukas, pažymėtas raide *C*, gali būti sujungtas su visais skrituliukais, išskyrus skrituliuką *H*. Todėl jeigu skrituliuke *C* yra bet kuris iš skaitmenų nuo *2* iki *7*, skrituliuke *H* turi kartu būti du skaitmenys, kurių vienas vienetu didesnis, o kitas — vienetu mažesnis už skaitmenį, esantį skrituliuke *C*. Kadangi tai negalima, į skrituliuką *C* reikia įrašyti skaitmenis 1 arba 8. Taip pat galima samprotauti ir



73 pav. Skaitmenų išdėstymo uždavinio sprendinys

apie skrituliuką *F*. Schemos simetrija leidžia skaitmenį 1 įrašyti tiek skrituliuke *C*, tiek *F*. Įrašykime jį į *C*. Tuomet skaitmenį 2 galima įrašyti tik į skrituliuką *H*. Analogiškai įrašę 8 į skrituliuką *F*, galime skaitmenį 7 įrašyti tik į skrituliuką *A*. Kitus keturis skrituliukus užpildyti jau lengva.

Sąmojingas ir toks sprendimas. Pabandykite nubrėžti naują schemą ir joje tiesių atkarpomis sujunkite visus skrituliukus, nesujungtus „tiesioginiu ryšiu" pradinėje schemoje. Tai padės suprastinti uždavinio formuluotę, gaunant tokį buvusio uždavinio analogą: naujosios schemos skrituliukuose skaitmenis nuo 1 iki 8 reikia surašyti taip, kad juos būtų galima apeiti nuoseklaus didėjimo tvarka (maršrutas turi būti nepertrauktas, nesuskaldytas į atskiras atkarpas). Išnagrinėjus naująją schemą, nesunku suprasti, kad skaitmenis galima išdėstyti tik keturiais būdais. Visi jie bus gaunami iš vienintelio sprendinio posūkiais ir atspindžiais.

Vienas skaitytojas man pranešė, kad šį uždavinį pirmą kartą išgirdo iš savo „bičiulio, priklausančio Volto Disnėjaus studijai, kurios bendradarbiai sugaišo marias laiko, jį spręsdami". Pats skaitytojas televizijos laidoje „Kaip veikia skaitmeninė skaičiavimo mašina?" parodė, kaip šį galvosūkį spręs matematikas ir kuo jo samprotavimas skiriasi nuo „samprotavimo" skaičiavimo mašinos, kuri, veikdama beatodairiškai, tiesiog perrenka visus kelinius iš aštuonių skaitmenų (o jų šiuo atveju bus 40 320).

2. Šis galvosūkis yra užmaskuotas garsiojo uždavinio apie rutulius ir urnas variantas. Jo išsamų sprendimą pateikė didysis prancūzų matematikas Pjeras Simonas Laplasas. *Atsakymas:* su tikimybe 9/10 jaunuolis, atvėręs duris trečią kartą, ras už jų merginą. Pora durų, už kurių slepiasi du tigrai, nebegali pasitaikyti, nes sąlygoje sakoma, jog jaunuolis ir pirmą, ir antrą kartą atidarė duris, už kurių buvo mergina. Taigi gauname de-

šimties bandymų su lygiai galimais rezultatais seriją (kiekvienas bandymas — trejų durų atidarymas). Jeigu už dvejų jaunuolio pasirinktų durų yra dvi merginos (merginą, stovinčią už kairiųjų durų, pažymėsime D1, o merginą už dešiniųjų durų,— D2), galimi tokie rezultatai:

D1—D1—D1
D1—D1—D2
D1—D2—D1
D1—D2—D2
D2—D1—D1
D2—D1—D2
D2—D2—D1
D2—D2—D2

O jeigu už dvejų pasirinktų durų pasirodys mergina ir tigras, galimos tik dvi išeitys (T reiškia „tigras“)

D—D—D
D—D—T

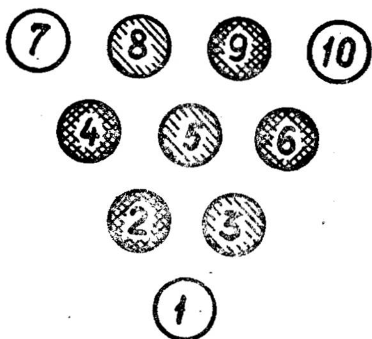
iš 10 galimų atvejų, sudarančių nagrinėjamo uždavinio „elementarių įvykių erdvę“, jaunuoliui lemtingas, pasirodo, yra tik vienas.

Vadinasi, tikimybė, jog teisiamasis liks gyvas, lygi $^9/_{10}$.

3. Šio uždavinio sprendimo būdai gali būti labai įvairūs. Žinomas algebrinis ir grafinis jo sprendimas, taip pat būdas, pagrįstas sąmojingu dvejetainės sistemos pritaikymu. Pateiksiu trumpiausią iš man žinomų sprendimų.

Mergina, kuriai priklauso pirmasis servas, servuoja penkiuose setuose, o jos partnerė — keturiuose. Tarkime, jog pirmoji mergina laimėjo x setų iš penkių, kuriuose ji servavo, ir y setų iš kitų keturių. Tuomet bendras skaičius setų, kuriuos servuojanti mergina pralaimėjo, lygus $5-x+y$ ($5-x$ setų pralaimi servuodama pirmoji mergina ir y setų — antroji). Pagal uždavinio sąlygą šis skaičius lygus 5 (penkis setus laimi mergina, kuri juose neservavo). Vadinasi, $x=y$, ir ta mergina, kuri servavo pirmame sete, laimi $2x$ setus. Kadangi lyginį skaičių

setų galėjo laimėti tik Miranda, taigi ji ir servavo pirmajame sete.



74 pav. Įrodymas, jog uždavinys apie kėglius neišsprendžiamas

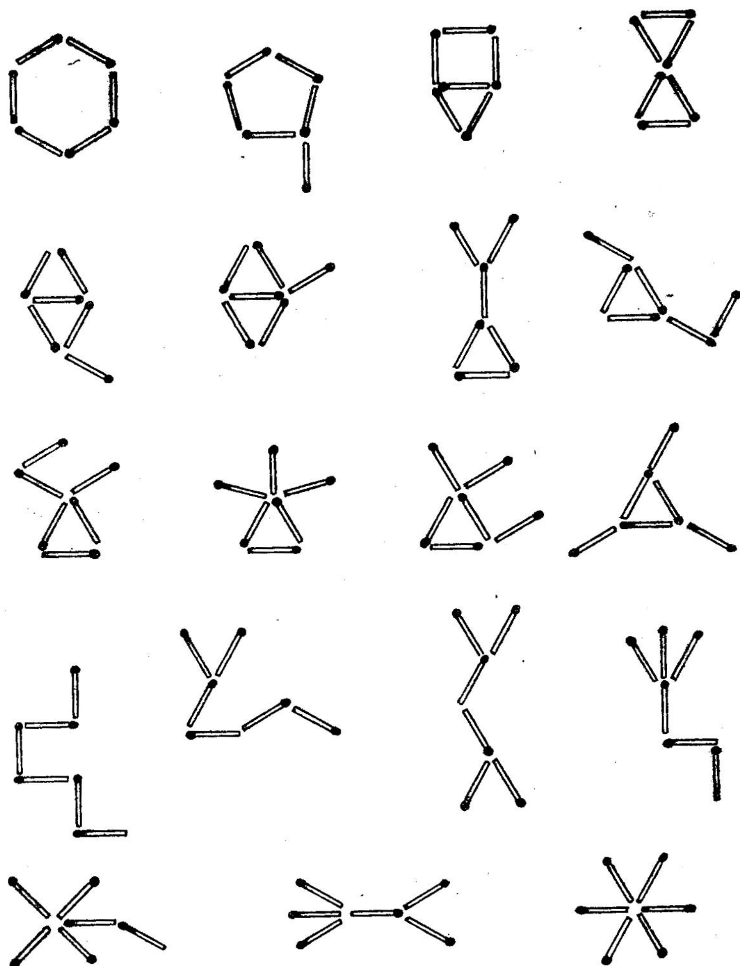
4. Kokius dešimt kėglių iš dvidešimties skirtingų dviejų spalvų kėglių bepasirinktume, išrikiavę juos trikampiu, visada pastebėsime, jog kažkokie trys vienos spalvos kėgliai atsidūrė lygiakraščio trikampio viršūnėse. Šį tvirtinimą galima įrodyti įvairiai. Štai, pavyzdžiui, vienas įrodymų.

Tarkime, jog turime šviesių ir tamsių kėglių. *5* kėglis (74 pav.) šviesus. *4, 9, 3* kėglis yra lygiakraščio trikampio viršūnėse, todėl bent vienas iš jų turi būti šviesus. Bet dėl figūros simetrijos šviesus gali būti bet kuris iš jų, pavyzdžiui, *3* kėglis. Tuomet *2* ir *6* kėglis turi būti tamsus, *2, 6, 8* kėglis taip pat yra lygiakraščio trikampio viršūnėse, todėl *8* kėglis gali būti tik šviesus, bet tada *4* ir *9* kėglis — būtinai tamsus. *10* kėglis jokiu būdu negali būti tamsus, nes drauge su *6* ir *9* tamsiu kėgliu jis sudarytų tris lygiakraščio trikampio viršūnes. Tačiau jis negali būti ir šviesus, nes tada būtų šviesūs visi trys kėgliai — *10, 3, 8,* taip pat esantys lygiakraščio trikampio viršūnėse. Taigi *5* kėglis, nuo kurio pradėjome, negali būti šviesus. Suprantama, gausime prieštaravimą, tardami, jog *5* kėglis tamsios spalvos.

5. Iš šešių degtukų plokštumoje galima sudaryti devyniolika topologiškai skirtingų figūrų, kurias sudarant, degtukai nededami vienas ant kito ir liečiasi tik galais. Visos tos figūros pavaizduotos 75 paveiksle.

Laikydami, kad figūros gali būti ne tik plokščios, bet ir trimatės, gausime iš viso tik vieną papildomą figūrą: tetraedro karkasą.

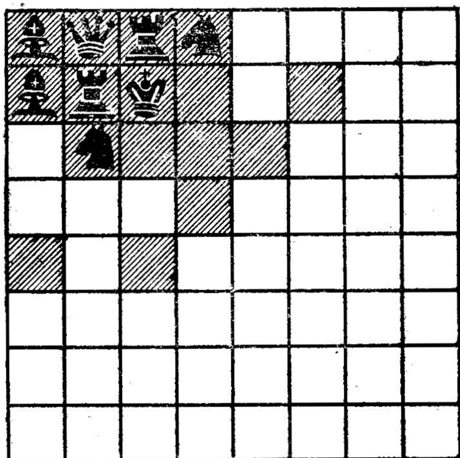
Skaitytojai man pranešė, jog iš septynių degtukų plokštumoje galima sudaryti trisdešimt devynias topologiškai neekvivalenčias figūras.



75 pav. Devyniolika topologiškai neekvivalenčių figūrų, kurias galima sudaryti iš 6 degtukų

6. 76 paveiksle parodyta, kaip reikia išdėstyti vienos spalvos šachmatų figūras, kad jos grasintų tik šešiolikai šachmatų lentos langelių.

Sukeitę vietomis valdovę ir rikį, esantį viršutiniame kairiajame kampe, gausite tuos pačius šešiolika langelių, bet rikiai tokiu atveju stovės vienos spalvos langeliuose.



76 pav. Uždavinio apie figūrų, grasinančių mažiausiam langelių skaičiui, išdėstymą sprendinys

Matyt, nepriklausomai nuo to, ar rikiai stovi vienos ar skirtingos spalvos langeliuose, langelių, kuriems grasina aštuonios figūros, negali būti mažiau kaip šešiolika.

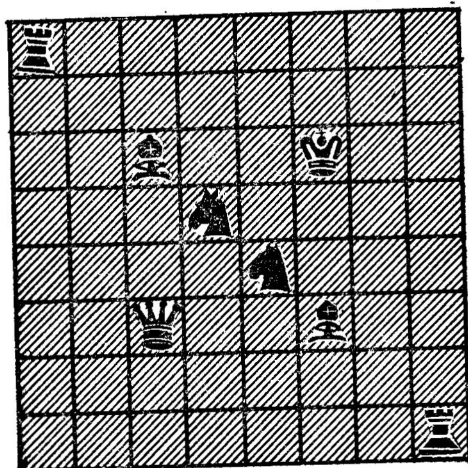
76 paveiksle pavaizduota pozicija yra dar dviejų uždavinių su tomis pačiomis aštuoniomis šachmatų figūromis sprendinys:

1) išdėstyti figūras taip, kad galimų ėjimų skaičius būtų minimalus (paveiksle jis lygus dešimčiai);

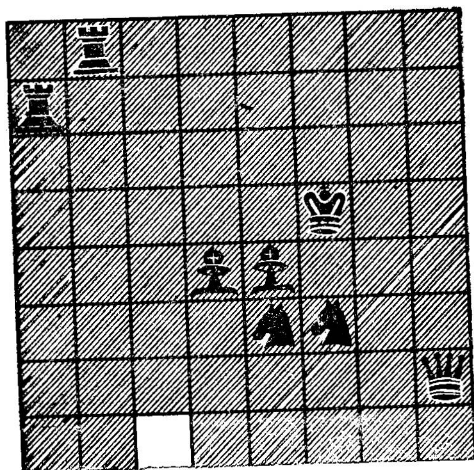
2) rasti poziciją, kuriai esant, gali judėti mažiausias figūrų skaičius.

77 paveiksle, *a,* parodyta pozicija, kurioje išdėstytos figūros grasina visiems 64 lentos langeliams. Suprantama, tai ir yra maksimumas. Jeigu rikiai stovi skirtingų spalvų laukuose, išdėstytos figūros gali grasinti, matyt, ne daugiau kaip 63 langeliams. Vienas iš daugybės sprendinių parodytas 77 paveiksle, *b*. Tikslus skirtingų sprendinių skaičius nežinomas.

8 figūrų, grasinančių didžiausiam skaičiui langelių, išdėstymo uždavinio, tuo atveju, kai abu rikiai stovi skirtingų spalvų laukuose, variantą pirmasis pasiūlė Dž. Klingas 1849 metais. Klingo uždavinyje buvo dar viena, papildoma, sąlyga: karalius turi stovėti vieninteliame nepavojingame kvadrate.



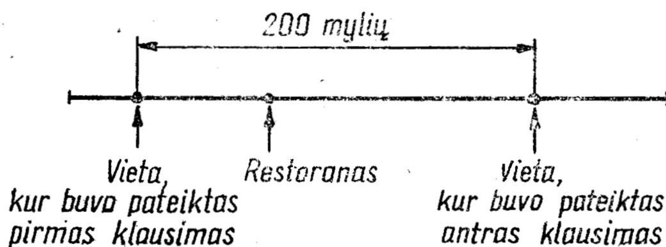
a



b

77 pav. Figūrų, grasinančių didžiausiam langelių skaičiui, išdėstymo uždavinio sprendinys:

a — rikiai stovi vienodos spalvos langeliuose;
b — rikiai stovi skirtingos spalvos langeliuose



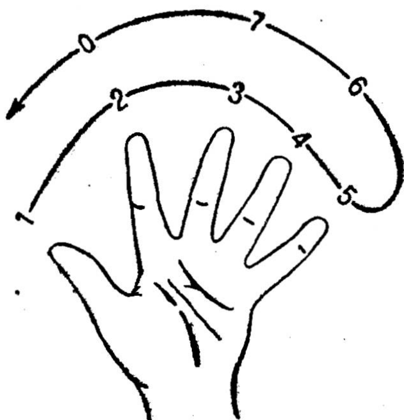
78 pav. Uždavinio apie Smitų kelionę sprendimo grafikas

Pabandykite pirmiausia išspręsti Klingo uždavinio pirmąjį, paskui — antrąjį variantą (itin sunkų), kai nepavojingas langelis yra lentos kampe. Du skaitytojai atsiuntė vienodus šio uždavinio sprendinius, bet vieninteliame nepavojingame kvadrate stovėjo bokštas. Įrodyta, jog nepavojingas gali būti bet kokios spalvos laukas.

7. Remtis valandomis, apie kurias kalbama uždavinio sąlygoje, beprasmiška, nes Smitas visą laiką važiavo įvairiais greičiais.

Per visą kelionę misis Smit pateikė du klausimus.

Iš Smito atsakymų matyti, jog, kai misis Smit paklausė pirmąjį kartą, jie suspėjo nuvažiuoti trečdalį kelio nuo namų iki restorano, o kai ji paklausė antrąjį kartą, jiems beliko važiuoti trečdalį kelio nuo restorano iki galutinio punkto. Iš čia aišku, jog atstumas tarp taškų, kuriuose misis Smit pateikė savo klausimus (pagal sąlygą 200 mylių), sudaro $^2/_3$ viso kelio. Vadinasi, visas kelias sudaro 300 mylių. Žvilgtelėkite į 78 paveikslą, ir jums iš karto viskas bus aišku.



79 pav. Kaip mergaitė sunumeravo savo kairės rankos pirštus

8. Kai matematiko duktė skaičiavo pirštais iki 1972, paskutinis skaičius teko jos bevardžiam pirš-

tui. Kas aštuoni pirštai ji vis grįždavo prie nykščio (79 pav.). Remiantis lyginių sąvoka (8 moduliu), nesunku apskaičiuoti, kokiam pirštui teks bet kuris iš anksto duotas skaičius. Reikia tik padalyti tą skaičių iš 8, parašyti liekaną, paskui pažiūrėti, kokį pirštą pagal schemą ši liekana atitinka.

Dalijant 1972 iš 8, gaunama liekana 4. Todėl skaičiavimas baigiamas bevardžiu pirštu.

Mintinai dalydamas, matematikas rėmėsi dalumo požymiu (bet koks skaičius dalijasi iš 8 be liekanos, jeigu trys paskutinieji jo skaitmenys sudaro skaičių, kuris be liekanos dalijasi iš 8) ir dalijo iš 8 ne 1972, o tik 972. Liekana buvo lygi 4.

XIV skyrius

Savo gamybos pati save mokanti mašina iš degtukų dėžučių

„Ant šachmatų lentos liko mažai figūrų, ir net man, visiškai ne šachmatininkui, iš karto pasidarė aišku, kad žaidimas artėja prie pabaigos... Jo (Moksono) veidas buvo mirtinai išbalęs, akys žėrėjo kaip deimantai. Antrojo žaidėjo aš mačiau tik nugarą, bet ir to pakako, kad man dingtų bet koks noras pamatyti jo veidą.“ *

Pateikta ištrauka paimta iš Ambrozo Birso klasikinio apsakymo „Moksono šeimininkas“. Išradėjas Moksonas sukūrė robotą, žaidžiantį šachmatais. Moksonui išlošus vieną partiją, robotas pasmaugė savo kūrėją.

Birso apsakyme atsispindi didėjantis žmonių nerimas: nejaugi kada nors mašinos nebeklausys ir pradės daryti, ką tik užsimanys. Negalvokite, kad panašiai būkštauja tik tie, kas nusimano apie skaičiavimo mašinas. Norbertas Vineris prieš mirtį su siaubu laukė dienos, kai svarbius vyriausybinius nutarimus priims mašinos, užprogramuotos, remiantis naujausiais lošimų teorijos laimėjimais.

---

* А. Бирс. Хозяин Моксона Сб. «Словарь Сатаны и другие рассказы». М., изд-во «Художественная литература», 1966.

Vineris perspėjo, kad mašinos gali žmoniją įtraukti į pragaištingą karą.

Didžiausią nerimą kelia save mokančios mašinos (mašinos, kurios tobulėja, kaupdamos patirtį), nes jų elgesio nebegalima numatyti. Tokios mašinos daro ne tai, kas joms įsakoma, bet tai, ką jos išmoko. Jos labai greitai pasiekia tokį lygį, kai programuotojas jau nebegali pasakyti, kas pasikeitė mašinos schemoje. Dauguma save mokančių mašinų paprastai turi vadinamuosius „randomizuojančius įrenginius". Jeigu tokio įrenginio veikimas pagrįstas atsitiktiniu radioaktyvaus bandinio skilimu, mašinos elgesio iš esmės numatyti negalima (taip mano dauguma fizikų).

Daugiausia šiuolaikinių tyrinėjimų nukreipta save mokančioms mašinoms, sugebančioms žaisti įvairius žaidimus, tobulinti. Kai kurie darbai griežtai įslaptinti: juose „žaidimu" suprantamas karas. Viena pirmųjų save mokančių mašinų buvo ESM 704. Jai programą sudarė Artūras L. Semiuelis.

1959 metais Semiuelis sukūrė programą, pagal kurią mašina galėjo ne tik teisingai žaisti šaškėmis, bet ir gerinti žaidimo strategiją, remdamasi patirtimi, sukaupta ankstesnėse partijose. Iš pradžių Semiuelis lengvai aplošdavo mašiną, bet ESM 704, užuot puolusi smaugti savo programuotoją, ėmė sparčiai tobulėti. Greit ji pasiekė tokį lygį, kad puikiai laimėdavo prieš Semiuelį iš eilės visas partijas! Kiek man žinoma, tokia programa žaisti šachmatais dar nesukurta. Yra tik keletas sąmojingų šachmatų partijų paprastoms (savęs nemokančioms) mašinoms.

Maždaug prieš 20 metų tarybinis didmeistris Michailas Botvinikas pareiškė, kad ateis diena, kai mašina žais neblogiau už didmeistrį. „Tai, žinoma, nesąmonė",— sureagavo į Botviniko pasisakymą amerikiečių šachmatų ekspertas Edvardas Laskeris. Tačiau nesąmone veikiau reikėjo pavadinti Laskerio nuomonę. Žaisdama šachmatais, mašina turi tris didžiulius pranašumus prieš varžovą žmogų: 1) ji niekuomet „nežiopso"; 2) gali analizuoti ėjimus kur kas greičiau, negu žmogus; 3) sugeba neribotai tobulinti savo meistriškumą. Todėl galima tikėtis, kad mašina, sužaidusi keletą tūkstančių partijų su aukštos klasės šachmatininkais, pasieks didmeistrio lygį. Galimas ir toks variantas: šachmatų partija bus sudaryta taip, kad

mašina ims nepaliaujamai ir padūkusiai žaisti pati su savimi. Dėl sugebėjimo greitai veikti, greitaveiksmiškumo ji per trumpą laiką galės sukaupti patirtį, žymiai viršijančią bet kokio šachmatininko žmogaus patirtį.

Eksperimentams su save mokančiomis mašinomis, sugebančiomis žaisti įvairius žaidimus, visai nereikia pirkti elektroninės skaičiavimo mašinos (ESM). Reikia tik prisirinkti kuo daugiau tuščių degtukų dėžučių ir įvairiaspalvių karoliukų.

Idėją sukurti paprastą ir patikimą save mokančią mašiną iš degtukų dėžučių iškėlė Donaldas Mičis.

Straipsnyje „Bandymų ir klaidų metodas“ * Mičis aprašo save mokančią mašiną, kurią galima sumontuoti iš trijų šimtų degtukų dėžučių. Ja galima žaisti kryžiukais ir nuliukais. Ta mašina vadinama MENACE. **

MENACE veikia labai paprastai. Ant kiekvienos dėžutės pavaizduota kokia nors pozicija, pasitaikanti, žaidžiant kryžiukais ir nuliukais. Pirmą ėjimą (taigi ir visus nelyginius) visuomet daro mašina, todėl ant dėžučių pakanka parašyti tik tas pozicijas, kurios susidaro prieš nelyginius ėjimus. Kiekvienos dėžutės viduje yra nedidelio skersmens įvairiaspalvių stiklinių karoliukų (kiekviena spalva atitinka vieną galimų mašinos ėjimų).

Kiekvienos dėžutės viduje įklijuotas kartoninis kampelis. Kratant ir vartant dėžutę, karoliukai įrieda į kartoninį „aptvarą“. Karoliuko, patekusio kampelio viršūnėn, spalva atsitiktinė. Pirmojo ėjimo dėžutėse yra po keturis kiekvienos spalvos karoliukus, trečiojo — po tris, penktojo — po du kiekvienos spalvos karoliukus ir pagaliau septintojo ėjimo dėžutėse yra tik po vieną kiekvienos spalvos karoliuką.

Norint sužinoti eilinį mašinos ėjimą, reikia pakratyti ir apversti dėžutę, paskui ją atidaryti ir pasižiūrėti, kokios spalvos „viršūnės“ karoliukas, t. y. karoliukas, įriedėjęs į dėžutės kartoninio kampelio viršūnę; žaidime „dalyvavusios“ dėžutės lieka atdaros iki partijos pabaigos. Jeigu mašina išlošia, ji paskatinama, pridedant į kiekvieną atidarytą dėžutę po tris tokios pačios spalvos karoliukus, kaip ir „viršūnės“ karoliukas. Jeigu žaidimas baigiasi

---

* *Penguin Science Survey,* 2, 1691.

** *Matchbox Educable Naughts and Crosses Engine* — mašina iš degtukų dėžučių, mokanti žaisti kryžiukais ir nuliukais; menace *(angl.)* — grėsmė, pavojus.

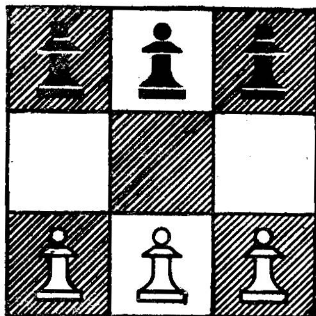
lygiosiomis, į kiekvieną dėžutę pridedama tik po vieną karoliuką (tokios pačios spalvos, kaip ir „viršūnės"). O jeigu mašina pralošia, ji „nubaudžiama", išimant iš kiekvienos dėžutės karoliuką, įriedėjusį į kampelio viršūnę. Toks rimbo ir meduolio metodas panašiai taikomas, mokant gyvulius ir net žmones. Juo daugiau partijų kryžiukais ir nuliukais sužaidžia Mičio mašina, juo geriau ji „įsimena" naudingus ėjimus ir juo atkakliau stengiasi išvengti nepalankių. Tokia yra nors ir labai paprasto, bet vis dėlto save mokančio įrenginio esmė. Tiesa, priešingai ESM 704, dirbančiai pagal Semiuelo šachmatų programą, mūsų „degtukų" mašina nemoka analizuoti sužaistų partijų ir sudarinėti naujų „strateginių planų", atsižvelgiant į sukauptą patirtį.

Pirmasis dviejų dienų turnyras tarp Mičio ir jo mašinos buvo 220 partijų. Iš pradžių Mičis visą laiką baudė savo kūrinį už blogą žaidimą, bet po septyniolikos partijų mašina padėjo pirmąjį kryžiuką tik kampiniame langelyje, o po dvidešimtos partijos — baigė visus žaidimus lygiosiomis. Tikėdamasis varžovą įvilioti į spąstus, Mičis ėmė daryti beprasmiškiausius ėjimus. Tokia taktika pasiteisino tik tol, kol mašina neperprato ir šių gudrybių. Mačas baigėsi triuškinančiu Mičio pralaimėjimu: jis pasitraukė iš turnyro, pralošęs aštuonias partijas iš dešimties. Save mokanti mašina iš degtukų dėžučių tapo kryžiukų ir nuliukų didmeistriu!

Kadangi vargu ar kuris nors skaitytojas ims gaminti save mokančią mašiną iš trijų šimtų degtukų dėžučių, aš sugalvojau paprastesnį žaidimą. Norint sukonstruoti šį žaidimą žaidžiančią mašiną, pakanka paimti iš viso tik dvidešimt keturias dėžutes. Žaidimo šešiais pėstininkais (taip pavadinau savo žaidimą) teorija visiškai triviali, tačiau aš labai prašau skaitytoją neatlikti jokios analizės. Sukonstravę mašiną ir suvokę visus „šešių pėstininkų" niuansus, jūs patirsite žymiai daugiau malonumo.

Su šešiais pėstininkais žaidžiama ant lentos, kurios dydis 3×3 langeliai. Kiekvienas žaidėjas turi po 3 pėstininkus. Pradinė pozicija parodyta 80 paveiksle. Vietoj „tikrų" pėstininkų galima taip pat sėkmingai panaudoti dviejų skirtingų verčių monetas arba kauliukus. Ėjimai galimi tik dviejų tipų: 1) pėstininkas gali pasislinkti per vieną langelį pirmyn, jeigu jis tuščias; 2) pėstininkas gali numušti kitos spalvos pėstininką, stovintį gretimame

langelyje dešinėje ar kairėje, arba įstrižai, ir likti ištuštėjusiame langelyje.



80 pav. **Žaidimas šešiais pėstininkais**

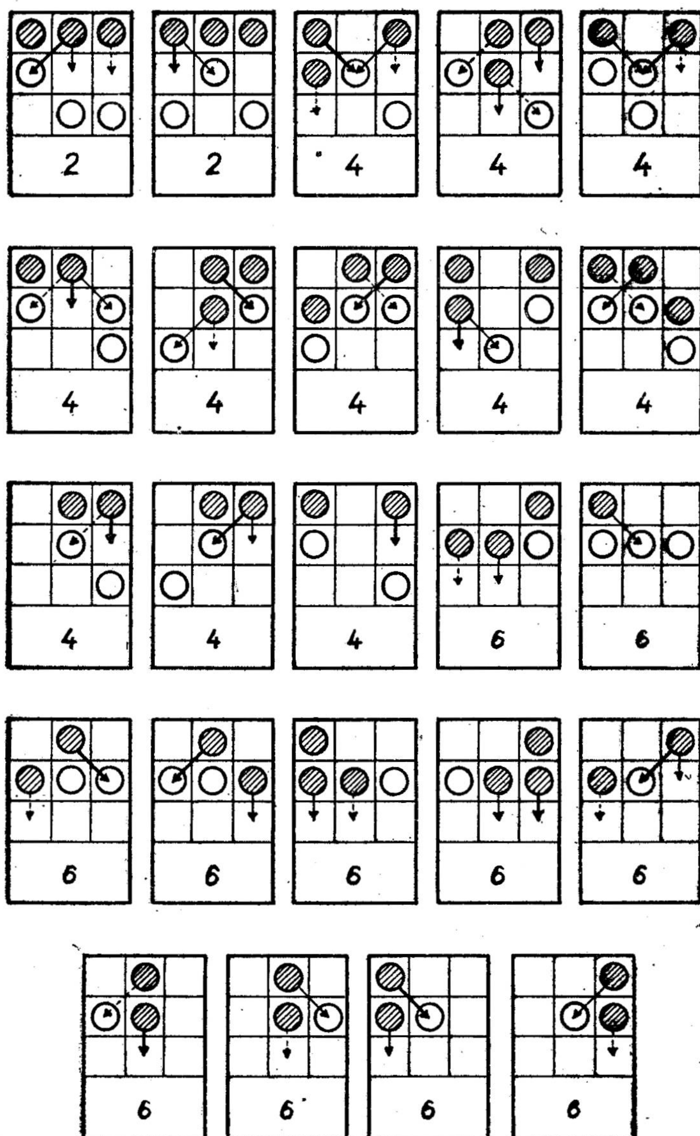
Numuštasis pėstininkas nuimamas nuo lentos. Pėstininkų ėjimai, kaip matyti iš šių taisyklių, iš esmės sutampa su pėstininkų ėjimais įprastuose šachmatuose. Tačiau skirtingai nuo šachmatų, mūsų pėstininkams negalima daryti ėjimo per du langelius partijos pradžioje, painti varžovo pėstininką praeinant ir virsti kokiomis nors kitomis tos pačios spalvos figūromis.

Partija laikoma laimėta trimis atvejais:

1) kai vieną pėstininkų pavyksta įvesti į trečią eilę;
2) kai numušti visi varžovo pėstininkai;
3) kai varžovas negali padaryti eilinio ėjimo.

Žaidžiantieji daro ėjimus iš eilės, kiekvieną kartą pastumdami po vieną pėstininką. Aišku, kad žaidimas baigtis lygiosiomis negali; toli gražu dar neaišku, kuris žaidėjas turi pranašumą: darantis antrą ėjimą ar pradedantis žaidimą.

Mašinai SAMA (SAvę mokanti Mašina su Adaptacija) reikia dvidešimt keturių tuščių degtukų dėžučių ir daug įvairiaspalvių karoliukų. Vietoj karoliukų galima paimti įvairiaspalvių ledinukų arba spalvotų žirnelių. Ant kiekvienos dėžutės užklijuokite vienos pozicijų, pasitaikančių, žaidžiant šešiais pėstininkais (jos pavaizduotos 81 paveiksle), piešinį. Kiekvienoje partijoje robotas turi daryti antrąjį ėjimą. Diagramos, pažymėtos skaitmeniu *2*, vaizduoja dvi pozicijas, kurios gali susidaryti prieš antrąjį ėjimą. Darydami pirmąjį ėjimą, galite pastumti arba vidurinį pėstininką, arba vieną iš kraštinių. Nagrinėsime tik tuos atvejus, kai iš dviejų kraštinių žaidimą pradeda kairysis pėstininkas, nes, pradėję žaidimą dešiniuoju pėstininku, gausite veidrodiškai simetrišką ėjimų seką. Diagramos, pažymėtos skaitmeniu *4*, vaizduoja vienuolika pozicijų, kuriose robotas gali atsidurti prieš savo antrąjį (ketvirtąjį nuo žaidimo pradžios) ėjimą. Skaitmeniu *6* pažymėtos vienuolika galimų pozicijų prieš paskutinįjį



81 pav. Paveikslėliai, kuriuos reikia užklijuoti ant degtukų dėžučių — save mokančios mašinos SAMA elementų (keturi rodyklių tipai reiškia keturių skirtingų spalvų rodykles)

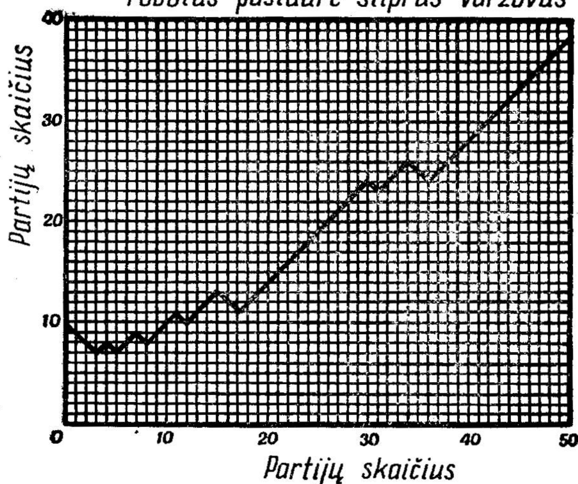
roboto ėjimą (šeštąjį nuo žaidimo pradžios). (Paveiksluose pavaizduotos visos galimos pozicijos, tarp jų ir veidrodiškai simetriška. Aš tai padariau tik todėl, kad skaitytojui būtų lengviau naudotis mašina. O iš tikrųjų pakanka devyniolikos dėžučių.)

Į kiekvieną dėžutę įdėkite tiek karoliukų, kiek rodyklių diagramoje. Kiekvieną rodyklę turi atitikti tam tikros spalvos karoliukas. Dabar robotas paruoštas žaidimui.

Kiekviena rodyklė pažymi galimą, t. y. suderinamą su žaidimo taisyklėmis, ėjimą. Diagramose pavaizduoti visi galimi ėjimai. Iš čia išplaukia, kad mašina, pirma, darys ėjimus tik „pagal taisykles" ir, antra, galės padaryti bet kurį leistiną ėjimą. Tačiau mūsų robotas neturi jokios tikslios strategijos ir kol kas jis dar nieko nemoka.

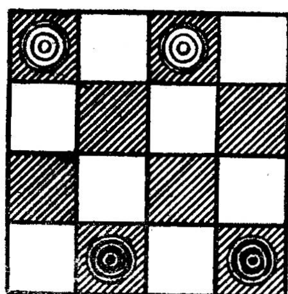
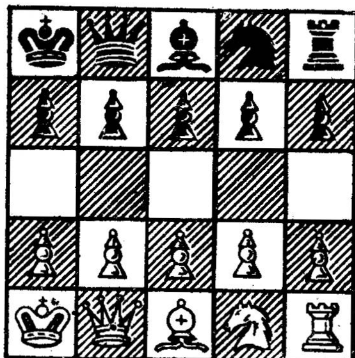
Mokoma taip. Padarę pirmąjį ėjimą, imate dėžutę, ant kurios pavaizduota lentoje susidariusi pozicija, pakratote ją ir užsimerkę atstumiate dangtelį. Išėmę iš dėžutės bet kurį karoliuką, uždarote ją, pastatote ant stalo, o ant viršaus dedate išimtą karoliuką. Dabar atsimerkite, pažiūrėkite, kokios spalvos karoliukas, ir suradę diagramoje atitinkamą rodyklę, padarykite ja nurodytą ėjimą. Paskui darote savo eilinį ėjimą (pirmą ėjimą darė mašina). Dabar vėl pakartokite aprašytąją procedūrą. Taip reikia tęsti tol, kol baigsis partija. Jeigu išloš robotas, visus išimtus karoliukus padėkite į vietą ir pradėkite sekančią partiją. O jeigu robotas praloš, jį nubauskite: atimkite vieną karoliuką, atitinkantį jo paskutinįjį ėjimą. Visus kitus karoliukus padėkite į vietą ir tęskite mokymo kursą — pradėkite sekantį žaidimą. Jeigu paskutinė dėžutė ištuštės (taip kartais būna), vadinasi, visi mašinos ėjimai rodo, kad ji pralaimės, todėl ir atsisako toliau žaisti. Tokiu atveju karoliukas išimamas iš priešpaskutinės dėžutės.

Surašykite pirmųjų penkiasdešimties partijų visas roboto pergales ir pralaimėjimus, paskui sudarykite grafiką. 82 paveiksle pavaizduoti tipiški tokio turnyro rezultatai. Iš diagramos matyti, kad, sužaidęs trisdešimt šešias partijas (ir pralaimėjęs vienuolika), robotas pasidarė labai stiprus varžovas. Baudų sistema sugalvota specialiai tam, kad galima būtų maksimaliai sutrumpinti mokymo laiką, tačiau jis iš esmės priklauso nuo mokytojo meistriškumo. Kuo meistriškesnis mašinos varžovas, tuo greičiau ji mokosi žaisti.



82 pav. Mašinos SAMA mokymo pirmosiose penkiasdešimtyje partijų grafikas (laužtės intervalas su polinkiu žemyn reiškia pralaimėjimą, intervalas su polinkiu aukštyn — pergalę)

Galima sugalvoti ir kitą mokymo sistemą. Sakykim, pavyzdžiui, jūs norite, kad robotas nugalėtų maksimalų skaičių kartų kiekvienuose dvidešimt penkiuose žaidimuose. Tuomet geriausia jį skatinti (kaip ir bausti), pridedant į kiekvieną dėžutę reikiamos spalvos karoliukų. Taip neteisingi ėjimai likviduojami šiek tiek lėčiau, bet užtai mašina vis rečiau klysta. Būtų įdomu padaryti dar vieną mašiną, kuri iš pradžių taip pat nemokėtų žaisti, ir ją mokyti, remiantis antrąja sistema. Šį robotą galima pavadinti SAM (SAve mokanti Mašina). Padidinus elementų — degtukų dėžučių — skaičių vienoje ir kitoje mašinoje, jas būtų galima išmokyti daryti ne tik lyginius, bet ir nelyginius ėjimus, atskirai imant ir pirmąjį ėjimą. Vėliau būtų galima surengti tarp mašinų šešiasdešimties partijų turnyrą ir pažiūrėti, kuri mašina — SAM ar SAMA — pasieks daugiau pergalių. Kiekvienoje partijoje pirmąjį ėjimą robotai daro paeiliui. Analogiškas mašinas nesunku išrasti ir kitiems žaidimams. . Pavyzdžiui, Stiuartas K. Chaitas iš degtukų dėžučių neseniai sukonstravo ro-

83 pav. Lentos žaisti mini šaškėmis (kairėje) ir mini šachmatais (dešinėje)

botą NIMBLE (NIM Box Logio Engine — loginis įrenginys iš dėžučių žaisti nim), kuris mokosi žaisti nim pagal schemą 3—3—3 (kauliukai padalyti į tris krūveles, po tris kauliukus kiekvienoje krūvelėje). Chaito robotas gali daryti ir pirmąjį, ir antrąjį ėjimą; po kiekvienos partijos jis arba paskatinamas, arba baudžiamas. NIMBLE sudarytas iš viso iš aštuoniolikos degtukų dėžučių; po trisdešimties partijų jis jau beveik nenugalimas. Nim žaidimas išsamiau išnagrinėtas 14 mano pirmosios knygos skyriuje.

Daugelis populiarių žaidimų taip supaprastėja, mažinant lentos matmenis, kad juos gali žaisti degtukai robotai. Taip ant lentos, kurios dydis 2×2, dar galima žaisti go. Mažiausia šaškių lenta, ant kurios žaidimas dar nebūna trivialus, pavaizduota 83 paveikslo kairėje. Sukonstruoti iš degtukų dėžučių mašiną žaisti tokiomis „mini šaškėmis“ visai nesunku; jeigu nepanorėsite to daryti, analizuokite žaidimą. Pamėginkite atsakyti į klausimą: ar mini šaškių partija būtinai turi baigtis lygiosiomis, ar vienas žaidėjas visuomet laimi (tariama, kad abu varžovai žaidžia puikiausiai).

Žaidimas šachmatais lieka toli gražu už bet kokios save mokančios mašinos iš degtukų dėžučių galimybių ribų, net jeigu ir maksimaliai sumažinsim šachmatų lentą (tačiau žiūrėdami, kad ant jos būtų galima padaryti bet kurį taisyklių leidžiamą ėjimą; lenta, patenkinanti šią sąlygą, pavaizduota 83 paveikslo dešinėje). Nustatyti,

ar turi bent vienas žaidėjas pirmenybę ir kuris, matyt, neįmanoma. Mini šachmatai gali padėti sudaryti supaprastintą šachmatų programą save mokančiai elektroninei skaičiavimo mašinai. Jie naudingi ir norintiems sužaisti šachmatais darbe per neilgą pertrauką.

Daugelis skaitytojų man pranešė apie eksperimentus su save mokančiomis mašinomis iš degtukų dėžučių. Vienas jų demonstravo mašiną SAMA studentų karnavale. Robotas buvo mokomas pagal antrąją sistemą, t. y. karoliukai buvo tik pridedami, todėl jo varžovai visuomet turėjo šansų (tiesa, nepaliaujamai mažėjančių) laimėti. Nugalėtojams buvo dalijami prizai, kurių vertė didėjo, augant mašinos meistriškumui.

Kai kurie skaitytojai, man patarus, sukūrė dvi mašinas ir surengė turnyrą. Vienas skaitytojas tokią robotų porą pavadino BNI (Besimokančios Nevienodai Instruktuojamos mašinos). Mašinos tarp savęs žaidė tol, kol viena jų laimėjo visas partijas iš eilės. Kitas skaitytojas antrąją mašiną pavadino RAT * (Retless Auto-learning Tyrant — kietaširdis save mokantis tironas). Jis pranešė, kad po aštuoniolikos partijų RAT pasidavė, visose kitose partijose pripažinusi SAMA pergalę.

Vieno laiško autorius mašinas pavadino Marku-1 ir Marku-2. Kaip ir reikėjo tikėtis, Markui-1 prireikė aštuoniolikos partijų, kad išmoktų pasiekti pergalę kiekviename žaidime, o Markas-2 per tą laiką išmoko kuo ilgiau užvilkinti savo pralaimėjimą. Laiško autorius parengė velnišką planą. Pakvietęs iš studentų matematikos būrelio jaunuolį ir merginą, nemokančius žaisti šešiais pėstininkais, davė jiems perskaityti žaidimo taisykles ir surengė tarp jų turnyrą. Cituoju jo laišką:

„Abu turnyro dalyviai sėdėjo atskiruose kambariuose, pasakydami savo ėjimus teisėjui. Žaidėjams nežinant, teisėjai (taip pat du) pranešinėjo ėjimus į trečią kambarį, kur stovėjo „mašinos" ir buvo skaičiuojamos pergalės bei pralaimėjimai. Varžovai manė, kad jie žaidžia vienas su kitu per tarpininkus; o iš tikrųjų kiekvienas žaidė su mašina. Pradėdami naują partiją, dalyviai keitėsi figūromis (žaidęs baltaisiais, ėmė juoduosius, ir atvirkščiai). Esantys viduriniajame kambaryje taip pat buvo užimti: jie sekė, kad nebūtų supainioti ėjimai, kratė ir atidarinėjo dėžutes („aptarnavo mašinas") bei skaičiavo mačo rezultatą.

---

* Rat *(angl.)* — žiurkė. — *Vert. į rusų k. past.*

Studentus paprašė, kad jie žaisdami komentuotų savo ir varžovo ėjimus. Štai kai kurie šių komentarų:

„Saugiausias ėjimas, kokį tik galima padaryti, kad varžovas nepaimtų mano pėstininko. Aš beveik tikra, kad laimiu".

„Ji paėmė mano pėstininką, bet ir aš nelikau skolingas: paėmiau jo pėstininką. Jeigu ji eis taip, kaip galvoju, prarasiu vieną pėstininką, bet užtai sekančiu ėjimu galėsiu uždaryti visas jos figūras."

„Ir kokia aš žioplė!"

„Puikus ėjimas! Manau, kad aš šią partiją pralaimiu."

„Mano nuomone, jis visai negalvoja. Dabar jau galėtų ir nežiopsoti."

„Puikiai žaidžia! Ji pradeda suprasti, ko aš noriu."

„Pagaliau jis ėmė galvoti, ir žaisti pasidarė kur kas įdomiau."

„Koks keistas ėjimas! Nejaugi ji nemato, kad, jeigu eis pirmyn, aš laimėsiu?"

„Mano varžovas žaidė gerai, bet, mano nuomone, aš pirmoji perpratau žaidimą."

„Pirmas perpratau žaidimą aš."

Kuomet varžybų dalyviams parodė „mašinas", su kuriomis jie žaidė, studentai niekaip negalėjo patikėti, kad jų varžovai buvo ne žmonės.

Masačiuseto technologinio instituto matematikai sudarė programą mašinai ESM 1620 mokyti žaisti aštuoniais pėstininkais. Žaidimas aštuoniais pėstininkais — vienas žaidimo šešiais pėstininkais variantų (žaidžiama pagal tas pačias taisykles, bet ant „mini lentos" 4×4, ir kiekvienas varžovas turi po keturis pėstininkus). Programos autorius man pranešė, kad pradedantis žaidimą tikrai laimi, jeigu jis padaro pirmą ėjimą figūra, stovinčia kampe. Kiti debiutai, kai pirmąjį ėjimą daro ne kampinis, o kažkuris centrinių pėstininkų, programoje nenumatyti.

Viena skaitytoja pranešė, kad ji išmoko žaisti šešiais pėstininkais greičiau, negu jos sukonstruota mašina (vietoj karoliukų buvo panaudoti ledinukai), nors ir pradėjo abi kartu. „Mat, — rašo ji, — po kiekvieno pralaimėjimo aš atimdavau iš mašinos vieną ledinuką ir jį suvalgydavau."

Kito laiško autorius pritaikė „degtukų" mašinų mokymo principus, sudarydamas mokymo programą skaičiavimo mašinai žaisti kryžiukais ir nuliukais. Iš pradžių mašina žaidė be jokios sistemos, pasirinkdama ėjimus atsitiktinai, ir žmonės prieš ją lengvai laimėdavo. Vėliau mašina, sužaidusi pati su savimi du tūkstančius partijų (tai

truko dvi—tris minutes), įsigijo būtinų įgūdžių, ir paskui jos turnyrai su žmonėmis jau būdavo labai aukšto lygio.

Gindamas Botviniko nuomonę, kad mašina kada nors tobulai išmoks žaisti šachmatais, gavau daugybę šachmatininkų piktų laiškų. Vienas didmeistris mane įtikinėjo, kad Botvinikas kalbėjo nenuoširdžiai. Jūs galite patys tai patikrinti, perskaitę Botviniko straipsnį laikraščio „Komsomolskaja pravda" 1961 metų sausio 3 d. numeryje. Jame, be kita ko, sakoma: „Ateis laikas, kai mašinoms, žaidžiančioms šachmatais, bus suteikiamas tarptautinio didmeistrio vardas... Tuomet teks surengti du pasaulio čempionatus: vieną — žmonėms, kitą — mašinoms. Antrasis turnyras, suprantama, vyks ne tarp mašinų, o tarp tų, kurie jas kuria ir programuoja."

Audringą šachmatininkų reakciją į prielaidą, kad skaičiavimo mašinos kada nors išmoks žaisti kaip meistrai ir net didmeistriai, nesunku suprasti. Šia tema buvo daug kalbama ir rašoma. Žmogaus žaidimas su šachmatų mašina — mėgiamas mokslinės fantastikos siužetas. Ir vis dėlto tokia reakcija itin įdomi. Galima pateikti pakankamai svarių argumentų, kad neįmanoma sukurti mašinų, sugebančių „kurti" nuostabias melodijas, eiles arba vaizduojamojo meno kūrinius, bet šachmatai, nors ir sudėtingas žaidimas, iš esmės niekuo nesiskiria nuo žaidimo kryžiukais ir nuliukais. Kaip tik todėl skaičiavimo mašinos labai tinka mokyti žaisti šachmatais.

Tačiau, prieš pasirodant mašinoms šachmatininkėms, be abejo, bus sukurtos mašinos, mokančios žaisti šaškėmis. Šis žaidimas jau taip stropiai išnagrinėtas, kad mačai tarp čempionų beveik visuomet baigiasi lygiosiomis, o norint, kad žaidimas būtų dar įdomesnis, dabar priimta tris pirmuosius ėjimus padaryti atsitiktinai. Ričardas Belmanas straipsnyje „Apie dinaminio programavimo taikymą optimaliai strategijai surasti, žaidžiant šachmatais ir šaškėmis" *, rašo, kad, jo nuomone, „žaidimas šaškėmis bus išnagrinėtas per artimiausius dešimt metų".

Žaidimas šachmatais, be abejo, kur kas sudėtingesnis. Matyt, dar negreit ateis laikas, kai mašina po jūsų pirmojo ėjimo kažką apskaičiuos ir atsakydama tik atspaus-

---

* *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **53**, February 1965, p. 244—247.

dins žodį „pasiduodu“ (tai senas pokštas naujais apdarais). Dar 1958 metais kai kurie įžymūs matematikai manė, kad po dešimties metų mašina išmoks žaisti neblogiau už didmeistrį, tačiau, kaip rodo patirtis, jų prognozės pasirodė perdaug drąsios. Tapęs pasaulio šachmatų čempionu, Tigranas Petrosianas 1963 metais laikraščio „Niujork taims“ korespondentui pareiškė, kad, jo nuomone, per artimiausius penkiolika dvidešimt metų mašina, žaisdama šachmatais, vargu ar pasieks reikiamo tobulumo.

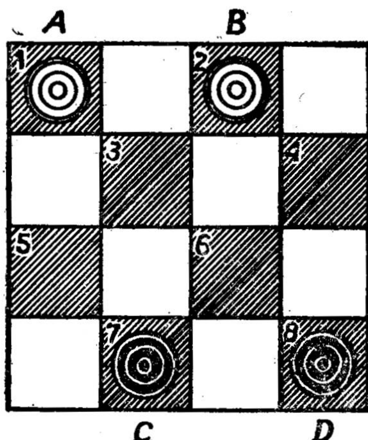
Lentą žaisti šešiais pėstininkais galima padaryti platesnę, išlaikant jos vertikalųjį matmenį. Tokį apibendrintą žaidimo šešiais pėstininkais variantą specialiame straipsnyje išsamiai analizuoja Džonas R. Braunas.* Sakykim, lentos plotį sudaro *n* langelių. Jeigu skaičiaus *n* paskutinysis skaitmuo lygus 1, 4, 5, 7 arba 8, laimi tas, kuris daro pirmąjį ėjimą. Visais kitais atvejais **nugali** antrasis žaidėjas.

ATSAKYMAI

Jeigu abu varžovai daro racionaliausius ėjimus, šaškių partija ant lentos 4×4 baigiasi lygiosiomis. 84 paveiksle pavaizduoti trys galimi pirmieji juodųjų ėjimai: C5; C6; D6.

Darydami pirmąjį ėjimą C5, juodieji pralaimi, jeigu baltieji atsako ėjimu A3. Darant ėjimą C6 nepriklausomai nuo atsakomojo baltųjų ėjimo, galima pasiekti lygiąsias.

Juodiesiems naudingiausia žaidimą pradėti ėjimu D6. Jeigu baltieji atsako ėjimu B3, juodieji



84 pav. Racionalus ėjimų parinkimas, žaidžiant mini šaškėmis (lygiosios)

* *Mathematical Magazine,* 38, November 1965, p. 216—299.

laimi. Tačiau baltieji, padarę ėjimą B4, partiją baigia lygiosiomis.

Kalbėdamas apie žaidimus, kurių galima išmokyti save mokančias mašinas iš degtukų dėžučių, užsiminiau apie go ant lentos 3×3. Žaidėjas, pirmuoju ėjimu užėmęs centrinį langelį, o paskui laikęsis racionalios strategijos, būtinai laimi.

Žaidimas šaškėmis ant lentos 4×4 trivialus, tačiau, padidinę lentą iki 5×5, gausite stebėtinus rezultatus, neabejotinai vertus dėmesio. Apie paskutinį žaidimo mini šaškėmis variantą perskaičiau viename iš laiškų, kurio autorius taip pat kažkur girdėjo apie šį žaidimą. Partijos pradžioje trys baltos šaškės statomos pirmoje eilėje, o trys juodos — penktoje. Pradeda juodosios. Taisyklės daugiau niekuo nesiskiria nuo įprastinių. Iš pirmo žvilgsnio gali atrodyti, kad, laikantis racionalios strategijos, žaidimas turi baigtis lygiosiomis; iš tikrųjų situacija sudėtingesnė, nes ant lentos 5×5 nebūna 2—4, 4—2 tipo ėjimų, kurie leidžiami damai. Net jeigu abu dalyviai žaidžia labai gerai, vienas jų būtinai nugali, be to, juo didesnis pralaimėjusiojo meistriškumas, juo efektyvesnė pergalė. Kad neatimčiau jums malonumo, suteikiu sąlygas savarankiškai išanalizuoti žaidimą ir nuspręsti, kuris žaidėjas — tas, kuris pradeda, ar tas, kuris daro antrąjį ėjimą, — gali visuomet pasiekti pergalę.

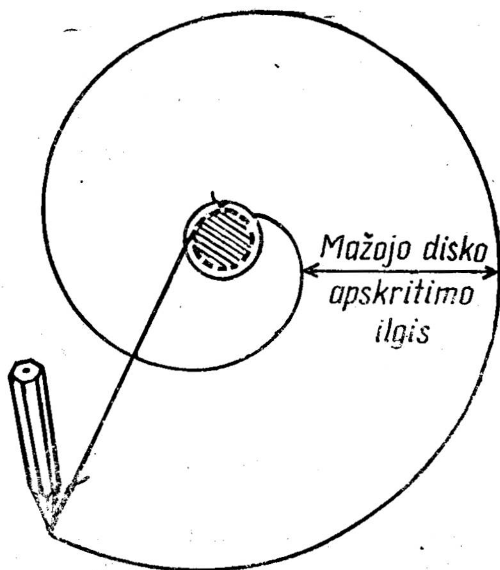
XV skyrius

Spiralės

Du vaikai supasi ant lentos, padėtos skersai rąsto. Kokią kreivę aprašo čia lentos taškai?

Žmogus pastoviu greičiu eina išilgai besisukančios karuselės spindulio. Kokia bus jo judėjimo trajektorija žemės atžvilgiu?

Trys šunys tupi lygiakraščio trikampio viršūnėse. Davus komandą, jie pašoka ir kiekvienas pasileidžia link savo kaimyno iš dešinės, visą laiką atidžiai sekdamas tą šunį, kurį jis vejasi. Visi trys šunys susitinka trikampio



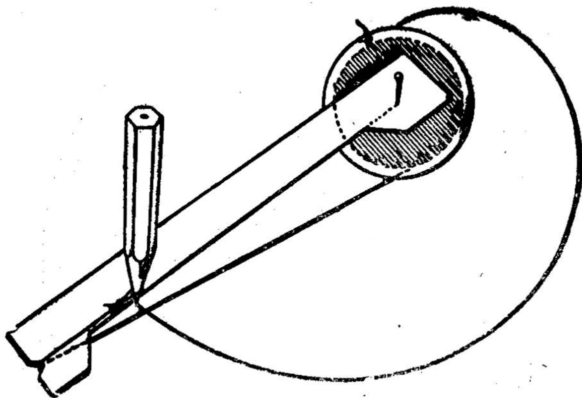
85 pav. Taip brėžiama apskritimo evolventė

centre. Klausiama, kokios kreivės formą turi kiekvieno šuns bėgimo trajektorija?

Atsakymas visais atvejais vienas — spiralė, bet visos trys spiralės skirtingos. Apie kiekvieną jų papasakosiu išsamiau, nepamiršdamas pabrėžti tų savybių, kurias nagrinėja įdomioji matematika.

Pirmajame uždavinyje bet kuris besisupančios lentos taškas juda kreive, vadinama apskritimo evolvente. Bet kurios kreivės (tarp jų ir apskritimo) evolventė sudaroma taip. Reikia paimti siūlą, pritvirtinti jį prie tos kreivės, kurios evolventę norime gauti, ir, įtempus siūlą išilgai kreivės, pradėti jį išvynioti (stebint, kad siūlas visą laiką būtų įtemptas). Bet kuris siūlo taškas nubrėš kreivę, kuri ir bus duotosios kreivės evolventė. Prisiminkite, kaip ganosi ožka, pririšta prie ritinio formos kuoliuko: jeigu virvė užsivyniojo ant kuoliuko, ožka, norėdama nueiti kuo toliau nuo kuoliuko ir visą laiką tempdama virvę, judės ritinio pjūvio apskritimo evolvente.

Puikus būdas apskritimo evolventei nubrėžti pavaizduotas 85 paveiksle.



86 pav. Prietaisas Archimedo spiralei brėžti

Iš storo kartono iškirpę nedidelį skritulį, priklijuokite jį prie popieriaus lapo. Iš viršaus priklijuokite dar kitą šiek tiek didesnio skersmens kartoninį skritulį, kurio krašte būtų radialinė įpjova. Siūlo gale užmezgę mazgą, įsprauskite siūlą į įpjovą ir apvyniokite jį apie mažąjį skritulį. Laisvajame siūlo gale vėl užmegzkite kilpą ir įstatykite į ją pieštuko smaigalį. Dabar, įtempę siūlą, pamažu jį išvyniokite; pieštukas nubrėš popieriuje spiralę — apskritimo evolventę. Gretimų tokios spiralės vijų atstumas, išmatuotas išilgai tiesės, liečiančios mažąjį skritulį, yra pastovus ir lygus jo apskritimo ilgiui. Mažojo skritulio apskritimas vadinamas spiralės evoliute.

Žmogus, einantis besisukančios karuselės spinduliu, žemės atžvilgiu juda kreive, vadinama Archimedo spirale (pirmasis tokio tipo spiralę savo traktate „Apie spirales“ nagrinėjo Archimedas). Ant patefono disko uždėkite kartono skritulį, įbeskite jo centre pieštuko smaigalį ir, kartonui sukantis, veskite pastoviu greičiu pieštuką išilgai skritulio spindulio — skritulyje nubrėšite Archimedo spiralę. Visiems gerai žinomos plokštelės vagutės taip pat turi Archimedo spiralės formą. Archimedo spiralės lygtis polinėse koordinatėse išreiškia jos pagrindinę savybę: kokį tos spiralės tašką paimtume, to taško spindulio-vektoriaus ilgio (atstumo nuo koordinačių pradžios) ir polinio kampo (pradedamu matuoti nuo kokios nors

fiksuotos krypties) santykis bus vienas ir tas pats skaičius. Spiralės labai paprastai užrašomos polinėse koordinatėse, bet jų lygtys stačiakampėse koordinatėse labai sudėtingos.

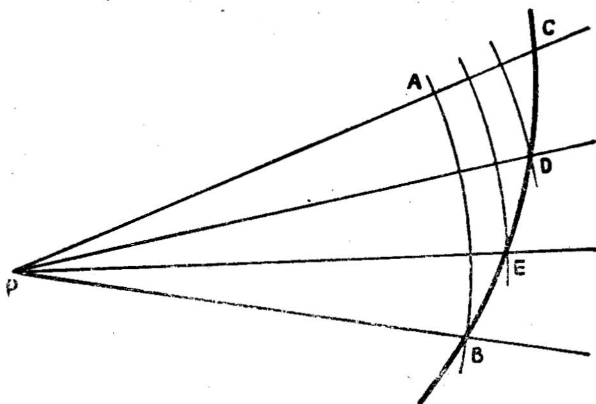
Tiksliau Archimedo spiralę galima nubrėžti prietaisu, pavaizduotu 86 paveiksle. Prietaisas sudarytas iš dviejų jums jau žinomų kartoninių ratukų, prie kurių smeigtuku pritvirtinama specialios formos kartono juostelė. Sukant juostelę, pieštukas slenka išilgai jos pakraščio greičiu, kuris, kaip lengva suprasti, bus proporcingas sukimosi greičiui.

Pirmoji Archimedo spiralės vija iš pažiūros panaši į apskritimo evolventę, tačiau iš tikrųjų šios kreivės nesutampa. Atstumas tarp Archimedo spiralės vijų taip pat yra pastovus dydis, tačiau jis matuojamas ne išilgai apskritimo liestinės, o išilgai spindulio. Praktikoje dažniausia pasitaiko Archimedo spiralės ir apskritimo evolventės, pavyzdžiui, stangriai susuktos spyruoklės, susuktų kilimų arba popieriaus rulonų kraštai ir t. t. Paprastai nė viena iš šių kreivių nėra ideali spiralė, todėl būna sunku nustatyti, kuri iš dviejų spiralių yra panašesnė į nagrinėjamą kreivę.

Nubrėžę tikslią Archimedo spiralę, gavote instrumentą bet kokiam kampui padalyti į bet kokį skaičių lygių dalių liniuote ir skriestuvu. Kampo trisekcija atliekama taip. Kampo viršūnę sutapatinkite su spiralės poliumi, o jo kraštines pratęskite iki susikirtimo su kuria nors spiralės vija (87 pav.). Iš taško P nubrėžkite lanką AB. Atkarpą AC žinomu būdu padalykite į tris lygias dalis. Per gautuosius taškus iš centro P nubrėžkite apskritimų lankus iki susikirtimo su spiralės vija. Taškus D ir E, esančius spiralėje, sujungę su kampo viršūne P, gausite uždavinio sprendinį. Dabar įrodykite, jog nubrėžta teisingai.

88 paveiksle pavaizduotas mechanizmo, dažnai naudojamo tolygiam rato judesiui paversti tolygiu tiesiaeigiu stūmoklio judesiu, įrengimas. (Pagal šį principą veikia dauguma siuvamųjų mašinų, kur, sukantis špūlei, siūlas tiesiai juda tai pirmyn, tai atgal.)

Šunys, vejantys vienas kitą į lygiakraščio trikampio centrą, juda logaritmine spirale. Logaritminę spiralę galima apibrėžti kaip kreivę, kuri visus spindulius-vektorius kerta vienu ir tuo pačiu kampu. Tarkime, kad uždavinio sąlygoje yra ne trys šunys, o trys taškai. Tuomet kiekvie-

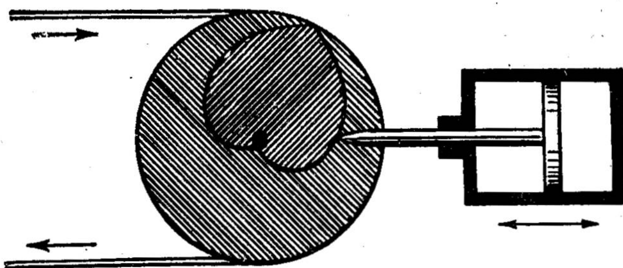


87 pav. Kampo trisekcija Archimedo spirale

nas taškas nueis baigtinį atstumą (lygų dviem trečiosioms trikampio kraštinės), bet dėl to be galo daug kartų teks apsisukti apie polių!

Jeigu pagal uždavinio sąlygą n šunų ($n>2$) yra taisyklingo n-kampio viršūnėse, tada kiekvieno šuns judėjimo trajektorija bus logaritminė spiralė. Atvejis $n=2$ reiškia, jog du šunys bėga vienas į kitą tiese. Kai $n=\infty$, šunys vienas paskui kitą bėga apskritimu. Taigi gana apytikriai parodėme, kad logaritminė spiralė virsta tiese ir apskritimu, kai kampas, kurį ji sudaro su spinduliuvektorium, atitinkamai lygus 0° ir 90°.

Kreivė, kertanti visus Žemės meridianus ir sudaranti su jais kokį nors pastovų kampą (išskyrus statų), taip



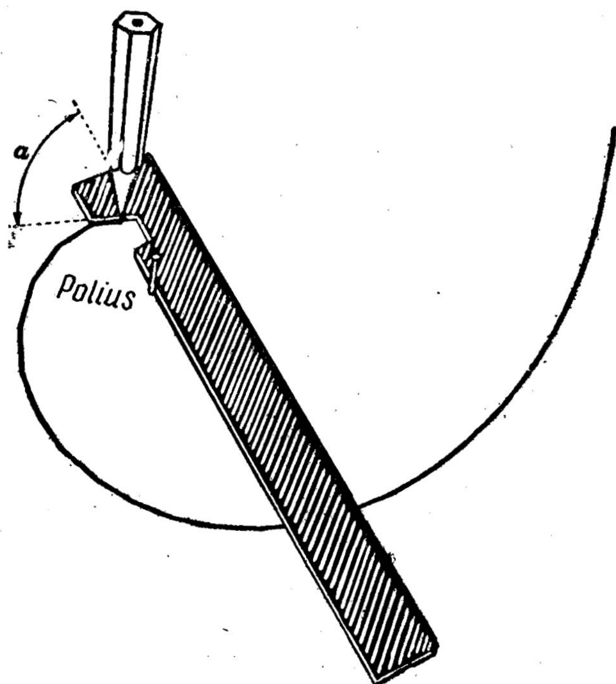
88 pav. Sukamojo judesio pavertimas tiesiaeigiu Archimedo spirale

pat yra logaritminė spiralė ir turi specialų pavadinimą: loksodroma (arba pastovių kampų linija). Jei skristute į šiaurės rytus, griežtai laikydamiesi krypties pagal kompasą, aprašytute loksodromą, kuri atvestų jus į Šiaurės ašigalį. Kaip ir uždavinyje su šunimis, jūsų kelio ilgis būtų baigtinis, tačiau (jeigu tik jūs būtute taškas) atsidurtute ašigalyje tik po begalinio skaičiaus apsisukimų apie jį. Jūsų skridimo trajektorijos projekcija plokštumoje, liečiančioje Žemės paviršių ašigalyje, pasirodytų esanti tiksli logaritminė spiralė.

Įvairios gamtoje pasitaikančios spiralės paprastai yra logaritminės. Iš tikrųjų prisiminkite spirale susuktą Nautilijaus kriauklę, sraigių kriaukles, daugelio augalų žiedynus, pavyzdžiui, saulutės arba saulėgrąžos, pušies kankorėžį, kurio žvyneliai išsidėstę spirale. Vienas labiausiai paplitusių vorų, epeira, ausdamas tinklą, susuka siūlus į centrą logaritminėmis spiralėmis. Žano Anri Fabro knygos „Voro gyvenimas" visas priedas skirtas logaritminės spiralės matematinėms savybėms ir įdomiausiems atvejams, pasitaikantiems gamtoje, nagrinėti. Apie spirales, aptinkamas augalų ir gyvūnų pasaulyje, jų glaudų ryšį su auksiniu pjūviu bei Fibonačio skaičiais yra daug literatūros, neretai labai ekscentriško charakterio. Ypač dažnai cituojama Teodoro Andriaus Kuko knyga „Gyvybės kreivės". Pirmą kartą ji išleista 1914 metais ir nuo to laiko ilgai jos leidimų nebuvo.

89 paveiksle pavaizduotas paprastas prietaisas logaritminei spiralei brėžti. Vienas kartoninės juostelės kraštas remiasi į smeigtuką, įtvirtintą būsimosios spiralės poliuje. Išilgai nuožulnios išpjovos nubrėžę trumpą atkarpą, truputį pasukite juostelę ir pastumkite ją taip, kad kita atkarpa prasidėtų pirmosios gale. Taip popieriuje atsiras brėžinys, sudarytas iš daugybės stygų ir primenantis voratinklį. Iš prietaiso sandaros aišku, kad visos stygos su spinduliu-vektoriumi sudaro vieną ir tą patį kampą. Kuo mažesnės bus nubrėžtos atkarpos, tuo tikslesnę spiralę gausite. Šiuo prietaisu taip pat galima patikrinti, ar kokia nors spiralė yra logaritminė.

Kai kampas α status, spiralė virsta apskritimu. Ji tampa iš esmės evolvente, kai kampas sudaro 74°39 (tiksli reikšmė iš tikrųjų šiek tiek didesnė). Bet kurios logaritminės spiralės evolventė visada yra logaritminė spiralė, bet yra vienintelis atvejis, kai tos dvi spiralės sutampa.



89 pav. Kaip nubrėžti logaritminę spiralę

Logaritminę spiralę atrado Rene Dekartas. Jokūbas Bernulis, šveicarų matematikas, gyvenęs XVII amžiuje, buvo sukrėstas, nustatęs, jog logaritminė spiralė atsistato po įvairių transformacijų (pavyzdžiui, perėjus nuo logaritminės spiralės prie jos evolventės). Šis faktas taip paveikė Bernulį, kad jis prisakė jo antkapyje iškirsti spiralę ir užrašą „*Eadem mutata resurgo*" („Pakeista aš iš naujo prisikelsiu"). Paskutinė Bernulio valia buvo išpildyta labai nevykusiai. Lotyniško užrašo antkapyje iš viso nėra, o netalentingas graveris iškirto tik grubią lyg Archimedo spiralės, lyg apskritimo evolventės kopiją. Šią spiralę galima pamatyti ant Bernulio kapo Bazelyje. Iš pirmo žvilgsnio aišku, kad akmenyje iškirstoji spiralė nėra logaritminė, nes atstumas tarp jos vijų, tolstant nuo poliaus, nedidėja.

Logaritminės spiralės gamtoje gali būti gigantiškų matmenų. Tuo požiūriu įspūdingiausia yra galaktikų spiralinė struktūra. Šis faktas iškelia ne mažesnį uždavinį, negu jų sandaros problema. Žinoma, kad galaktikos sudarytos iš karštų žvaigždžių ir dujų telkinių, kurios, galaktikai sukantis, išsidėsto išilgai logaritminės spiralės. Įsivaizduokite bilijono žvaigždžių telkinį, kuris sukasi erdvėje kaip milžiniškas vaikiškas vilkelis. Silpnas baltas Paukščių Tako švytėjimas aiškinamas tuo, kad mes į jį žiūrime tartum iš šono, per dvi milžiniškas mūsų Galaktikos atšakas. Stebėjimai rodo, kad prie Galaktikos centro spiralės atšakos sukasi žymiai greičiau, negu pakraštyje, taigi jos turėtų greitai išsivyti ir galbūt visai išnykti. Tačiau galaktikos visada išlaiko spiralinę struktūrą, o tai rodo, jog atšakos visai neišsivynioja. Yra teorija, pagal kurią, viena, atšaka nenutrūkstamai prisisotina švytinčių dujų, antra, — išgaruoja, dėl to galaktikos atšakos yra pilnai apibrėžtos formos, charakteringos tik tai galaktikai.

Spiralės analogas erdvėje yra sraigtinė linija. Spiralė, kaip ir sraigto linija, asimetriška. Tai reiškia, kad plokštumoje egzistuoja kiekvienos spiralės dvi atmainos, kurios yra viena kitos veidrodinis atspindys. Jeigu spiralę galima apžiūrėti iš abiejų pusių, kaip voratinklį arba (įsivaizduokime, kad jau įmanomi tolimi kosminiai skrydžiai) kaip galaktikas, jos kryptis priklauso nuo to, kokiame taške yra stebėtojas. Spiralė, kurios negalima nei apeiti, nei pasukti, norint pažvelgti į ją iš kitos pusės, visada būna susukta arba pagal laikrodžio rodyklę, arba priešinga kryptimi.

Sąvoka „pagal laikrodžio rodyklę“ liks, suprantama, nevienareikšmė tol, kol nustatysite, ar, judėdami spirale, artėjate į centrą, ar, atvirkščiai, išeinate iš spiralės, toldami nuo jo. Tokiu nevienareikšmiškumu pagrįstas žaismingas fokusas su pieštuku ir popieriumi. Paprašykite ką nors kairėje popieriaus lapo pusėje, pradedant iš centro, nupiešti spiralę. Paskui pridenkite piešinį ranka ir paprašykite tą patį žmogų dešinėje pusėje nubrėžti tos pačios spiralės veidrodinį atspindį, bet pradedant nuo didžiausios vijos ir susukant spiralę į centrą. Paprastai žmonės tiesiog brėžia priešinga kryptimi, dėl to popieriuje atsiranda antra spiralė, susukta į tą pačią pusę.

Analogiškas regimasis efektas gaunamas ir kitu būdu. Paimkite minkštą pieštuką ir kartoniniame diske nupieškite spiralę su glaudžiomis vijomis. Sukantis diskui ant patefono plokštės, pamatysite, kad spiralė arba susitraukia, arba, atvirkščiai, plečiasi priklausomai nuo jos krypties. Dar nuostabesnį psichologinį bandymą galima demonstruoti dviem diskais, kuriuose nupieštos spiralės, susuktos priešingomis kryptimis.

Žiūrėdami į patefoną iš viršaus ir uždėję ant jo diską su „išsiplečiančia“ spirale, keletą minučių įdėmiai žiūrėkite statmenai žemyn į patį spiralės polių. Paskui greitai žvilgtelėkite į kieno nors veidą. Pirmuoju momentu jums pasirodys, kad jis nelauktai sumažėjo. Atlikdami tą patį bandymą su spirale, susukta priešinga kryptimi, gausite priešingą efektą: veidas, į kurį jūs žiūrite, staiga pradės plėstis. Kas važiavo traukiniu, tikriausiai patyrė panašią regos apgaulę. Ilgai žiūrint pro važiuojančio traukinio langą, traukinio sustojimo momentu susidaro įspūdis, jog visas peizažas pajudėjo priešinga kryptimi. Iš pradžių efektas buvo aiškinamas akių raumenų nuovargiu, tačiau po bandymų su spiralėmis atsirado kitas aiškinimas, pagal kurį ši regos apgaulė esanti informacijos, patenkančios į galvos smegenų ląsteles iš regos nervų, analizės rezultatas.

Spiralės asimetrija labai patogu demonstruoti, kad bendrauti su nežemiškomis civilizacijomis labai sunku. Įsivaizduokime, jog mokslininkai su kažkuria mūsų Galaktikos planeta X nustatė radijo ryšį. Dešimtmečiais analizuodami sudėtingus impulsinius signalus, galų gale išmokome susikalbėti su protingomis, į žmogų panašiomis būtybėmis, gyvenančiomis planetoje X. Tarkime, jog planetoje X yra tokia pat aukštai išvystyta kultūra, kaip ir mūsų Žemėje, bet dėl storo ir tiršto debesų sluoksnio (kaip Veneros atmosferoje), supančio planetą, jos gyventojai net neįtaria, kad egzistuoja astronomija, ir niekada gyvenime nėra matę nė vienos žvaigždės. Pasiuntę į planetą X smulkų kai kurių labiausiai žinomų galaktikų aprašymą, Žemės gyventojai gautų tokį atsakymą:

> „Jūs pranešate, kad iš Žemės stebimas spiralinis ūkas NGC 5194 turi dvi atšakas, susisukusias iš išorės laikrodžio rodyklės kryptimi. Prašome paaiškinti, žodžių „laikrodžio rodyklės kryptimi“ prasmę“.

Kitaip sakant, planetos X mokslininkai nori būti tikri, jog, remdamiesi ūko NGC 5194 požymiais, kuriuos perdavė kolegos iš Žemės, jie sugebės nupiešti kaip tik tą ūką, o ne jo veidrodinį atspindį.

Bet kaip pranešti planetai X, į kokią pusę susisukęs ūkas? Beprasmiška kalbėti, jog, toldami nuo ūko centro, judėtume jo atšaka iš kairės dešinėn, nes nesame tikri, **kad planetoje X sąvokos „kairė“ ir „dešinė“** turi tą pačią prasmę, kaip ir pas mus. Jeigu mokėtume perduoti į planetą X kokią nors vienareikšmę „kairės“ prasmę, problema būtų labai greitai išspręsta.

Suformuluosime uždavinį tiksliau: kaip impulsiniais signalais perduoti sąvokos „kairė“ esmę? Mes, perduodanti pusė, turime teisę ištarti bet kokius žodžius, reikalauti bet kokių eksperimentinių įrengimų, bet mus varžo viena aplinkybė: nėra nė vieno asimetriško objekto, kurį mes ir mūsų korespondentai galėtume drauge stebėti.

Be šios sąlygos nebūtų ir uždavinio. Pasiuntę, pavyzdžiui, į planetą X raketą su žmogaus portretu, kur būtų nurodyta „viršus“, „apačia“, „dešinė“, „kairė“, drauge praneštume, kokią prasmę Žemėje turi sąvoka „kairė“. Vietoje paveikslo būtų galima panaudoti cikliškai poliarizuotą išspinduliavimą, kuris šiuo atveju būtų spiralės analogas. Jeigu planetos X gyventojai turėtų antenas poliarizacijos krypčiai nustatyti, mes pakankamai greitai suprastume vieni kitus sąvokos „kairė“ prasme. Tačiau visi šie metodai pažeidžia anksčiau minėtą sąlygą: bendri asimetriškų objektų stebėjimai neįmanomi.

ATSAKYMAI

Nesunku suprasti, kodėl, remiantis Archimedo spirale, galima išspręsti kampo trisekcijos uždavinį. Apskritimų lankai, kuriais padarytos atžymos spiralėje, nubrėžti trimis spinduliais. Tie spinduliai dalija atkarpą *AC* (87 pav.) į tris lygias dalis. Tuo metu, kol spiralė, išsivyniodama prieš laikrodžio rodyklę, pereina tuos tris lygius atstumus, ji suspėja pereiti tris lygius kampinius atstumus — tris lygius su centru taške *P* kampus, kurie suveržti spiralės lankais *BE, ED* ir *DC*. Tas pats metodas, aišku, tinka ir dalijant kampą į bet kokį skaičių bet kokio dydžio dalių.

Ieškomosioms kampo dalims gauti pakanka atkarpą *AC* padalyti į mažesnes, kurių ilgiai būtų proporcingi ieškomų kampo dalių dydžiams. Atitinkamai spinduliais padarę atžymas logaritminėje spiralėje, gausime ieškomas kampo *CPB* padalas.

Antrasis uždavinys toks: kaip impulsų serija išaiškinti žemiškų sąvokų „kairė" ir „dešinė" prasmę protingoms planetos X būtybėms?

Nuostabiausia uždavinio atsakyme yra tai, kad iki 1956 metų gruodžio mėnesio šis uždavinys neturėjo sprendinio: vienareikšmis būdas sąvokoms „kairė" ir „dešinė" apibrėžti dar neegzistavo. Pagal lyginumo pastovumo dėsnius visi asimetriški fizikiniai procesai yra grįžtamieji — gali vystytis bet kuria viena iš dviejų veidrodiškai simetriškų formų. Kai kurie kristalai (pavyzdžiui, kvarcas ir cinoberis) šviesos poliarizacijos plokštumą sugeba pasukti tik viena kryptimi, bet dažniausiai tokie kristalai yra ir į dešinę, ir į kairę nukreipiančios formos. Tai tinka ir asimetriškiems stereoizomerams, taip pat pasukantiems šviesos poliarizacijos plokštumą. Optiškai aktyvios medžiagos gyvuose organizmuose gali pasitaikyti tik vienos (dešinėn ar kairėn nukreipiančios) formos, bet ši aplinkybė yra tik žemiškos evoliucijos savybė. Tikėtis, kad ir kitoje planetoje tos pačios medžiagos pasitaiko tokios pačios optiškai aktyvios formos, kaip ir Žemėje, mažiau pagrįsta, kaip ir tikėtis, jog planetos X protingų būtybių širdis taip pat yra kairėje pusėje.

Bandymai su elektros srove ir magnetais mums nieko neduoda. Tiesa, elektromagnetiniai reiškiniai yra asimetriški (pakanka prisiminti „dešinės" rankos taisyklę srovės sukelto magnetinio lauko krypčiai nustatyti), tačiau kurį magneto polių vadinti „šiauriniu", nustatyta tik susitarimu. Jeigu planetos X gyventojams galėtume išaiškinti, kokią prasmę mūsuose turi sąvoka magneto „šiaurės polius", uždavinys būtų išspręstas. Deja, bet pirmiausia reikėtų išaiškinti, ką reiškia „dešinė" ir „kairė". Specialiu kodu galėtume į planetą perduoti vaizdą (nuosekliais impulsais), bet nebūtume tikri, jog jų imtuvai neiškraipys jo, pakeisdami veidrodiškai simetriškais antrininkais.

Pirmasis eksperimentas, atskleidęs lyginumo pažeidimus, buvo atliktas 1956 m. gruodžio mėnesį. Pasirodė, jog kai kurios elementariųjų dalelių „silpnos sąveikos" teikia

pirmenybę vienam „prijaukinimo“ * tipui nepriklausomai nuo to, kokį magneto polių laikysime šiaurės poliumi. Tokio eksperimento išsamaus aprašymo perdavimas būtų vienintelis žinomas būdas, kuriuo planetos X gyventojams galėtume vienareikšmiškai pranešti, ką tenka laikyti dešine ir ką — kaire, ką nukreiptu laikrodžio rodyklės kryptimi, ką — prieš ir t. t.

Būtina pastebėti, kad jeigu planeta X priklausytų kitai galaktikai, uždavinys liktų neišspręstas. Taip atsitiktų dėl to, kad kita galaktika galėtų būti sudaryta iš antimaterijos (iš materijos, kurios dalelės turėtų elektrinį krūvį, priešingą žemės dalelių krūviui). Tokioje galaktikoje „silpnų sąveikų“ „prijaukinimas“ tikriausiai būtų kitoks, negu Žemėje. Jeigu materijos tipas kitoje galaktikoje nežinomas (o šviesa, sklindanti nuo jos į mus, nieko nesako apie materijos tipą), lyginumo pažeidimo eksperimentai praranda savo, kaip priemonės sąvokoms „dešinė“ ir „kairė“ perduoti, vertę.

XVI skyrius

SOLITERIS

„Man didžiulį malonumą teikia žaidimas, vadinamas soliteriu,— 1716 metais rašė vokiečių matematikas Gotfridas Leibnicas viename iš laiškų. — Tik aš jį žaidžiu ne taip, kaip visi: pagal žaidimo taisykles, peršokus per langelį, reikia nuimti jame stovintį kauliuką, o aš labiau mėgstu atstatinėti tai, kas sugriauta, — užpildyti kauliukais visus tuščius langelius, kuriuos peršoka mano kauliukas. Be to, kyla naujas uždavinys: kaip iš kauliukų sukurti užsibrėžtą figūrą, jeigu žinoma, kad, laikantis įprastų taisyklių, ją galima sugriauti. „Bet kam visa tai?“ — paklausite. Atsakysiu: „Tam, kad tobulintume sugebėjimus išrasti nauja, nes mums būtina mokėti kurti

* Šio termino prasmė buvo išaiškinta M. Gardnerio knygoje «Математические головоломки и развлечения».

		37	47	57		
		36	46	56		
15	25	35	45	55	65	75
14	24	34	44	54	64	74
13	23	33	43	53	63	73
		32	42	52		
			41	51		

90 pav. Lenta soliteriui žaisti

visa, ką tik galima sugalvoti, vadovaujantis sveika nuovoka".

Dvi paskutiniosios Leibnico laiško frazės turi šiek tiek miglotą prasmę. Galbūt jos reiškia, kad bet kokią loginę ar matematinę struktūrą verta nagrinėti atidžiau.

Joks kitas žaidimas su kauliukais ant specialios lentos ilgai nebuvo taip plačiai žinomas, kaip soliteris. Šio žaidimo kilmė nežinoma. Jo išradimas kartais priskiriamas kažkokiam kaliniui, kalėjusiam Bastilijoje. Sprendžiant iš prancūzų knygų ir straipsnių, skirtų soliterio teorijai ir istorijai, šis žaidimas buvo plačiai paplitęs Prancūzijoje praėjusio amžiaus pabaigoje.

Soliteriui žaisti reikia lentos su duobutėmis, į kurias dedami rutuliukai, arba su kiaurymėmis, į kurias įsmeigiami paprasti kaišteliai. Soliterį sėkmingai galima žaisti ir su kauliukais arba monetomis, nusibraižius lentą popieriaus lape (90 pav.). Kaip tik ant tokios lentos su trisdešimt trimis langeliais dažniausiai žaidžiamas soliteris

Anglijoje, Jungtinėse Amerikos Valstijose ir Tarybų Sąjungoje*. Prancūzai šią lentą papildo dar keturiais langeliais. Vakarų Europos šalyse galima aptikti abi lentų rūšis, tačiau prancūzų variantas žymiai mažiau paplitęs. Tai paaiškinama, matyt, tuo, kad prancūzų lentoje neįmanoma žaidimo pabaigoje palikti vieną kauliuką, jeigu partijos pradžioje buvo užimti visi, išskyrus centrinį, langeliai. Langelius įprasta numeruoti dviženkliais skaičiais: pirmasis skaitmuo reiškia stulpelio numerį, skaičiuojant paeiliui iš kairės į dešinę, antrasis — eilutės numerį, skaičiuojamą iš apačios viršun.

Svarbi ir paprastai vienintelė žaidimo skirtybė yra ta, kad visuose lentos langeliuose, išskyrus centrinį, sustatomi kauliukai. Žaidimo tikslas pasiekti, kad po daugelio „šuolių" lentoje liktų tik vienas kauliukas. Baigtis atrodo ypač puiki, jeigu paskutinysis kauliukas lieka centriniame langelyje. „Šuolis" reiškia štai ką: kauliukas perkeliamas į laisvą langelį per bet kurį gretimą kauliuką, tuo metu nuimamą nuo lentos. Šie šuoliai labai primena šaškių šuolius. Vienintelis skirtumas tas, kad, žaidžiant soliterį, kauliukus galima perstatinėti kairėn, dešinėn, viršun ir žemyn, bet draudžiama eiti įstrižai.

Kiekvienas ėjimas būtinai turi būti šuolis per kauliuką. Jeigu eilinis šuolis negalimas, žaidimas baigiamas, anot šachmatininkų, matu. Kiekvienas kauliukas vienu ėjimu gali paeiliui atlikti tiek šuolių, kiek leidžia susidariusi ant lentos pozicija, bet padaryti visus šuolius nebūtina. Bet kuri vienas paskui kitą einančių šuolių virtinė laikoma vienu ėjimu. Aišku, kad galvosūkiui išspręsti reikia trisdešimt vieno šuolio, bet ėjimų gali būti ir mažiau, nes keletas šuolių gali sudaryti vieną virtinę — vieną ėjimą.

Niekas nežino, kiek yra skirtingų būdų, kuriuos taikant, galima pereiti nuo pradinės pozicijos prie vienintelio kauliuko, likusio centriniame langelyje. Išspausdinta daugybė sprendimų, bet jų sąrašas toli gražu nepilnas. Prieš pradedant juos aptarti, siūlau skaitytojams, neįgudusiems žaisti, išmėginti jėgas, sprendžiant šešis palyginti paprastus uždavinius. Pradinis kauliukų išdėstymas parodytas 91 paveiksle. Kiekvienu atveju paskutinįjį kauliuką reikia palikti centre. Lotyniškas kryžius,

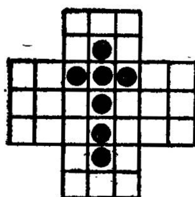
---

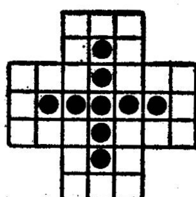
* Žr., pavyzdžiui, straipsnį „Soliteris" žurnale „Наука и жизнь", 1966, Nr. 7, p. 35.

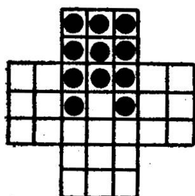
pavyzdžiui, išsprendžiamas penkiais ėjimais: 45—25, 43—45, 55—35, 25—45, 46—44.

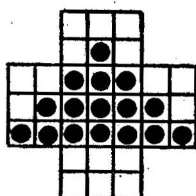
Įsisavinę šiuos tradicinius uždavinius, jūs galbūt panorėsite išspręsti tris galvosūkius, pavaizduotus 92 paveiksle. Žaidimo pradžioje visus langelius, išskyrus centrinį, yra užėmę kauliukai. Žaidimo pabaigoje kauliukai ant lentos turi išsirikiuoti taip, kad sudarytų figūrą, pavaizduotą 92 paveiksle. Pirmasis galvosūkis nesudėtingas; to negalima pasakyti apie kitus du.

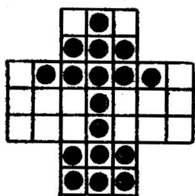
Soliterio mėgėjai ir žinovai sugalvojo įvairiausių neįprastų uždavinių. Pavyzdžiui, Ernestas Bergholtas, knygos „Soliterio žaidimas" („The Game of Solitaire"), išėjusios 1920 metais, autorius savo puikiuose uždaviniuose pateikia daugybę netikėčiausių apribojimų. (Visų užda-

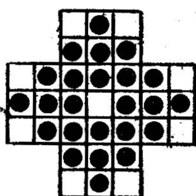




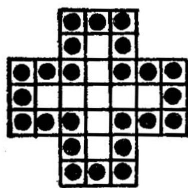


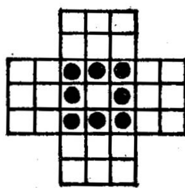


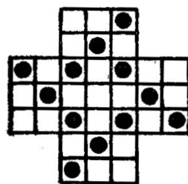




91 pav. Tradiciniai uždaviniai, kuriuose paskutinis kauliukas turi likti lentos centre







92 pav. Figūros, kurios turi likti ant lentos žaidimo pabaigoje

vinių žaidimo pradžioje lentoje laisvas tik vienas, nebūtinai centrinis, langelis.) Viename Bergholto uždavinių figūruoja vadinamasis „sargybinis". Tai kauliukas (geriau kitos spalvos), kuris per visą žaidimą turi stovėti vietoje, o pabaigoje, „prarijęs" vieną ar kelis kauliukus, lieka ant lentos visiškai vienas. „Negyvas krovinys" — tai kauliukas, nuimamas nuo lentos paskutinis. Anksčiau jo liesti negalima. „Kaskada", pagal Bergholto terminologiją, — ilga šuolių virtinė, kuria baigiasi žaidimas. Bergholtas pateikia daug žaidimų, kurie baigiasi aštuonių šuolių kaskadomis, pavyzdžių. Jis tvirtina, kad galima pradėti nuo tuščio langelio, esančio kur nors kampe (pavyzdžiui, nuo 37 langelio), ir baigti žaidimą devynių šuolių kaskada.

Kiek mažiausia ėjimų reikia atlikti, kad iš trisdešimt dviejų kauliukų, sustatytų ant lentos žaidimo pradžioje, liktų tik vienas? Gana ilgai buvo manoma, kad tam reikia bent šešiolikos ėjimų, bet 1963 metais Haris O. Devis išnagrinėjo atvejį, kai pradinėje pozicijoje paliekamas tuščias 55-asis arba 52-asis langelis, arba vienas langelių, į kuriuos jie pereina, pasukant lentą ir atspindint ją veidrodyje. Pasirodė, kad, taip pradedant, pakanka penkiolikos ėjimų. Sakykim, žaidimo pradžioje tuščias 55

langelis, o pabaigoje kaip tik jame lieka paskutinis kauliukas. Tuomet Devio sprendimas yra toks: 57—55, 54—56, 52—54, 73—53, 43—63, 37—57—55—53, 35—55, 15—35, 23—43—45—25, 13—15—35, 31—33, 36—56—54—52—32, 75—73—53, 65—63—43—23—25—45, 51—31—33—35—55. Kai pradinėje pozicijoje tuščias 52 langelis, uždaviniui išspręsti reikia penkiolikos ėjimų, be to, paskutinysis kauliukas lieka 55 langelyje.

Devis sugebėjo rasti šešiolikos ėjimų sprendimus tiems atvejams, kai pradinėje pozicijoje tuščias lieka arba 54, arba 57, arba bet kuris kitas langelis, simetriškas jiems. O visiems kitiems atvejams, kai pradinėje pozicijoje laisvas arba centrinis, arba 46, arba 47, arba pagaliau bet kuris langelis, simetriškas išvardytiems, Devis sugebėjo rasti septyniolikos ėjimų sprendimus.

Skirtingų porų, kurias galima sudaryti iš pradinio bei galinio langelio numerių (pradiniu laikomas vienintelis tuščias langelis pradinėje pozicijoje, galiniu — vienintelis langelis, kurį kauliukas užima galinėje pozicijoje), skaičius lygus 21 (suprantama, neskaitant kombinacijų, pereinančių iš vienos į kitą pasukant ir atspindint). Lentelėje, pateiktoje p. 179, išvardijamos visos šios poros ir pateikiamas ėjimų skaičius, kuris, Devio nuomone, yra minimalus kiekvienai porai. Iš lentelės matyti, kad jeigu pradinėje pozicijoje tuščias yra 44 (centrinis) langelis, o žaidimo pabaigoje tame pačiame langelyje lieka paskutinysis kauliukas, tai žaidimo sprendimą sudaro aštuoniolika ėjimų. Henris Ernestas Djudenis knygoje „Matematiniai žaidimai“ (uždavinys Nr. 227) pateikė devyniolikos ėjimų sprendimą ir parašė: „Man atrodo, kad ėjimų skaičiaus sumažinti jau negalima.“ Tačiau Bergholto knygoje pateikiamas toks 18 ėjimų sprendimas: 46—44, 65—45, 57—55, 54—56, 52—54, 73—53, 43—63, 75—73—53, 35—55, 15—35, 23—43—63—65—45—25, 37—57—55—53, 31—33, 34—32, 51—31—33, 13—15—35, 36—34—32—52—54—34, 24—44.

„Drįstu tvirtinti, — rašė Bergholtas, — kad mano rekordo niekas neviršys.“ (Neseniai Dž. D. Bislis įrodė, kad minimalus ėjimų skaičius iš tikrųjų lygus aštuoniolikai.) Jeigu pateiktame sprendime nenutrauksite priešpaskutinio ėjimo ir užbaigsite jį 14 langelyje, pamatysite, kad bus septyniolikos ėjimų sprendimas, kuriame kauliukas, už-

Pradinis langelis	Galinis langelis	Ėjimų skaičius
13	13	16
13	43	16
13	46	17
13	73	16
14	14	18
14	41	17
14	44	18
14	74	18
23	23	16
23	53	15
23	56	16
24	24	19
24	51	17
24	54	17
33	33	15
33	63	16
34	31	16
34	34	16
34	64	17
44	14	17
44	44	18

ėmęs pradinėje pozicijoje 36 narvelį, vaidina „sargybinį", baigiantį žaidimą šešių šuolių kaskada.

Uždavinys, kuriame ir pradinis, ir galinis yra centrinis langelis, laikomas klasikiniu. Žinoma daugybė jo sprendimų, kurių ėjimų skaičius nebūtinai minimalus. Neretai tie sprendimai nuostabiai simetriški. Išnagrinėsim kai kuriuos pavyzdžius.

„Židinys" (Dž. Dau sprendimas): 42—44, 23—43, 35—33, 43—23, 63—43, 55—53, 43—63, 51—53, 14—34—54—52, 31—51—53, 74—54—52, 13—33, 73—53, 32—34, 52—54, 15—35, 75—55. Padarę visus išvardytus ėjimus, pamatysite, kad uždavinys atitinka poziciją „Židinys", pavaizduotą 91 paveiksle.

„Šešių šuolių virtinė": 46—44, 65—45, 57—55, 37—57, 54—56, 57—55, 52—54, 73—53, 75—73, 43—63, 73—53, 23—43, 31—33, 51—31, 34—32, 31—33, 36—34, 15—35, 13—15, 45—25, 15—35. Po šio ėjimo pozicija ant lentos pasidaro simetriška vertikaliosios ašies atžvilgiu. Pozicija, gauta šešių šiuolių kaskada (43—63—65—45—25—

23—43), atitinka T formos poziciją, kuri turi tokį paprastą sprendimą: 44—64, 42—44, 34—54, 64—44.

„Painiava“: 46—44, 65—45, 57—55, 45—65, 25—45, 44—46, 47—45, 37—35, 45—25. Susidariusi pozicija simetriška vertikaliosios ašies atžvilgiu. Šešiolika kitų ėjimų suskirstomi į 8 veidrodiškai simetriškas poras; tuos ėjimus galima atlikti vienu metu abiem rankomis pagal tokią schemą:

Kairioji ranka	Dešinioji ranka
15—35	75—55
34—36	54—56
14—34	74—54
33—35	53—55
36—34	50—54
31—33	51—53
34—32	54—52
13—33	73—53

Belieka padaryti dar keturis ėjimus (43—63, 33—31—51—53, 63—43, 42—44), ir uždavinys išspręstas.

Soliterio žaidimo matematinė teorija išnagrinėta dar labai silpnai. Atskirai imant, iki šiol lieka neišspręstas vienas pagrindinių įdomiosios matematikos uždavinių: išmokti nustatyti, ar galima kokią nors poziciją, susidariusią žaidžiant, laikyti iš anksto užsibrėžtu paprastesniu figūrų išdėstymu. Žymių laimėjimų šioje srityje yra pasiekęs matematikos dėstytojas M. Čerošas. Jam pavyko įrodyti daug teoremų, kuriomis remiantis, galima iš karto teigti, kad kai kurie uždaviniai, kilę, žaidžiant soliterį, apskritai neturi sprendinio. Čerošas savo darbe suprastino ir šiek tiek išplėtė ankstesnius tos pačios problemos tyrinėjimus, kuriuos atliko M. H. Hermanis, atspausdintus pirmajame Eduardo Liuko „Matematinių pramogų“ („Recreations Mathematiques“) tome.

Čerošo metodas toks. Kai ką pradinėje pozicijoje pakeitę, išsiaiškiname, ar galima ją pertvarkyti į mus dominančią galinę poziciją. Bet kurios dvi pozicijos, kurias leidžiamais veiksmais galima perkelti vieną į kitą, vadinamos ekvivalenčiomis. Kai dvi pozicijos neekvivalenčios, perkelti jų vienos į kitą, perstatinėjant kauliukus pagal įprastines soliterio taisykles, negalima (o jeigu mes, sekdami Leibnicu, žaisime „soliterį atvirkščiai“, dviejų pozicijų neekvi-

valentumas reikš, kad pradinės pozicijos negalima atstatyti pagal galinę). Tais atvejais, kai pradinė ir galinė pozicijos sudaro ekvivalenčią porą, uždavinys (sprendžiamas pagal įprastines soliterio taisykles) gali būti ir išsprendžiamas, ir neišsprendžiamas. Kitaip tariant, Čerošo metodas pateikia bet kokiam uždaviniui ir bet kokio tipo lentai būtiną, bet nepakankamą išsprendžiamumo sąlygą.

Čerošo siūlomi pertvarkymai keičia poziciją tik trijuose gretimuose (vertikaliuose arba horizontaliuose) langeliuose: jeigu tuose langeliuose stovi kauliukai, leidžiamais pertvarkymais jie „nuimami" ir, priešingai, ten, kur buvo tušti langeliai, po leidžiamo pertvarkymo gali atsirasti kauliukas. Pavyzdžiui, jeigu kauliukai stovėjo visuose trijuose langeliuose, juos (visus tris iš karto) galima nuimti. Priešingai, jeigu visi trys langeliai buvo tušti, juose galima statyti kauliukus. Kai trijuose langeliuose stovi tik du kauliukai, juos galima nuimti, o tuščiame langelyje pastatyti vieną kauliuką. O kai trijuose langeliuose stovi tik vienas kauliukas, jį galima nuimti, o kiekviename anksčiau buvusiame tuščiame langelyje pastatyti po kauliuką.

Čerošo metodą pritaikysime klasikiniam uždaviniui, kai žaidimo pradžioje yra laisvas tik vienas centrinis langelis. Iš karto matyti, kad iš kiekvienos lentos eilės galima nuiminėti po tris kauliukus tol, kol liks tušti tik kurie nors du langeliai, pavyzdžiui, 45 ir 43. Kadangi jie kartu su centriniu langeliu sudaro galimą langelių trejetą (trys gretimi langeliai vertikaliai), galime nuimti stovinčius juose kauliukus, o vieną kauliuką pastatyti centre. Taigi parodėme, kad pradinė pozicija, turinti pilną kauliukų rinkinį ir tuščią langelį lentos centre, yra ekvivalenti pozicijai su vieninteliu kauliuku, stovinčiu centriniame langelyje. Iš čia išplaukia, kad uždavinys, kuriame susidaro tokia pradinė pozicija, išsprendžiamas. (Mums, suprantama, ir be įrodymo buvo aišku, kad sprendimas galimas.)

Analogiškai galima parodyti, kad pagal Čerošo metodą poziciją su vieninteliu tuščiu langeliu, esančiu kažkur ne lentos centre, galima pertvarkyti į poziciją, kurioje visa lenta, išskyrus vieną langelį, tuščia, o vienintelis kauliukas stovi tame pačiame langelyje, kuris buvo tuščias pradinėje pozicijoje. Ir šiuo atveju išvadą, kurią padarome, remdamiesi Čerošo metodu, patvirtina „praktika" — soliterio žaidimas.

Ar galima pradėti žaidimą, turint tuščią langelį lentos centre, o užbaigti jį pozicija, kurioje vienintelis kauliukas stovi 45 langelyje? Ne, negalima, nes šios pozicijos neekvivalenčios Čerošo teorijos prasme. Norint įrodyti šį teiginį, nebūtina pradėti nuo pradinės pozicijos. Pakanka paimti tuščią lentą su vieninteliu kauliuku, esančiu 44 langelyje (jau žinome, kad tokia pozicija „galima"), ir išsiaiškinti, kaip šią poziciją pertvarkyti į kitas to paties tipo pozicijas (tuščia lenta su vienu kauliuku). Darome taip. Paimame kauliuką iš 44 langelio ir pastatome kauliuką 54 ir 64 langelyje (taip pradinę poziciją pertvarkyti galima, nes 44, 54 ir 64 langelis eina iš eilės horizontaliai). Dabar nuimsime kauliukus iš 54 ir 64 langelio ir pastatysime kauliuką 74 langelyje. Du kartus pertvarkę, įrodėme, kad pozicija su vieninteliu kauliuku, stovinčiu 44 langelyje, ekvivalenti pozicijai su vieninteliu kauliuku, stovinčiu 74 langelyje. Apibendrinant gautąjį rezultatą, galima suformuluoti taisyklę: pozicija su vienu kauliuku ekvivalenti bet kokiai kitai pozicijai su vienu kauliuku, į kurią galima pereiti, peršokus per du langelius vertikaliai arba horizontaliai. Nesunku pastebėti, kad pozicija su vienu kauliuku, stovinčiu 44 langelyje, ekvivalenti pozicijoms, kuriose yra iš viso tik vienas kauliukas 14, 47, 74, 41 langeliuose. Vadinasi, tik šiomis pozicijomis ir gali baigtis žaidimas, kurio pradinėje pozicijoje buvo tik vienas tuščias langelis lentos centre. Soliterio žaidimo praktika patvirtina, kad tokia išvada teisinga. Jeigu paskutiniu šuoliu galime užimti centrinį langelį, tai, pašokę iš centrinio langelio priešinga kryptimi, atsidursime jam ekvivalenčiame langelyje. Vadinasi, ir realiai žaidžiant, centriniam langeliui ekvivalentūs tik 14, 47, 74, 41 langelis, ir nė vienas daugiau.

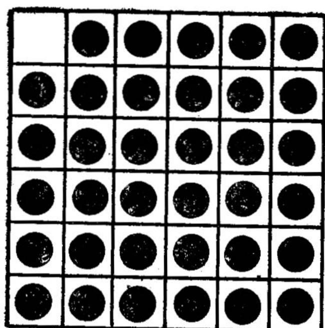
Čerošo metodu galima bet kokią poziciją pertvarkyti į vieną iš tokių trijų: a) pozicija su vieninteliu kauliuku; b) pozicija, kurioje du kauliukai stovi įstrižai gretimuose langeliuose (visi kiti lentos langeliai tušti); c) „nulinė" pozicija — tuščia lenta.

Praktiškai žaidžiant, paskutinė pozicija, aišku, nepasitaiko. Žaidimas baigiamas pozicija, ekvivalenčia, pavyzdžiui, „nulinei", arba trimis kauliukais, esančiais trijuose horizontaliai arba vertikaliai gretimuose langeliuose, arba dviem kauliukais, esančiais vienoje vertikalioje arba horizontalioje eilėje per du langelius vienas nuo kito.

Nesunku parodyti, kad bet kuri pozicija ekvivalenti (gali būti pertvarkyta į ją, remiantis leidžiamais Čerošo pertvarkymais) „priešingai" pozicijai, susidarančiai iš jos, pakeičiant visus langelius, užimtus kauliukų, laisvais langeliais ir, priešingai, visus laisvus langelius — langeliais, užimtais kauliukų. Pavyzdžiui, kai kauliukų nėra tik dviejuose gretimuose įstrižuose langeliuose (pavyzdžiui, 37 ir 46 langelyje), pozicija ekvivalenti priešingai: tuščiai lentai, ant kurios du kauliukai yra 37 ir 46 langelyje. Kadangi leidžiamais pertvarkymais šių pozicijų pertvarkyti į poziciją su vieninteliu kauliuku negalima, darome išvadą, kad žaidimą pradėti pozicija, kurioje laisvi tik du langeliai, 37 ir 46, ir baigti pozicija, kurioje ant lentos lieka tik vienas kauliukas, neįmanoma.

Tiems, kurie panorės sugalvoti naujų uždavinių, Čerošo metodas padės sutaupyti daug laiko, kurį jie išeikvotų, ieškodami sprendinių, kurių nėra. Suprantama, įrodę, kad sprendinys gali egzistuoti, problemą jį surasti paliekame neišspręstą. Kartais sprendinys yra, ir tuomet jį galima rasti; kartais „potencialaus" sprendinio iš tikrųjų nėra. Ieškant sprendinio, labai patogu taikyti Leibnico metodą (soliterio žaidimas „atbulai", arba pradinės pozicijos atstatymas iš galinės): sunumeravę visus kauliukus ir juos sustatę ant lentos iš eilės, galėsite net neužsirašinėti ėjimų. Paskui, kai jums pavyks atstatyti ant lentos reikiamą poziciją, ėjimų seką bus nesunku atkurti pagal kauliukų numerius.

1960 metais inžinierius Noblas D. Karlsonas iškėlė įdomų klausimą: kokie mažiausi matmenys kvadratinės lentos, nuo kurios galima, laikantis soliterio žaidimo taisyklių, nuimti visus kauliukus, išskyrus vieną, kai pradinėje pozicijoje tuščias langelis buvo kvadrato kampe? Remiantis Čerošo metodu, nesunku parodyti, kad iškeltos sąlygos nepatenkina kvadratai, kuriuose išilgai kraštinės yra nedalus iš trijų langelių skaičius. Tačiau galima įrodyti, kad ant kvadratinės lentos 3×3 uždavinys neišsprendžiamas. Todėl Karlsono uždaviniui išspręsti labiausiai tiks kvadratas 6×6 (93 pav.). Jeigu sprendimas egzistuoja, paskutinysis kauliukas turi likti arba kairiajame viršutiniame langelyje, kuris žaidimo pradžioje buvo tuščias, arba viename iš trijų jam ekvivalenčių langelių (kairįjį viršutinį langelį pažymėjus skaitmeniu 1 ir tęsiant numeraciją iš kairės į dešinę, pirmajam bus ekvivalentūs



93 pav. Karlsono uždavinys lentai 6×6

4, 19 ir 22 langeliai. Ar turi Karlsono uždavinys sprendinį? Taip, turi. Pats Karlsonas sugalvojo dvidešimt devynių ėjimų sprendimą, be to, paskutinysis kauliukas lieka 22 langelyje. Ar yra kitas sprendinys, kurio pradinėje pozicijoje tuščias 1 langelis, o galinėje vienintelis likęs kauliukas stovi 1 langelyje?

Daugelis skaitytojų man pranešė apie ankstesnius darbus iš soliterio žaidimo teorijos; juose buvo požymių, kad uždaviniai, daugiau ar mažiau sutampantys su aukščiau pateiktais, išsprendžiami. Pastaruoju metu daug įdomių rezultatų gavo grupė Kembridžo universiteto matematikų.

Heris D. Gordonas man papasakojo apie puikų atradimą, kurį jis padarė prieš penkiolika metų. Soliterio žaidimo teorijos bet kurio uždavinio sprendimas ant bet kokio tipo lentos yra apverčiamasis, kai pradinėje pozicijoje yra tik vienas tuščias langelis, o galinėje ant lentos lieka tik vienas kauliukas, stovintis tame pačiame langelyje. Sprendimo apverčiamumas reiškia, kad ėjimus galima daryti priešinga tvarka. Kartu gaunamas naujas to paties uždavinio sprendimas. Gordono metodo nereikia painioti su Leibnico metodu (žaidimas „atbulai"), kuriuo remiantis, iš pradžių tuščia lenta laipsniškai užpildoma kauliukais. Gordono metode pradinė pozicija lieka ta pati kaip anksčiau, o ėjimų tvarka keičiasi priešinga. Išnagrinėsime, pavyzdžiui, šešiolikos ėjimų uždavinio kvadratinei lentai 6×6 sprendimą, kurį pasiūlė vienas mūsų skaitytojas. „Apgręžtas" sprendimas pradedamas šuoliu 13—1, paskui priešinga tvarka daromi visi aštuoni baigiamieji šuoliai: 25—13, 27—25 ir t. t. Taip gaunamas sprendimas, sudarytas iš trisdešimt vieno ėjimo. Devis pastebėjo, kad, pradinėje pozicijoje esant ant lentos tik vienam laisvam langeliui, apverčiamasis sprendimas galimas net tuose uždaviniuose, kuriuose paskutinįjį kauliuką reikia palikti ne ant to langelio, kuris iš pradžių buvo laisvas. Radę spren-

dimą su pradiniu langeliu a ir galiniu langeliu b ir apgręžę ėjimus, automatiškai gausite sprendimą, kurio pradžia bus langelis b, o galas — langelis a. Uždaviniai, iš esmės sutampantys su soliterio žaidimo uždaviniais (matematikas pasakytų „izomorfiniai"), neretai pasitaiko šaškėse ant įprastinės šachmatų lentos. Viename seniausių ir labiausiai žinomų tokios rūšies uždavinių 24 šaškės sustatomos 24 juoduose langeliuose dvigubu (2 langelių storio) sluoksniu, gretimu šachmatų lentos kraštams. Ar galima viena šaške „praryti" visas kitas? Skirtingus šio uždavinio sprendimus galima rasti Hario Langmeno knygoje *. Uždavinys žinomas labai seniai ir literatūroje minimas dar praėjusio amžiaus pabaigoje. Nesunku suformuluoti izomorfinį uždavinį soliterio žaidimui. Remdamasis mums jau žinomais sprendimo kriterijais, B. Stiuartas 1941 metais parodė, kad uždavinys sprendinio neturi. Tačiau, nuėmus bet kurią iš dviejų kampinių šaškių, sprendinių atsiras daug.

Standartinę soliterio žaidimo pradinę poziciją (tuščias langelis lentos centre) galima pertvarkyti į neišsprendžiamą poziciją, padarius iš viso tik keturis ėjimus: šuolį į centrą, šuolį per centrą, vėl šuolį į centrą ir dar kartą šuolį per centrą. Pirmąjį ir paskutinįjį ėjimą reikia daryti viena kryptimi. Keturiais ėjimais galima sudaryti tik vieną neišpsrendžiamą poziciją (mažesniu ėjimų skaičiumi sudaryti neišsprendžiamą poziciją iš viso negalima). Penkiais ėjimais galima sudaryti dvi neišsprendžiamas pozicijas.

Savo knygoje, skirtoje soliterio žaidimui, Bergholtas teigė, kad, pradėjus žaisti ant standartinės lentos su tuščiu kampiniu langeliu, partiją galima baigti devyniais šuoliais. Knygoje Bergholtas sprendimo nepateikė. Kiek yra žinoma, pirmasis išspręsti šį sudėtingą uždavinį sugebėjo Haris O. Devis. Jo puikus aštuoniolikos ėjimų sprendimas buvo atspausdintas 1967 metais**. Tame pačiame straipsnyje Devis parodė, kad standartinio uždavinio sprendime nepriklausomai nuo to, koks langelis buvo tuščias pradinėje pozicijoje, negali būti virtinė, sudaryta daugiau kaip iš devynių šuolių.

---

* Harry Langman. Play Mathematics, N. Y., Haffner, 1962, p. 203—206; *Scripta Mathematica,* September 1954, p. 206—208.

** *Mathematical Gazette,* 51, May 1967, p. 91—100.

Devis, kurio vardas buvo dažnai minimas šiame skyriuje, pirmą kartą soliterio žaidimu susidomėjo 1962 metais, perskaitęs mano straipsnį apie tą žaidimą. Nuo to laiko jis suspėjo padaryti daug svarbių atradimų: išplėsti uždavinių sprendimo žinomų kriterijų sąrašą, išspręsti uždavinius minimaliu ėjimų skaičiumi ir įrodyti, kad rasti sprendiniai iš tikrųjų yra trumpiausi, sugalvoti ir išspręsti daug naujų uždavinių ir net apibendrinti žaidimą, pakeitus jį trimačiu (trimatį soliterio analogą Devis pavadino soliterio žaidimu). Apie Devio atradimus būtų galima parašyti labai impozantiško dydžio knygą, bet kol kas jis išspausdino tik vieną jau minėtą straipsnį. Pastaraisiais metais drauge su Deviu dirba Veidas E. Filpotas, gavęs daug svarbių rezultatų soliterio žaidimo teorijoje, žaidžiant ne tik ant tradicinių, bet ir ant izometrinių (trikampių) lentų (apie tai, kaip žaisti ant trikampės lentos, galite pasiskaityti šios knygos autoriaus straipsniuose, išspausdintuose žurnalo *Scientific American* 1966 metų vasario ir kovo numeriuose).

ATSAKYMAI

Pirmųjų penkių uždavinių sprendimai, atsiųsti skaitytojų, pasirodė esą trumpesni, negu tie, kuriuos kitados išspausdinau žurnalo *Scientific American* puslapiuose. Žemiau pateiksiu sprendimus minimaliu ėjimų skaičiumi:

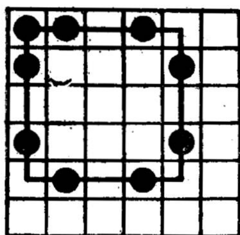
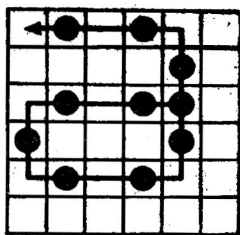
„Graikiškas kryžius" išsprendžiamas šešiais ėijmais: 54—74, 34—54, 42—44—64, 46—44, 74—54—34, 24—44;

„židinys" — aštuoniais ėjimais: 45—25, 37—35, 34—36, 57—37—35, 25—45, 46—44—64, 56—54, 64—44;

„piramidė" — aštuoniais ėjimais: 54—74, 45—65, 44—42, 34—32—52—54, 13—33, 73—75—55—53, 63—43—23—25—45, 46—44;

„lempa" — dešimčia ėjimų: 36—34, 56—54, 51—53—33—35—55, 65—45, 41—43, 31—33—53—55—35, 47—45, 44—46, 25—45, 46—44;

„pasuktas kvadratas" — aštuoniais ėjimais: 55—75, 35—55, 42—44, 63—43—45—65, 33—35—37—47—55—53—51—31—13—15—35, 75—55, 74—54—56—36—34, 24—44. Atkreipkite dėmesį į neįprastą vienuolikos šuolių ėjimą.

94 pav. Sprendimai, kurie baigiasi 8 (kairėje) ir 9 (dešinėje) šuoliais

„Sienelė“ sprendžiama taip: 64—44, 34—54, 46—44, 14—34, 44—24, 42—44, 54—34—14. Tęsiant žaidimą, ant lentos galima palikti tik keturis kauliukus kvadrato 3×3, esančio lentos centre, viršūnėse.

„Kvadratas“ sprendžiamas taip: 46—44, 25—45, 37—35, 34—36, 57—37—35, 45—25, 43—45, 64—44, 56—54, 44—64, 23—43, 31—33, 43—23, 63—43, 51—53, 43—63, 41—43. Kiti ėjimai aiškūs: 15—35, 14—34, 13—33 kairiojoje lentos pusėje ir 75—55, 74—54, 73—53 — dešiniojoje Uždavinys iš esmės išspręstas. Dar prireiks keturių šuolių, norint išdėstyti keturis kauliukus „pasukto kvadrato“ viršūnėse (36, 65, 52, 23 langeliuose). Nežinant ėjimų, buvusių prieš paskutiniuosius keturis, rasti uždavinio apie pasuktą kvadratą sprendimą nepaprastai sunku.

„Sukutis“ sprendžiamas: 42—44, 23—43, 44—42, 24—44, 36—34, 44—24, 46—44, 65—45, 44—46, 64—44, 52—54, 44—64. Susidariusi pozicija turi ketvirtosios eilės simetrijos ašį. Beliko atlikti baigiamuosius ėjimus 31—33, 51—31, 15—35, 13—15, 57—55, 37—57, 73—53, 75—73. Ant lentos sudarytas „sukutis“ yra pozicija „be išeities“ — matas.

Norint pereiti nuo standartinės pradinės pozicijos (vienintelis tuščias langelis lentos centre) prie mato, reikia padaryti mažiausiai 6 ėjimus: 46—44, 45—45, 41—43, 22—44, 54—34, 74—54. Artimiausiu (ėjimų skaičiumi) būdu sudaryti matą reikia jau 10 ėjimų. R. Mersonas paprastai įrodė, kad Karlsono uždaviniui apie kvadratą 6×6 išspręsti reikia bent šešiolikos ėjimų (nepertraukiama šuolių virtinė laikoma vienu ėjimu). Pirmas ėjimas bus 3—1 arba jam simetriškas. Po jo visas kvadrato viršūnes bus užėmę kauliukai. Kadangi kampinio kauliuko peršokti negalima,

visi keturi kampiniai kauliukai turi patys šokinėti per kitus kauliukus. Kažkur turi persikelti ir kampinis; tas pat liečia ir kauliuką, stovintį ant 1 langelio (kairiajame viršutiniame kampe): jį reikia nuimti, užleidžiant vietą kauliukui, darančiam baigiamąjį ėjimą. Taigi keturiems kampiniams langeliams išlaisvinti ir pirmajam ėjimui atlikti prireiks penkių ėjimų. Dabar išnagrinėsime kauliukus, stovinčius išilgai kvadrato kraštinių (kampiniai langeliai į jų skaičių jau neįeina). Peršokti per du gretimus kauliukus prie kvadrato krašto negalima. Vadinasi, bent vienas jų turi pereiti ant kokio nors kito langelio (padaryti ėjimą). Norint išardyti glaustą kauliukų rikiuotę prie dešiniosios ir kairiosios kvadrato kraštinės, taip pat prie jo apatinio pagrindo, reikia perkelti bent po du kauliukus. Norint išardyti kauliukų, išsirikiavusių prie viršutinio pagrindo, eilę, pakanka perkelti tik vieną kauliuką (tariama, kad pirmasis ėjimas 3—1 jau padarytas). Kauliukams, išsirikiavusiems išilgai kvadrato kraštinių, išretinti prireiks dar 7 ėjimų (iš viso nuo žaidimo pradžios bus padaryta 12 ėjimų). Dabar išnagrinėsime langelius, sudarančius vidinį kvadratą 4×4. Kvadratinio keturių langelių bloko (pavyzdžiui 8, 9, 14, 15) negalima peršokti tol, kol bent vienas kauliukas nepereina į kitą langelį. Nesunku suprasti, kad, norint sugriauti visus vidinius blokus, reikia perkelti bent keturis kauliukus. Po to bendras ėjimų skaičius pasieks 16. Trumpiausią Mersono sprendimą sudarė aštuoniolika ėjimų, ir autorius domėjosi, ar galima šį skaičių dar sumažinti.

Mano nuostabai, skaitytojas Dž. Heris uždavinį išsprendė iki galo ir atsiuntė tokį puikų („nepatobulinamą") šešiolikos ėjimų sprendimą: 13—1, 9—7, 21—9, 33—21, 25—13—15—27, 31—33—21—19, 19—27, 16—28, 24—22, 18—16, 6—18, 36—24—12, 3—15—17, 35—33—21—23, 4—16—18—6—4, 1—3—5—17—29—27—25—13—1. Atkreipkite dėmesį, kad sprendimas baigiasi aštuoniais šuoliais. 94 paveikslo kairėje parodyta, kaip išsidėstę kauliukai prieš šį baigiamąjį ėjimą. 1964 metais H. Devis išnagrinėjo atvejus, kai žaidimo pradžioje tuščias langelis sutampa su bet kuriuo iš vidinio kvadrato 6×6 langelių, ir rado šešiolikos ėjimų sprendimą. Baigiamojo ėjimo negali sudaryti daugiau negu devyni šuoliai. Taip žaidimą baigia vienas skaitytojų, atsiuntęs tokį aštuoniolikos ėji-

mų sprendimą: 13—1, 9—7, 1—13, 21—9, 3—15, 19—21—9, 31—19, 13—25, 5—3—15, 16—4, 28—16, 30—28, 18—30, 6—18, 36—24—12—10, 33—21—9—11, 35—33—31—19, 17—15—13—25—29—17—5—3—1. Pozicija prieš paskutinįjį ėjimą parodyta 94 paveikslo dešinėje.

Šis skaitytojas, nagrinėdamas soliterio žaidimą ant stačiakampių lentų su tuščiu kampiniu langeliu pradinėje pozicijoje, įrodė, kad uždavinius galima išspręsti ant visų lentų, kurių išilgai vienos kraštinės telpa arba lygus 3, arba 3 kartotinis langelių skaičius. Išimtį sudaro tik tokios lentos:

1) $1 \times n$ langelių, kai $n \neq 3$, dydžio lenta (ant lentos 3×1, aišku, abi standartinės pozicijos išsprendžiamos);

2) $2 \times n$ langelių, kai n — bet koks sveikas teigiamas skaičius, dydžio lenta;

3) kvadratinė 3×3 lenta;

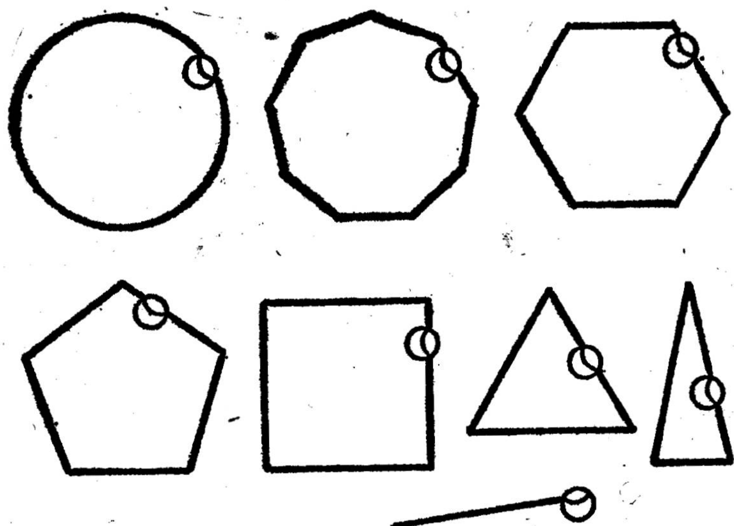
4) stačiakampė 3×5 lenta.

XVII skyrius

Flatlandija

Pliekdami žmonių visuomenės ydas, satyrikai neretai griebiasi fantastikos, ir tada jų kūrinių puslapiuose pasirodo keistos būtybės, išgalvotos visuomenės arba net ištisi pasauliai su stebinančia tvarka, papročiais ir tradicijomis, su savo, nepanašiais į žemiškuosius, gamtos dėsniais. Mėginta satyriškai pavaizduoti dvimačių būtybių, judančių plokštumoje, visuomenę. Vargu ar juos galima laikyti literatūros šedevrais, bet matematiniu požiūriu jie gana įdomūs ir žaismingi.

Pirmiausia aš turiu omenyje labiausiai žinomą knygą „Flatlandija". Ji buvo išleista 1884 m. Jos autorius — Londono šventikas Edvinas Ebotas. „Flatlandija" ne vienintelis Eboto parašytas kūrinys. Būdamas mokyklos direktorium, jis parašė ir nemaža vadovėlių. „Flatlandijos" pirmojo leidimo tituliniame lape buvo pseudonimas



95 pav. Vienakiai flatlandai, užimantys įvairią visuomeninę padėtį (nuo žemiausios iki aukščiausios pakopos)

A. Square.* Pasakojimas tikrai buvo pateiktas kažkokio kvadrato vardu! Vienintelė pasakotojo akis buvo vienoje jo viršūnių. (Apie tai, kaip pasakotojas, neturėdamas kojų, išsigudrino judėti Flatlandijos paviršiumi, ir kaip, neturėdamas rankų, galėjo parašyti knygą, autorius delikačiai nutyli.)

Eboto Flatlandija yra paviršius, kažkuo panašus į geografinį žemėlapį, o jos gyventojai — flatlandai — slidinėja juo kaip ledu. Flatlandų kūnas švytinčiais pakraščiais, o jų aukštis, arba trečiasis vertikalusis matavimas be galo mažas. Patys flatlandai to net neįtaria, nes neturi supratimo apie trečiąjį matavimą. Flatlandijos visuomenė griežčiausiai suskirstyta pakopomis (95 pav.). Žemiausią visuomeninę pakopą sudaro moterys. Jos labai panašios į adatą: tai paprasčiausios tiesių atkarpos su viename gale šviečiančia akimi. Kadangi antrasis atkarpos galas nešviečia, moteris, atsukusi „nugarą“, iš karto pasidaro nematoma. Jeigu koks nors flatlandas vyras at-

* A square *(angl.)* — kažkoks kvadratas. — *Vert. į rusų k. pastaba*

sitiktinai užkliudys aštrią flatlandės „nugarą“, toks susidūrimas jam gali būti pražūtingas. Siekiant išvengti nelaimingų atsitikimų, įstatymas įpareigoja moteris, kad jos visada būtų matomos, be perstojo daryti banguojančius judesius atkarpos galu, priešingu akiai. Damų, kurių vyrai priklauso aukštuomenei, banguojantys judesiai „ritmingi“ ir „malonūs akiai“. Prastesnės moterys, veltui stengdamosi sekti aukštuomenės damomis, paprastai tesugeba atlikti tik „varginančiai vienodus į švytuoklės svyravimus panašius“ judesius.

Flatlandijos kareiviai ir darbininkai — lygiašoniai trikampiai su labai trumpais pagrindais ir smailiais viršūnių kampais. Lygiakraščiai trikampiai sudaro vidurinius gyventojų sluoksnius. Flatlandai, turintys kokią nors specialybę, yra kvadratų ir penkiakampių formos. Aukštesnieji visuomenės sluoksniai prasideda nuo šešiakampių. Kylant visuomenės laiptais, daugiakampio kraštinių skaičius didėja tol, kol daugiakampis virsta apskritimu. Apskritimai yra hierarchinių laiptų viršūnėje. Tai Flatlandijos valdytojai ir žyniai.

Pasakotojas — kažkoks kvadratas — sapne patenka į vienmatę šalį Lainlandiją *. Šios šalies karaliaus jis taip ir negalėjęs įtikinti, kad egzistuojanti dvimatė erdvė. Po to kvadratas susipažįsta su rutuliu — ateiviu iš Speislandijos **, kuris bando padėti kvadratui perprasti trimatės erdvės paslaptis. Rutulio padedamas, kvadratas pakyla virš gimtosios Flatlandijos ir turi progos žvilgtelėti į savo taisyklingo penkiakampio formos namo vidų. Grįžęs į Flatlandiją, kvadratas pradeda skelbti mokslą apie trimatę erdvę, bet palaikomas bepročiu ir už skelbiamas pažiūras įmetamas į kalėjimą. Taip baigiasi knyga.

Rutuliui pavyko prasibrauti į Flatlandiją taip. Jis labai palengva stūmėsi per plokštumą tol, kol pjūvyje pasidarė figūra, turinti didžiausią plotą. Lengva suprasti, jog ta figūra — apskritimas su spinduliu, lygiu rutulio spinduliui. Tarkime, jog vietoje rutulio į Flatlandiją prasiskverbė kubas. Kam lygus maksimalus vienetinio kubo pjūvio plokštumos plotas? Kirsdamas plokštumą, kubas, suprantama, gali būti pasisukęs bet kaip.

---

* Line *(angl.)* — linija. Lainlandija — vieno matavimo šalis. — *Vert. į rusų k. past.*

** Space *(angl.)* — erdvė. Speislandija — trijų matavimų šalis. — *Vert. į rusų k. past.*

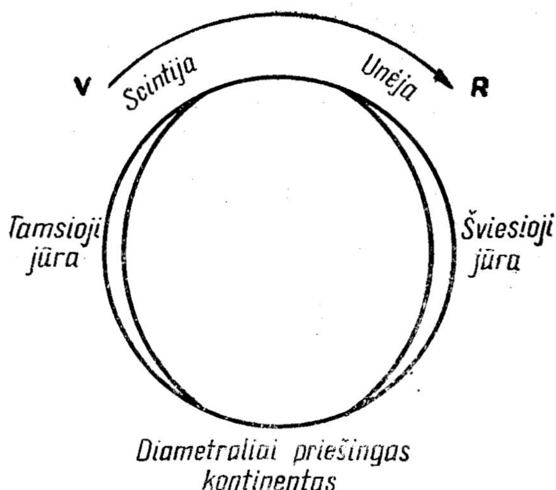
Čarlzo Hovardo Hintono romanas „Epizodas iš Flatlandijos gyvenimo", išėjęs 1907 metais Londone, nuo Eboto knygos skiriasi žymiai didesne apimtimi (apie 200 puslapių) ir pretenzingumu.

Hintonas buvo įžymus Londono chirurgo otolaringologo Džeimso Hintono, Džordžo Elioto draugo ir kadaise plačiai žinomo daugelio knygų autoriaus, sūnus. Jaunystėje Hintonas studijavo matematiką Oksforde. Vedęs Merę Bul (vieną iš penkių žinomo logiko Džordžo Bulio dukterų), jis apsigyveno Jungtinėse Valstijose. Prinstone ir Minesotos valstijos universitete dėstė matematiką. Paskutiniaisiais gyvenimo metais Čarzlas Hintonas dirbo revizoriumi Jungtinių Valstijų Patentų biure. Mirė 1907 metais.

Niujorko laikraštis „Sun" ta proga paskelbė ilgą nekrologą, kurio autorius pateikė nemaža įdomių smulkmenų iš Hintono gyvenimo. Kartą Hintonas atėjo į futbolo rungtynes su chrizantema švarko atlape. Kažkoks nepažįstamasis mėgino nuplėšti gėlę. Hintonas sugriebė skriaudiką ir permetė jį per netoliese buvusią tvorą. 1897 metais Hintonas išgarsėjo, išradęs automatinę „kuoką" beisbolui lošti. „Kuoką" užtaisydavo paraku, ir ji iššaudydavo kamuolius bet kokiu nustatytu greičiu ir trajektorija. „Kuoka" kurį laiką buvo naudojama Prinstono universiteto komandai treniruoti, bet po kelių nelaimingų atsitikimų žaidėjai bijodavo gaudyti jos iššautus sviedinius.

Didžiausią populiarumą Hintonas įgijo kaip knygų ir straipsnių apie ketvirtąjį matavimą autorius. Jis ištobulino keturmačių figūrų modelių konstravimo iš šimtų mažų tam tikru būdu sužymėtų ir nuspalvintų kubų metodą (pagal jų trimačius pjūvius). Metodas smulkiai išdėstytas dviejose svarbiausiose Hintono knygose — „Ketvirtasis matavimas" (The Fourth Dimension") ir „Naujoji era mąstyme" („A new Era of Thought"). Hintonas tvirtino, kad daug metų dirbdamas su kubais, jis išmoko mąstyti keturmatėmis sąvokomis. Savo metodą jis paaiškino žmonos seseriai, aštuoniolikmetei Alisai Bul. Nors mergina ir neturėjo matematinio išsilavinimo, ji greit įsisavino keturmatę geometriją ir vėliau atliko nemažai svarbių šios srities atradimų. (Apie Alisą Bul ir jos pasiekimus keturmatėje geometrijoje pasakoja H. S. Kokseteris savo knygoje „Taisyklingieji politopai" *). Hintono Flatlandija, kurią

H. S. M. Coxeter. Regular Polytopes. N. Y., 1948, p. 258—259.

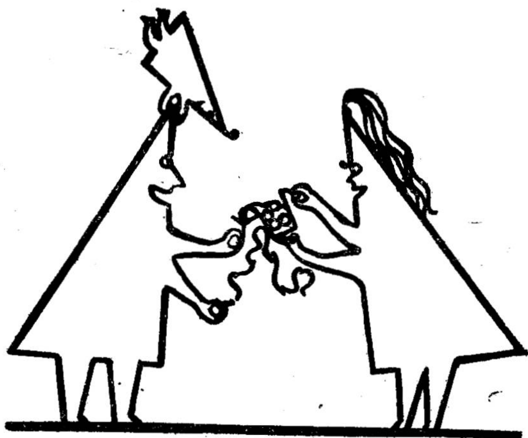


96 pav. Čarlzo H. Hintono vaizduotės sukurta dvimatė planeta Astrija

pats autorius pavadino Astrija, sugalvota sąmojingiau, negu Eboto šalis. Hintonas neleidžia Astrijos gyventojams šlaistytis plokštumoje kur papuola; vietoj to jis sustato savo herojus, jeigu taip galima pasakyti, vertikaliai, išilgai viso milžiniško apskritimo. Išdėstę ant stalo monetas ir stumdydami jas vieną apie kitą, be vargo įsivaizduosite, kaip apie plokščią saulę sukasi plokščios apvalios planetos.

Plokščiame pasaulyje veikia lygiai tokia pati gravitacija, kaip ir pas mus, tik jėga, kuria vienas kitą veikia du kūnai plokštumoje, atvirkščiai proporcinga atstumui tarp jų, o ne atstumo kvadratui, kaip trimatėje erdvėje.

Astrijos planeta pavaizduota 96 paveiksle. Jos sukimosi kryptis, nurodyta rodykle, vadinama rytais, o jai priešinga — vakarais. Šiaurės ir pietų nėra, yra tik viršus ir apačia. Astrijiečių kūnų sandara labai sudėtinga, ir, nesigilindamas į anatomines smulkmenas, savo planetos gyventojus Hintonas vaizduoja stačių trikampių formos (97 pav.). Visi astrijiečiai, kaip ir flatlandai, vienakiai. (Matyt, nė vienas autorius nepagalvojo, jog dvimatės būtybės galėtų žiūrėti į pasaulį dviem akimis, bet su vien-



97 pav. Astrijiečių šeimos gyvenimo schema

mate tinklaine.) Skirtingai nuo Flatlandijos gyventojų, astrijiečiai turi rankas ir kojas. Kai susitinka du astrijiečiai, prasilenkti jiems gana sudėtinga: vienam prisieina perlipti per kitą (panašiai, kaip prasilenkia ėjikai virve).

Astrijoje visos moterys pasisukusios veidu į rytus, o visi vyrai — veidu į vakarus. Taip jie ir gyvena iki pat mirties, nes aišku, kad negali „pasisukti" ir tapti savo paties veidrodiniu atspindžiu. Jeigu astrijietis nori pamatyti, kas dedasi už jo nugaros, jam tenka arba atsilošti atgal ir atsistoti ant galvos, arba pasinaudoti veidrodžiu. Pastarasis būdas, suprantama, patogesnis, todėl astrijiečių namuose pilna veidrodžių. Norėdamas pabučiuoti sūnų, tėvas turi apversti berniuką žemyn galva.

Apgyventą Astrijos dalį iš pradžių pasidalijo civilizuoti unėjai, gyvenę rytuose, ir barbariškos scintianų gentys, gyvenusios vakarinėje planetos srityje. Kare scintianai turėjo didžiulį pranašumą: scintianų vyrai galėjo atakuoti unėjus iš užnugario, tuo tarpu unėjams beliko tik gintis, atsisukus nugara į priešą. Išnaudodamos šį pranašumą, scintianų gentys stūmė unėjus į rytus tol, kol išstūmė į siaurą teritoriją prie Šviesiosios jūros krantų.

Tik mokslo išvystymas išgelbėjo unėjus nuo visiško sunaikinimo. Stebėdami užtemimus ir kitus gamtos reiškinius, jų astronomai padarė išvadą, jog jie gyvena ap-

skritoję planetoje. Šviesiosios jūros potvynių ir atoslūgių tyrimas unėjų mokslininkams davė pagrindą tvirtinti, kad diametraliai priešingoje planetos pusėje taip pat turi egzistuoti kontinentas. Nedidelis unėjų būrys persikėlė per Šviesiąją jūrą ir šimtą metų žygiavo tuo kontinentu, įveikdamas didžiausius sunkumus. Jeigu kelyje pasitaikydavo medis, keliautojams tekdavo arba įlipti į jį ir paskui nusileisti, arba nupjauti tą medį iki šaknų. Tyrinėtojų sūnus ir dukros, išlaikę visus išbandymus, pasistatė naujus laivus ir persikėlė per Tamsiąją jūrą. Netikėtai užpulti, scintianai buvo greitai nugalėti, nes šį kartą iš užnugario jiems smogė unėjai! Vėliau buvo sudaryta Pasaulinė vyriausybė, ir planetoje įsiviešpatavo taika. Papasakoti įvykiai yra tik fonas, kuriame plėtojamas romano veiksmas.

Nevarginsiu skaitytojo smulkiu dvimatės melodramos perpasakojimu. Ji parašyta pagal geriausias ankstyvųjų utopinių romanų, kuriuose išjuokiamos plutokratijos ydos ir iškeliami teisingos visuomeninės santvarkos privalumai, tradicijas. Knygoje aprašoma liūdna meilės istorija, kurios herojai Laura Kartrait, graži turtingo ir įtakingo valstybės sekretoriaus duktė, ir jos nuostabus (plokščio stebėtojo požiūriu) garbintojas Haroldas Uolas, kilęs iš darbininkų. Romanas persunktas mistiško laukimo įvykio, kuris turėtų atsitikti artimiausioje ateityje: kitos planetos Ardėjos — skriejimo pro Astriją. Astrijos mokslininkai apskaičiavo, kad dėl to jų gimtosios planetos orbita virs labai ištęsta elipse ir klimatas pasidarys netinkamas gyvybei: tai perdaug karštas, tai perdaug šaltas. Astrijos vyriausybė sudaro grandiozinių požeminių slėptuvių, aprūpintų maisto atsargomis ir skirtų astrijiečių visuomenės aukštųjų sluoksnių atstovams išgelbėti, statybos planą.

Laimei, piktą lemtį padėjo nugalėti Lauros dėdės Hju Milerio, ekscentriško seno viengungio, gyvenančio vienišame kalne, matematinė teorija. Mileris (kurio prototipas, tikriausiai, yra pats Hintonas) vienintelis Astrijoje tikėjo trečiuoju matavimu. Atlikęs daugybę tyrimų, jis įsitikino, kad visi daiktai turi nors ir nedidelę apimtį išilgai trečios koordinatės ir slenka tam tikru lygiu paviršiumi, kurį jis pavadino „plokščia būtimi". Gamindamas įvairius modelius, Mileris įgijo įgūdžių vaizdžiai apčiuopti trimačius daiktus ir įsitikino, kad jis pats iš tikrųjų yra trimatis, nors jo kūno apvalkalas yra dvimatėje erdvėje.

„Iš abiejų mūsų plokščios būties pusių į begalinį gylį ir tolį nusitęsusi pati gyvybė — pareiškia Mileris savo gražbyliame laiške Astrijos valdovams, — supraskite tai, ir jūs niekuomet daugiau negalėsite žiūrėti į mėlyną dangaus skliautą, nejausdami kokio nors stebuklo. Kad ir kaip toli skverbtųsi jūsų žvilgsnis į bekraštę dangaus gelmę, jis visada slenka šalia mums nepažįstamos gyvybės, giliai nusitęsusios išilgai mūsų jausmams nesuvokiamo matavimo.

Tų faktų pripažinimas sukelia mumyse kažką panašaus į seniai pamirštą pagarbaus nuolankumo dangui jausmą, nes žinome, kad žvaigždynai pripildo Visatą ne be galo pasikartojančiais vienais ir tais pačiais vaizdais. Ne! Mes turime teisę laukti netikėtai ir stebuklingai pasirodant iki šiol nežinomų dalykų, apie kuriuos tiek svajota senovėje. O, jeigu mes galėtume žinoti, kas slepiasi kitoje matomo pasaulio pusėje!“

Jeigu egzistuotų mechaninis būdas, kuriuo būtų galima pasiekti ir prisitvirtinti prie „plokščios būties“ paviršiaus, Astrijos trajektoriją būtų galima pakeisti taip, kad ji likviduotų artėjančios planetos įtaką. Bet tokio būdo nėra, ir Mileris nusprendžia pritaikyti savo atradimą: savo asmenybės trečiąjį matavimą. Trimatis žmogus, samprotauja jis, turi sugebėti paveikti „plokščią būtį“. Mileris siūlo visiems Astrijos gyventojams užsiimti tuo, kas mūsų dienomis priimta vadinti telekineze (parapsichologijos terminas, reiškiantis sugebėjimą mintimis priversti bet kokius daiktus keisti judėjimo kryptį). Milerio pasiūlytas planas buvo sėkmingai įgyvendintas.

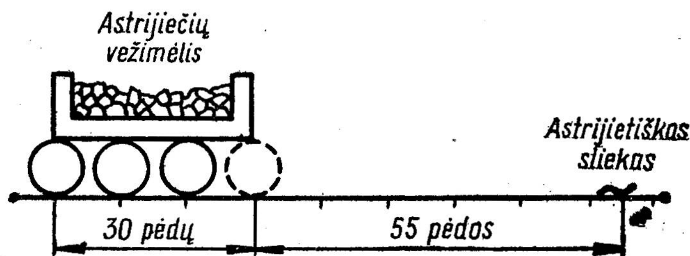
Sutelkę savo telekinetinius sugebėjimus, Astrijos gyventojai pakeitė jos orbitą ir išvengė katastrofos. Astrijos mokslas, apsiginklavęs nauja trimatės erdvės sąvoka padarė milžinišką šuolį pirmyn.

Įdomu pamąstyti apie dvimatės erdvės fiziką ir apie tai, kokius paprastus mechaninius prietaisus galima pagaminti plokščiame pasaulyje. Kitame savo kūrinyje Hintonas rašo (turimas omenyje jo apsakymas „Plokščias pasaulis“), kad astrijiečių namuose tuo pačiu metu galima atidaryti ne daugiau kaip vieną langą arba duris. Atida-

rant paradines duris, visus langus ir atsarginį išėjimą reikia uždaryti, kitaip namas sugrius.

Dvimačiame pasaulyje negali būti jokių vamzdžių, tunelių ir net pypkių: jų galų negalima sujungti, neužkimšus vidinės skylės. Plokštumoje jums nepasiseks surišti mazgo, tačiau galėsite naudotis įvairiais kabliais, movomis, švytuoklėmis, pleištais, svertais ir nuožulniomis plokštumomis. Apie ratų su ašimis panaudojimą negali būti ir kalbos. Šiokį tokį judesio perdavimą krumpliaračiais būtų galima sukonstruoti, kiekvieną krumpliaratį apgaubus apvadu su išpjovomis susikabinusiems krumpliams. Galima sugalvoti, kaip irtis astrijiečių laiveliu; astrijiečių lėktuvai turi plasnoti sparnais kaip paukščiai. Astrijiečių upėse ir jūrose plaukiotų plokščios žuvys su specialios formos pelekais. Astrijiečių likerį būtų galima laikyti buteliuose ir išpilstyti į taureles, bet jame, be abejo, aiškiai jaustųsi specifinis plokštumos prieskonis.

Sunkius daiktus iš vienos vietos į kitą būtų galima pervežti, pakišant po jais apskritimus lygiai taip, kaip pervežame sunkius trimačius daiktus, pakišdami po jais ritinio formos volus. Astrijiečių metodas sunkiems daiktams pervežti sudaro puikaus galvosūkio, kurį man neseniai atsiuntė vienas skaitytojų, pagrindą. 98 paveiksle pavaizduotas trisdešimties pėdų ilgio krovininis astrijiečių vežimėlis, galintis judėti tiese ant trijų apskritimo formos volų. Atstumas tarp dviejų gretimų apskritimų centrų visada sudaro dešimt pėdų. Vos tik vežimėlis atsiduria padėtyje, pavaizduotoje paveiksle, astrijietis, stumiantis ratus iš užpakalio, paima užpakalinį (laisvą) apskritimą ir perduoda jį savo padėjėjui, žengiančiam vežimėlio priekyje. Tas pakiša apskritimą po vežimėliu (žr. apskritimą, 98 paveiksle pavaizduota punktyru). Paskui vežimėlis vėl pastumiamas pirmyn tiese, kuria rieda trys apskritimai. Kai tik vežimėlis nurieda nuo paskutinio apskritimo, pastarasis vėl perkeliamas į priekį. Tai kartojama tol, kol krovinys nepasiekia paskirties vietos. 98 paveiksle vežimėlis važiuoja į dešinę. Prieš vežimėlį, lygiai per penkiolika pėdų nuo punktyru vaizduojamo apskritimo ir tiesės lietimosi taško, yra astrijietiškas sliekas. Tarkime, kad jis niekur nenušliauš. Kiek per jį pervažiuos apskritimų?



98 pav. Kiek ratų pervažiuos slieką?

Skaitytojui rekomenduojame pirma pabandyti išspręsti uždavinį mintinai. Paskui, paėmę popieriaus ir pieštuką, patikrinkite gautą atsakymą ir pagaliau palyginkite jį su atsakymu, nurodytu skyriaus pabaigoje. Tie, kuriems šio uždavinio bus per mažai, gali pabandyti apibendrinti jį *n* ratams, lygiai nutolusiems vienas nuo kito. Kaip nekeista, ratų matmenys nebūtinai turi būti žinomi.

Kalbėdamas apie „dvimatės būties" sunkumus, aš pabrėžiau, kad plokštumoje negali būti tunelių, tačiau pasirodo, jog ne visai taip. Vienas skaitytojų suvokė, kad flatlandiško tunelio stogas gali būti paremtas keliomis durimis, kurios pakabintos iš viršaus kilpomis. Eidamas tokiu tuneliu, flatlandas turėtų kiekvieną kartą atidaryti vis po vienerias duris, tuo tarpu visos kitos durys laikytų tunelio stogą. Tiesa, reikėtų turėti specialų mechanizmą tam, kad visos durys negalėtų atsidaryti kartu.

„Ketvirtasis matavimas" — taip vadinasi Fletčerio Diurelio knygos „Matematiniai nuotykiai" * dvyliktasis skyrius. Minėtoje knygoje pateikta žaismingų samprotavimų apie Tinlandijos**— daug kuo primenančios Flatlandiją — šalies gyventojus. Turėdami dvi akis (vieną kaktoje, antrą — po smakru), tinlandiečiai mato binokuliariai. Ilgas kaklas padeda jiems atlošti galvą atgal ir matyti, kas dedasi už nugaros. Kai moteriai ir vyrui tenka prasilenkti, vyras turi gultis ant žemės, kad moteris galėtų per jį peržengti. Be grynai mechaninių gyvenimo plokštumoje sunkumų, negalima netarti keletą žodžių ir apie sunkumus, laukiančius kiekvieno, kuris užsimos perprasti Tin-

*F. Durell. Mathematical Adventures. Boston, 1938.
** Thin *(angl.)* — plonas.

landijos gyventojų smegenų sandarą. Tie sunkumai susiję su plokštumos kreivių topologinėmis savybėmis. Kaip žinoma, gyvūnų (paprastų, „trimačių“) smegenys yra fantastiškai sudėtinga nervinių skaidulų pynė trimatėje erdvėje. Įsivaizduoti nervų tinklą plokštumoje be susikirtimų neįmanoma. Tačiau šis sunkumas nėra jau toks neįveikiamas, kaip atrodo iš pirmo žvilgsnio. Elektriniai impulsai gali sklisti ir susikertančiame tinkle, nenukrypdami, kaip sakoma, už kampo prie sankryžų.

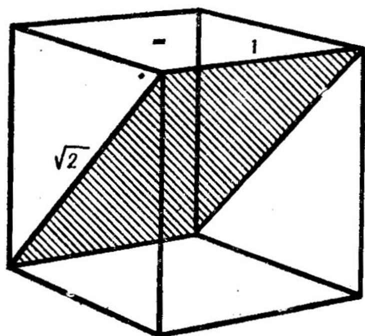
Apie Bulio žmoną, jo penkias dukteris ir puikius įpėdinius pasakojama N. Gridžmeno straipsnyje „Pagyrimas Buliui.“ * Merė, Bulio žmona, vyrui mirus, šešiasdešimt metų „nepaliaujamai rašė apie Bulio metodus ir skelbė juos įvairiose mokslo srityse, jų tarpe teologijoje ir etikoje“, — rašo Gridžmenas. — Ji buvo beveik visai pasinėrusi algebrinės simbolikos mistikoje ir apmąstymuose apie nulio ir vieneto reikšmę matematikoje. 1909 metais Merė Bul išleido knygą, pavadintą „Filosofija ir įdomybės algebroje“, kurioje atkakliai rekomendavo „tiems, kas nori... nustatyti tiesiogius tarpusavio santykius su Nežinomuoju“, Bulio metodų pagrindu kurti savo algebras.

Hovardas Everestas Hintonas, Čarlzo Hintono ir Merės, vyriausiosios Bulio dukters, anūkas tapo žinomu britų entomologu. Anūkė Džoana tapo fizike. Džefris Teiloras, Margaretos, antrosios Bulio dukters, sūnus tapo įžymiu matematiku ir dirba Kembridže. Apie trečiąją dukterį, Alisą, trumpai jau pasakota. Liusi, ketvirtoji Bulio duktė, chemijos profesorė Karališkojoje laisvojoje Londono ligoninėje. Jauniausioji Bulio duktė, Etelė Lilijana, ištekėjo už lenkų mokslininko emigranto Vilfrido Voiničio. Jaunystėje ji parašė romaną „Gylys“. Po pirmojo pasaulinio karo Voiničių šeima iš Londono persikėlė į Manheteną. 1960 metais Etelė mirė, eidama devyniasdešimt šeštuosius metus.

ATSAKYMAI

99 paveiksle parodyta, kaip reikia kirsti vienetinį kubą plokštuma, norint pjūvyje gauti maksimalaus ploto figūrą. Užbrūkšniuotas pjūvis yra stačiakampis, kurio plotas lygus $\sqrt{2}$, arba 1,41...

* *New Scientist*, № 420, December 3, 1964, p. 655—657.



99 pav. Uždavinio apie kubo kirtimo plokštuma atsakymas

Kubą galima perpjauti ir taip, kad pjūvyje išeitų taisyklingas šešiakampis, bet tada jo plotas bus tik 1,29... (kubo briauna lygi 1).

Uždavinio apie vežimėlį atsakymas: plokščią slieką pervažiuos tik vienas apskritimas. Jeigu turėtume n vienodai vienas nuo kito nutolusių ratų ir skaičius n būtų lyginis, skaičius apskritimų, pervažiuojančių slieką, kokiame taške jis bebūtų (jeigu tik nepapuolė po ratais), lygus $\frac{n}{2}$. Situacija sudėtingesnė, kai n — nelyginis skaičius. Visą kelią nuo priekinio rato iki slieko tuomet reikia padalyti į lygias atkarpas, kurių ilgis lygus gretimų apskritimų centrų atstumui. Jei sliekas guli pirmojoje prieš ratus atkarpoje arba per nelyginį skaičių atkarpų nuo jos, skaičius apskritimų, kurie pervažiuos slieką, lygus $\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)$. O jeigu sliekas guli bet kurioje kitoje atkarpoje, tokių apskritimų skaičius lygus $\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)$. Vėl darome prielaidą, jog sliekas dar nebuvo papuolęs po ratais. Vartojant matematinę terminologiją, galima pasakyti, kad į „kraštines sąlygas“ nekreipiame dėmesio.

Skaitytojai, išsprendę šį uždavinį, turėjo pastebėti, kad vežimėlis žemės atžvilgiu juda du kartus greičiau, negu ratas, besisukantis po jais, t. y. per tą laiką, kol ratas nueina atstumą x, vežimėlis nuvažiuos atstumą $2x$. Tokiu principu kai kada veikia lifto durys: vienos jų atsidaro du kartus greičiau, negu kitos, ir suspėja per tą patį laiką nueiti du kartus didesnį atstumą.

XVIII skyrius

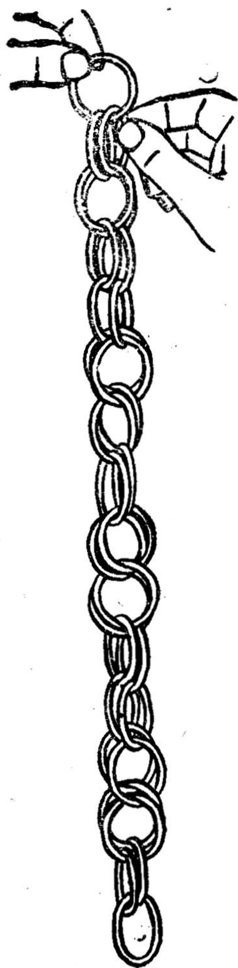
Fokusininkų suvažiavimas Čikagoje

Kiekvieną vasarą, paprastai liepos mėnesį, tūkstančiai amerikiečių fokusininkų (įsivaizduojamos) brolijos narių renkasi į savo suvažiavimą Čikagoje. Tris dienas ir naktis viešbučio, kur apsistoja suvažiavimo dalyviai, fojė šmėžuoja, pranykdamos ir vėl atsirasdamos, lošimo kortos, skambėdamos krinta nežinia iš kur monetos, pačios susipjausto ir iš naujo atsistato kirvės, skraido balandžiai, dingsta narveliai su paukščiais, o kartais net viena ar dvi merginos.

Į suvažiavimą aš nusprendžiau vykti dėl dviejų priežasčių. Pirma, pats labai mėgstu rodyti fokusus, antra, tikėjausi ten gauti ką nors naujo mano redaguojamam *Scientific American* skyriui. Daugelis matematikų laisvalaikiu su malonumu rodo fokusus, o daugelis fokusininkų gyvai domisi matematika. Dėl to atsirado matemagija — vienas įspūdingiausių įdomiosios matematikos skyrių.

Viršutinio aukšto fojė atsidarė savotiška mugė: apie dvidešimt fokusininkų nedidelėse palapinėse iškabinėjo savo „prekes". Aš sustojau prieš palapinę, kurioje Didysis Džasperas (toks vieno Čikagos fokusininko pseudonimas) demonstravo žinomą pokštą — „krintančius" žiedus. Fokusas atrodo taip. Susipynusių žiedų grandinėlė (100 pav.) imama kairiąja ranka už viršutinio žiedo. Po juo yra du kiti žiedai. Dešiniosios rankos nykščiu ir smiliumi fokusininkas dešiniojo žiedo užpakalinę dalį suima taip, kaip parodyta 100 paveiksle. Kai fokusininkas atleidžia kairiosios rankos pirštus, atrodo, lyg viršutinis žiedas, peršokdamas nuo vienos grandinėlės grandies ant kitos, nusvyra žemyn ir pakimba, užsikabinęs už apatinio žiedo.

Fokusą galima tęsti. Kairiosios rankos nykščiu ir smiliumi reikia suimti priešakinę kairiojo iš žiedų, kabančių ant aukščiausio žiedo (jį fokusininkas dabar laiko dešiniąja ranka), dalį. Kai fokusininkas atleis dešiniosios rankos pirštus, pamatysite, kaip viršutinis žiedas pradės kristi žemyn, nepraleisdamas pakeliui nė vienos grandinėlės grandies.



100 pav. „Krintantys žiedai"

— Ar įstengs mano skaitytojai patys pasidaryti tokią grandinėlę? — paklausiau.

— O kodėl ne? — nusistebėjo Džasperas. — Žiedų raktams galima nusipirkti parduotuvėje, o turint trisdešimt žiedų ir stiprius nagus, labai paprasta per dvidešimt minučių pasidaryti tokią grandinėlę. Tik nesakykite kitiems fokusininkams, kad tai aš pasakiau.

Džasperas buvo teisus. Žiedai raktams — puiki medžiaga grandinėlei. O jeigu norėsite nesusižeisti nagų, pamėginkite žiedo vijas praskirti peilio ašmenų neaštriąja puse. Šiek tiek pasukę ašmenis, žiedą galėsite laikyti praskėstą tol, kol kitas žiedas įlįs į susidariusį plyšį. Patogiausia pradėti nuo viršutinio žiedo, pakabinus jį ant vinutės, ir prie jo prikabinus visus kitus, kaip parodyta paveiksle. Jeigu viskas padaryta teisingai, žiedai kris maloniai, lengvai žvangėdami.

Kol kalbėjausi su Džasperu, prie mūsų priėjo Fitčas Činis, Hartfordo universiteto matematikas.

— Jus domina fokusai, pagrįsti mazgų raišiojimu arba žiedų sujungimu? Aš išradau vieną fokusą, kuris gal patiks jūsų skaitytojams.

Tardamas šiuos žodžius, Činis išsitraukė iš kišenės ilgą minkštos virvės gabalą. Džasperas ir aš paėmėme ją už galų ir, užkabinę kairiosios rankos smiliumi, suteikėme jai formą (101 pav., *a*); paskui Činis išsiėmė iš kišenės šilkinę skarelę ir, suėmęs ja virvę, iš pradžių standžiai surišo ją paprastu mazgu, vėliau, pra-

kišęs skarelės galus pro virvės kilpas (101 pav., *b*), apačioje surišo dvigubą mazgą (101 pav., *c*).

— Dabar ištraukite pirštus iš kilpų ir įtempkite virvę.

Mes paklausėme (rezultatas parodytas 101 pav., *d*). Činis pasuko skarelę 180°, ir mazgas atsidūrė viršuje.

— Keista, — pasakė jis. — Nors skarelė buvo apsukta apie virvę ir surišta standžiu mazgu, virvė kažkodėl dabar tapo skarelės atžvilgiu uždara iš išorės kreive.

Tai sakydamas, jis truktelėjo skarelę aukštyn ir nutraukė ją nuo virvės (101 pav., *e*). Atlikite fokusą patys ir įsitikinsite, kad jis visuomet pavyks.

Prieš pietus fokusininkai susirinko kokteilių bare. Prie baro pastebėjau savo seną pažįstamą — Banko laikytoją iš Los Vegaso Niką Statau, pravardžiuojamą Nikeliu.* Jis garsėjo tuo, kad stropiai sekė visas fokusų su kortomis naujienas. (Tokią pravardę Nikelis Nikas Statau gavo dėl manieros lažintis iš penkių centų. Visi žinojo, kad jis sukčiauja ir jo partnerio visuomet laukia kokia nors klasta, bet kas pabūgs rizikuoti penkiais centais? Vertėjo paaukoti monetą vien dėl įdomumo.)

— Kokios nors naujos lažybos, Nikai? — paklausiau aš.— Pageidauju ko nors, susijusio su tikimybių teorija. Norėčiau, kad ginčą išspręstume, neatsitraukdami nuo baro.

Nikas greta savo alaus bokalo padėjo monetą.

— Jeigu aš šiek tiek kilstelsiu monetą virš baro ir mesiu ją, su tikimybe $\frac{1}{2}$ iškris herbas, o su tikimybe $\frac{1}{2}$ — kita monetos pusė. Teisingai?

— Teisingai, — sutikau aš.

— Statau nikelį, — tarė Nikas, — kad moneta nukris ant briaunos ir ant briaunos liks stovėti.

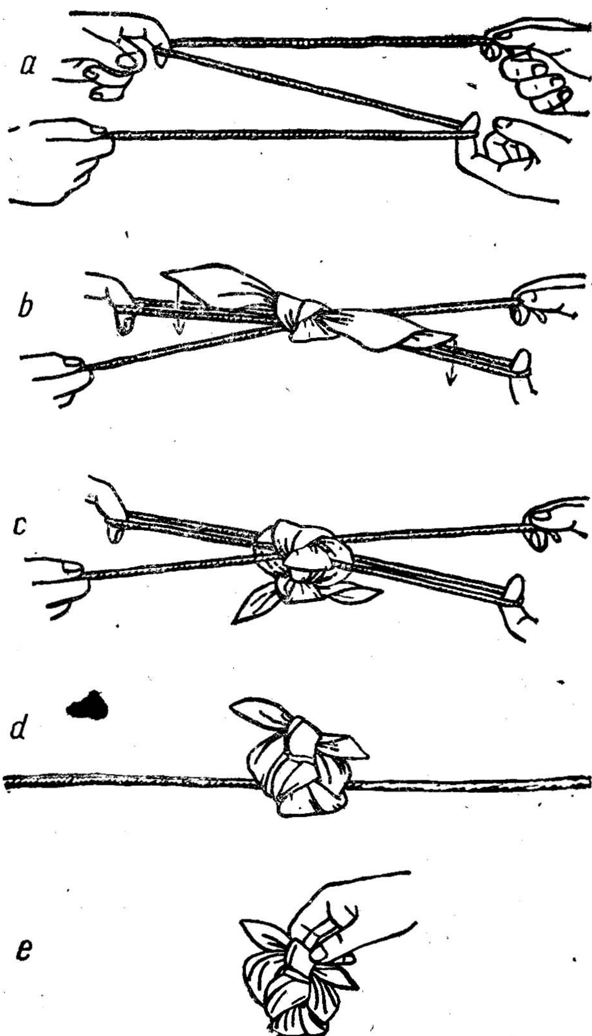
— Sutinku, — linktelėjau aš.

Nikas monetą panardino į alų, paskui priglaudė prie bokalo šono ir leido jai nuslysti žemyn. Moneta laimingai nusileido ant baro paviršiaus ir liko stovėti ant briaunos prie bokalo sienelės, laikoma alaus klampumo jėgos. Aš įteikiau Nikui penkis centus. Visi ėmė juoktis.

Nuo cigarečių dėžutės Nikas nuplėšė siaurą kartono juostelę ir vienoje pusėje pieštuku padarė atžymą.

---

* Nikelis — 5 centų moneta



101 pav. Fokusas su virve ir skarele

— Jeigu aš mesiu šią juostelę ant baro, su tikimybe $\frac{1}{2}$ ji nukris pažymėta puse į viršų. Statau nikelį, — tęsė jis, — kad juostelė nukris ant briaunos taip pat, kaip moneta.

— Lažinuosi, — atsakiau aš.

Nikas metė juostelę, bet prieš tai sulenkė ją raidės V pavidalu. Suprantama, juostelė nukrito ant briaunos, ir aš praradau dar penkis centus.

Kažkoks nepažįstamasis prasispraudė prie baro ir išsiėmė iš kišenės mažą plastmasinį sukutį.

— Ar jūs kada nors matėte apsiverčiantį sukutį? — paklausė jis. — Statau nikelį, kad, jums pasukus, jis apsivers, atsistos ant kojelės ir toliau suksis ant jos, kol sustos.

— Nieko neišeis, — atsakė Nikas. — Aš pats nusipirkau apsiverčiantį sukutį.* Bet statau nikelį, kad jūs negalėsite numatyti, kokia kryptimi suksis sukutis po to, kai apsivertęs vėl atsistos ant kojelės.

Sukučio savininkas prikando lūpą ir susimąstęs tarė:

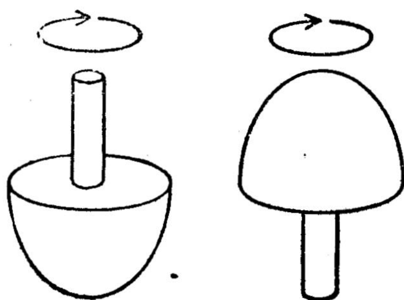
— Pagalvokime. Aš jį paleidžiu laikrodžio rodyklės kryptimi. Kai jis apsiverčia, sukimosi kryptis jo paties ašies atžvilgiu lieka nepasikeitusi. O tuo metu ašies galai po apsivertimo pasikeičia vietomis. Bet jeigu ašies galai pasikeitė vietomis, tai, žiūrėdami į sukutį iš viršaus, pamatysime, kad jo sukimosi kryptis pasikeitė. Taigi, kai sukutis apsivers ir vėl atsistos ant kojelės, jis suksis prieš laikrodžio rodyklę.

Taip tardamas, jis stipriai paleido savo sukutį. Po akimirkos šis apsivertė. Visų nuostabai, sukutis toliau sukosi laikrodžio rodyklės kryptimi (102 pav.). Skaitytojas, nusipirkęs žaislų parduotuvėje tokį sukutį, galės tuo pats įsitikinti.

Po banketo ir vakarinio spektaklio suvažiavimo dalyviai išsiskirstė po kambarius, norėdami pasikeisti paskutinėmis naujienomis, profesinėmis paslaptimis ir apskritai pakalbėti apie savo meną. Aš sunkiai suradau kambarį, kuriame susirinko „matemagai“. Jų fokusai pagrįsti ne tiek rankų miklumu, kiek vienokiais ar kitokiais matematiniais principais. Įėjau kaip tik tuo momentu, kai mano senas draugas Melas Stouveris iš Vinipego aiš-

---

* Apie elementarią apsiverčiančio sukučio teoriją galima pasiskaityti žurnale «Наука и жизнь», 1969, Nr. 7. — *Red. past.*



102 pav. Apsiverčiantis sukutis

kino, kaip pagal dvejetainę skaičiavimo sistemą galima atspėti iš anksto pasirinktą kortą.

Daugelyje kortų fokusų pasirinkta korta atspėjama taip. Žiūrovui įteikiama kortų kaladė ir paprašoma, kad viršutinę kortą jis perkeltų į kaladės apačią. Paskui nuimama kita korta ir apverčiama ant stalo. Eilinė viršutinė korta vėl padedama kaladės apačion, po jos sekanti — vėl apverčiama ant stalo, ir t. t. tol, kol žiūrovo rankose lieka vienintelė korta. Tai pasirinktoji korta. Kokioje pradinės kaladės vietoje turi būti pasirinktoji korta, kad galiausiai ji būtų paskutinė, likusi žiūrovo rankose? Pasirinktos kortos padėtis kaladėje, aišku, priklauso nuo kaladės storio, ir jos vietą galima rasti atrankos keliu. Tačiau didelėms kaladėms toks eksperimentinis metodas be galo nepatogus. Laimei, kaip paaiškino Stouveris, remiantis dvejetaine skaičiavimo sistema galima be vargo duoti atsakymą, kur turi būti pasirinktoji korta.

Daroma taip. Kaladės kortų skaičių parašysime dvejetainėje sistemoje ir aukštesniojo skyriaus vienetą perkelsime į skaičiaus galą. Skaičius, gaunamas, atlikus tokią operaciją, sutampa su numeriu tos vietos, kurioje turi būti pasirinkta korta, pradedant skaičiuoti iš eilės nuo viršutiniosios kortos kaladėje. Sakykim, pavyzdžiui, kad fokusininkas paėmė pilną 52 kortų kaladę. Dvejetainėje sistęmoje skaičius 52 užrašomas 110 100. Aukštesnio skyriaus vienetą perkelsim į galą: 101 001. Dešimtainėje sistemoje šis skaičius lygus 41, vadinasi, pasirinkta korta turi būti keturiasdešimt pirmąja, skaičiuojant nuo viršaus.

Kiek kortų turi būti kaladėje, jeigu norime, kad paskutinioji liktų viršutinė korta? Kadangi kortos numeris dvejetainėje sistemoje yra 1, kortų skaičius kaladėje gali būti išreiškiamas dvejetainiais skaičiais 10, 100, 1 000, 10 000,... (arba dešimtainėje sistemoje 2, 4, 8, 16,....). Jei-

gu reikia, kad žiūrovo rankose liktų apatinioji korta, kaladėje turi būti 11, 111, 1 111, 11 111,... kortų (kortų skaičius parašytas dvejetainėje sistemoje), arba, išreiškus labiau įprastais dešimtainiais skaičiais, 3, 7, 15, 31,... kortų.

Ar gali likti antroji korta nuo viršaus? Ne. Be to, paskutinioji korta niekada negali būti lyginėje vietoje (skaičiuojant nuo viršaus): kortos eilės numeris, išreikštas dvejetainėje sistemoje, turi būtinai baigtis vienetu (nes skaičiaus vyriausias skaitmuo, kaip žinoma, lygus 1, buvo perkeltas į galą), o visi dvejetainiai skaičiai, kurie baigiasi skaitmeniu 1, yra nelyginiai.

Po to žodžio paprašė Viktoras Aigenas, apie kurį jau pasakojome pirmojoje knygoje. Jis parodė nepaprastą fokusą, susijusį su informacijos kodavimu.

— Aš noriu iš anksto paaiškinti, ką ketinu padaryti, — pareiškė jis. — Kiekvienas čia esančių gali sumaišyti savąją kortų kaladę ir iš jos išsirinkti bet kurias penkias kortas. Iš penkių išrinktųjų kortų vieną jis turi pasilikti sau. Kitas keturias kortas aš galiu perdėlioti kaip noriu. Paėmęs iš bet kurio jūsų tas keturias kortas, jas sudėsiu atvirkščiąja puse į viršų ir grąžinsiu savininkui, kad jis nuneštų šias kortas į mano kambarį. Kambaryje yra mano žmona, kuri man asistuos. Jūs triskart pasibelsite į kambario duris ir pakišite atneštas kortas po durimis, kaip ir anksčiau laikydami atvirkščiąja puse į viršų. Nei jūs, nei žmona netarsite nė žodžio. Peržiūrėjusi perduotą plonytę kaladę, žmona nurodys atrinktąją kortą.

Aš paprašiau, kad fokusą tikrintų su manimi. Griežtai laikydamasis Aigeno instrukcijos, iš savo kaladės atrinkau penkias kortas ir iš jų išėmiau lapų šešiakę. Aigenas net neprisilietė kortų: nenorėjo, kad jį įtartų, nepastebimai pažymint kortas ir taip perduodant žmonai papildomą informaciją. Atvirkščiosios pusės piešinio viršus ir apačia nežymiai skiriasi, todėl, varijuojant keturių kortų viršų ir apačią, iš principo būtų galima perduoti gana daug informacijos. Jeigu kortos būtų įdedamos į voką, perduodamos informacijos dar padaugėtų, nes būtų galima vienas kortas įdėti priekine puse į viršų, kitas — atvirkščiąja puse į viršų, voką užklijuoti arba palikti jį neužklijuotą ir t. t. Net ir tai, ar kortos sudėtos į voką ar perduotos be jo, galėtų nurodyti likusią kortą. Jeigu Aigenas turėtų teisę pasirinkti asistentą, perduodantį kortas žmonai, tas pasirinkimas galėtų būti kodu: Aigenas

galėtų pasirinkti blondinus arba brunetus, vedusius ir viengungius, asmenis, kurių pavardė prasideda raide, priklausančia pirmajai arba antrajai abėcėlės pusei, ir t. t. Jo žmona sektų tuos, kurie atrenka kortas. Tačiau Aigenas iš anksto nurodė visus savo veiksmus ir visiškai nepalietė mano kortų; vadinasi, taip manyti nebuvo pagrindo.

Likusias keturias kortas sudėjau Aigeno nurodyta tvarka ir, sužinojęs jo kambario numerį, jau ruošiausi ten: norėjau pakišti kortas po durimis. Staiga pakilo Melas Stouveris.

— Prašom luktelėti, — tarė jis. — Iš kur mes žinome, kad Aigenas neperduos reikiamos informacijos, pritaikęs laiko momentą, kai pasibelsite į jo kambarį? Apsimesdamas, kad aiškina, Aigenas iš tikrųjų galėjo vilkinti šią akimirką tol, kol ateis tam tikras laiko intervalas, iš anksto jo ir žmonos sutartas. Šis intervalas ir gali būti dalis kodo.

Aigenas palingavo galvą:

— Jokio laiko kodo nėra. Jeigu norite, galite palaukti. Tegul pats Gardneris pasirenka, kada išeiti iš kambario.

Palaukėme apie penkiolika minučių, susižavėję stebėdami puikius Edo Marlo kortų fokusus. Po to aš nuėjau į Aigeno kambarį, tris kartus pasibeldžiau ir, laikydamas kortas atvirkščiąja puse į viršų, pakišau jas po durimis.

Pasigirdo žingsniai, ir keturios kortos dingo iš akių. Po akimirkos išgirdau misis Aigen balsą.

— Jūs sau pasilikote lapų šešiakę.

Kaip Aigenas sugebėjo perduoti šią informaciją savo žmonai?

ATSAKYMAI

Aš taip ir negalėjau išsiaiškinti fokuso su krintančiais žiedais arba bent apytikriai nustatyti jo išradimo datos. Kartais grandinė daroma iš dviejų skirtingų žiedų. Paleidę vienos spalvos žiedą (pavyzdžiui, raudoną), pamatysite, kaip jis greitai „nukris" žemyn ir užsikabins už apatinės grandinės grandies. Jeigu fokusininkas prieš bandymo pradžią vienoje rankoje turės suspaudęs vienos spalvos žiedą, o kitoje — kitos (abu žiedai tarp savęs ir

su grandine nesujungti), jis galės apsimesti, lyg „pagauna" krintantį žiedą ir „nuima" jį nuo grandinėlės.

Vienas mūsų skaitytojų rado patogų būdą grandinėlei padaryti. Pradedama nuo žiedų, sujungtų paprastu būdu ir sudarančių grandinėlę 1—2—1—1. Paskui apatinis žiedas jungiamas su priešpaskutiniuoju žiedu (100 pav.), ir gaunama grandinėlė 1—2—2. Prie jos prijungiami dar du žiedai, gaunama grandinėlė 1—2—2—1—1, po to apatinis žiedas jungiamas su priešpaskutiniuoju taip, kaip parodyta 100 paveiksle, ir vėl pakabinami du žiedai 1—1. Šią procedūrą galima kartoti tiek kartų, kiek reikia.

Dvejetainis metodas pasirinktos kortos numeriui *n* kortų kaladėje nustatyti (pasirinktoji korta turi likti paskutinė rodančio fokusą rankose, jeigu jis pakaitomis dės po vieną kortą ant stalo ir po vieną kortą po kaladės apačia), buvo išspausdintas 1950 metais. * Ekvivalentų būdą kortos numeriui apskaičiuoti fokusininkai žinojo žymiai anksčiau; reikia tiesiog iš *n* (kortų skaičius kaladėje) atimti aukščiausią dvejeto laipsnį, neviršijantį *n*, ir rezultatą padvigubinti. Jeigu pirmoji korta dedama ant stalo, gautasis skaičius sutampa su pasirinktos kortos numeriu. O jeigu pirmoji korta pakišama po kalade, prie gautojo skaičiaus būtina dar pridėti 1. (Kai pats skaičius *n* yra 2 laipsnis, pasirinktoji korta turi būti viršutinė korta kaladėje tais atvejais, kai pirmoji korta pakišama po kalade, ir apatinė — kai pirmoji korta dedama ant stalo.)

Paprašykite ką nors stropiai sumaišyti kortas ir perduoti jums visą kaladę. Laikydami kortas vėduokle paveikslėliais į save, pareiškiate, kad galite iš anksto atspėti, kokia korta liks žiūrovo rankose. Įsidėmėkite viršutinę kaladės kortą ir, užsirašę jos pavadinimą popieriaus lapelyje, atidėkite jį į šalį, žiūrėdami, kad niekas negalėtų pamatyti, kokią kortą jūs numatėte. Sakykim, kad viršutinė korta buvo čirvų dviakė.

Paimkite kaladę į kairiąją ranką paveikslėliais žemyn. Paprašykite žiūrovą nurodyti bet kurį skaičių nuo 1 iki 52. Kad fokusas būtų įdomesnis, pravartu turėti skaičių, didesnį už 10. Sakykim, žiūrovas nurodė 23. Iš nurodyto skaičiaus mintinai atimkite aukščiausią dvejeto laipsnį, neviršijantį jo (mūsų atveju $23-16=7$), ir skirtumą padvigubinkite ($7\times2=14$). Dabar jums reikia, kad čirvų

* *American Mathematical Mouthly*. August — September 1950.

dviakė 23 kortų kaladėje atsidurtų keturioliktoje vietoje iš viršaus. Daroma taip. Pradėkite atskaičiuoti kortas po vieną iš viršaus, nustumdami jas dešiniosios rankos nykščiu. Atskaičiuotas kortas rinkite į dešinę ranką. Kortos krinta viena ant kitos, todėl jų eilė pasikeičia priešinga. Atskaičiavę 14 kortų, sustokite ir, apsimesdami, kad pamiršote, paklauskite žiūrovą:

— Kokį skaičių jūs nurodėte?

Kai jis pasakys: „Dvidešimt tris", — linktelėkite galvą ir toliau skaičiuokite, tačiau šį kartą kortas reikia nustumti į dešinę kairiosios rankos nykščiu taip, kad jos nuslystų po tuo kortų pluoštu, kurį jau laikote dešiniojoje rankoje. Kai atskaičiuosite 23 kortas, čirvų dviakė atsidurs tiksliai keturiolikta iš viršaus. Jūsų pauzė ir klausimas skaičiavimą suskirsto į du etapus, bet vargu ar kuris nors žiūrovas pastebės, kad jūs skirtingai atidedate atskaičiuotas kortas prieš klausimą ir po jo. Įteikite 23 kortų kaladę žiūrovui ir paprašykite, kad jis pirmą nuo viršaus kortą padėtų ant stalo, antrą pakištų po 22 kortų kalade, likusia jo rankose, trečią vėl padėtų ant stalo ir t. t. tol, kol jo rankose liks viena korta. Kažin ar reikia sakyti, kad tai bus kaip tik ta korta, kurią jūs numatėte.

Panašiai pagrįstas ir kitas fokusas. Pateiksiu šiek tiek suprastintą jo variantą. Iš kaladės atrinkite 4, 8, 16 arba 32 kortas. Tarkime, kad paėmėte 16 kortų. Pasisukite į žiūrovus nugara ir paprašykite kurį nors, kad paimtų iš kaladės nedidelį pluoštą kortų (jų turi būti mažiau negu 16), laikytų jį rankose ir nepasakytų jums, kiek kortų jis paėmė. Tarkime, žiūrovas turi n kortų. Išskleidę vėduokle 16 kortų paveiksliukais į žiūrovą, paprašykite jį įsidėmėti n-tąją kortą iš viršaus (suprantama, nepasakant jums nei numerio n, nei kortos pavadinimo). Suglauskite savo kortas į pluoštą ir virš jo padėkite tą pluoštą, kurį atrinko žiūrovas. Jo įsidėmėta korta automatiškai atsidurs kaladėje iš $16+n$ kortų $2n$-oje vietoje, skaičiuojant iš viršaus. Vadinasi, jeigu jūs iš eilės po vieną kortą klosite ant stalo ir pakišite po bendrąja kalade, paskutinioji korta jūsų rankose bus ta, kurią įsidėmėjo žiūrovas.

Kitas fokusas rodomas taip. Žiūrovas sumaišo kaladę iš 2^n kortų (pavyzdžiui, iš 32 kortų). Paskui jis paprašomas pasirinkti bet kokį skaičių nuo 1 iki 15 ir paslėpti kišenėje tokį kortų skaičių, kokį pasirinko. Fokusininkas tuo metu stovi nugara į žiūrovą. Po to fokusininkas atsigrę-

žia, ima likusias kortas ir deda jas ant stalo atvirkščiąja puse į viršų, parodydamas žiūrovui kiekvieną kortą. Žiūrovas įsidėmi kortą, kurios numeris sutampa su pasirinktuoju skaičiumi. Paskui, kai visos kortos padėtos ant stalo (dedant jų eilė, suprantama, pasikeitė priešinga), visa kaladė įteikiama antrajam žiūrovui, kuris turi atlikti jau žinomą procedūrą: vieną viršutinę kortą deda ant stalo, kitą pakiša po kaladės apačia. Likusi jo rankose paskutinioji korta ir bus ta, kurią įsidėmėjo pirmasis žiūrovas.

Tą patį fokusą galima parodyti kitaip. Žiūrovas sumaišo kaladę iš $2n$ kortų ir išdėsto jas ant stalo į dvi krūveles. Kortų skaičius abiejose krūvelėse turi būti vienodas, o likusių rankose — bet koks. Žiūrovas gali paimti bet kurią krūvelę arba pasilikti sau tas kortas, kurias laiko rankoje. Jeigu jis pasirenka vieną kurią nors krūvelę, turi įsidėmėti viršutinę kortą, paskui padėti visą krūvelę ant tų kortų, kurias laiko rankoje. Pirmąją „išplėstos" kaladės kortą jis pakiša į apačią, antrą deda ant stalo, trečią vėl pakiša po kalade ir t. t. Paskutinioji korta jo rankose bus jo įsidėmėtoji korta. Pasirinkęs tą kortų kaladę, kurią laiko rankose, turi įsidėmėti apatinę kortą. Pakišęs apačion bet kurią krūvelę ir atlikęs įprastą procedūrą (viršutinę kortą — ant stalo, sekančią po kalade ir t. t.), jis pamatys, kad paskutinioji korta jo rankose sutampa su pasirinktąja.

Problema, kaip surasti kortos vietą šio tipo fokusuose, yra dalinis atvejis bendresnio uždavinio, kuris įdomiosios matematikos mėgėjams žinomas Džozefuso problemos vardu. Džozefuso problema formuluojama taip. Žmonių grupė išrikiuota ratu. Visi jie, išskyrus vieną, turi būti nubausti mirtimi. Budelis pradeda skaičiuoti ratu ir bausti kiekvieną n-tąjį žmogų tol, kol lieka tik vienas žmogus. Jis paleidžiamas laisvėn. Kur turi atsistoti žmogus, norėdamas išvengti bausmės? Kai $n=2$, turime kortų situaciją. Džozefuso problemos istorija ir kai kurie jos apibendrinimai pateikti V. V. Rouzo-Bolo knygoje.*

Kadangi nė viena korta, iš pakištų po durimis, negali būti atrinktoji, fokusininkui būtina užkoduoti tik vienos iš 48 kortų pavadinimą. Fokusininkas ir jo asistentas iš anksto susitaria, kokia eile turi eiti visos 52 kortos, ir koks skaičius atitiks kiekvieną kortą. Asistentui perduotos

* W. W. Rouse-Ball. Mathematical Recreaction and Essays, N. Y., 1960.

keturios kortos turi užšifruotą pranešimą: keturis skaičius, kuriuos pažymėsime A, B, C ir D. Kėliniai iš 4 kortų sudaro lygiai 24 kombinacijas, tai yra lygiai pusę skaičiaus 48. Keturiasdešimt aštuonias kortas (kurių viena turi būti užšifruota) fokusininkas mintyse laiko išdėstytas iš eilės pagal numerius ir dalija pusiau: vieną pusę sudaro 24 „žemesnės" kortos, kita — 24 „aukštesnės". Sakykim, kad atrinkta septynioliktoji korta iš „žemesniosios" grupės. Skaičių 17 galima pranešti asistentui, parenkant atitinkamą keturių kortų derinį, tačiau vieno papildomo signalo reikia dar tam, kad būtų patikslinta, iš kokios pusės — „žemesniosios" ar „aukštesniosios" — paimta septynioliktoji korta.

Taigi uždavinys suvedamas į tai, kaip perduoti vieną „taip — ne" tipo signalą. Kortų perstatymu nieko nepasieksime: iš viso 24 kombinacijos, ir jos visos „užimtos", perduodant kortos numerį. Pagal fokuso atlikimo sąlygas visi nurodymo būdai, pažymint kortas, asmens, perduodančio asistentui kortas, parinkimas, voko, kortų perdavimo laikas ir t. t., atpuola.

Tačiau viena išeitis vis tik lieka: viešbučio kambarys, kuriame yra misis Aigen. Aigenų šeima išsinuomojo numerį, kuriame du kambariai buvo greta. Viktoras Aigenas kambario durų numerį pasako tik tada, kai korta atrinkta. Likusias keturias kortas jis išdėsto tokia seka, kad atitinkamas perstatymas parodytų kortos numerį. O pusės — „aukštesniosios" ar „žemesniosios" — parinkimas vienareikšmiškai nustatomas kambario numerio parinkimu. Išgirdusi beldimą į duris, misis Aigen pereina į reikiamą kambarį; paėmusi kortas, ji sužino, kokia korta buvo atrinkta.

XIX skyrius

Dalumo požymiai

Dolerio vertės banknoto, kurį ką tik išsiėmiau iš piniginės, numeris 61671142. Kiekvienas mokinukas iš karto pasakys, kad šis skaičius dalijasi iš 2, bet nesidalija iš 5. Ar jis dalijasi iš 3? Iš 4? Iš 11? (Kalbėdami apie tai, kad

skaičius „dalijasi“, turime galvoje, kad jis dalijasi be liekanos.) Mažai kas žino (net ir matematikai) paprastas taisykles, kuriomis remiantis, galima greitai patikrinti didelių skaičių dalumą iš skaičių nuo 2 iki 12. Beje, šios taisyklės buvo plačiai žinomos Renesanso laikais, nes, remiantis jomis, buvo galima trupmenas su dideliais skaitikliais ir vardikliais suprastinti iki nesuprastinamų. Jas žinoti naudinga ir mūsų dienomis. Tiems, kas domisi skaitmenų galvosūkiais, pravartu žinoti tokius dalumo požymius.

D a l u m o i š 2 p o ž y m i s. Skaičius iš 2 dalijasi tada ir tik tada, kai paskutinis jo skaitmuo lyginis.

D a l u m o i š 3 p o ž y m i s. Apskaičiuokite jus dominančio skaičiaus skaitmenų sumą. Jeigu ta suma išreikšta didesniu, negu vienaženklis, skaičiumi, raskite jos skaitmenų sumą, ir t. t. Taip padarykite tol, kol gausite vienaženklį skaičių, kurį pavadinsime duotojo skaičiaus skaitmenine šaknimi. Jeigu skaitmeninė šaknis dalijasi iš 3, pradinis skaičius dalijasi iš 3, o jeigu skaitmeninė šaknis iš 3 nesidalija, reikia pasirinkti didžiausią iš skaičių 0,3 ir 6, neviršijančio skaitmeninės šaknies. Apskaičiavę skaitmeninės šaknies ir parinktojo skaičiaus skirtumą, sužinome, kokią gausime liekaną, pradinį skaičių dalydami iš 3. Pavyzdžiui, dolerio banknoto numerio skaitmeninė šaknis 1. Vadinasi, liekana, gauta, dalijant numerį iš 3, lygi 1.

D a l u m o i š 4 p o ž y m i s. Skaičius dalijasi iš 4 tada ir tik tada, kai du paskutinieji jo skaitmenys sudaro dviženklį skaičių, kuris dalijasi iš 4. (Tai nesunku suprasti, prisiminus, jog 100 ir jo kartotiniai skaičiai dalijasi iš 4.) Dolerio banknoto numeris baigiasi skaitmenimis 42. Šis skaičius dalijasi iš 4 su liekana 2, todėl ir dolerio numeris dalijasi iš 4 su liekana 2.

D a l u m o i š 5 p o ž y m i s. Skaičius dalijasi iš 5 tada ir tik tada, jeigu jis baigiasi 0 arba 5. Kai skaičius nesidalija iš 5, jo paskutinis skaitmuo arba mažesnis (bet didesnis už 0), arba didesnis už 5. Pirmuoju atveju dalybos iš 5 liekana lygi paskutiniam skaitmeniui, antruoju — paskutinio skaitmens ir 5 skirtumui.

D a l u m o i š 6 p o ž y m i s. Reikia patikrinti mus dominančio skaičiaus dalumą iš 2 ir 3 (tai yra dalumą iš 6

daliklių). Skaičius dalijasi iš 6 tada ir tik tada, jeigu jis lyginis, o skaitmeninė šaknis dalijasi iš 3.

Dalumo iš 8 požymis. Skaičius dalijasi iš 8 tada ir tik tada, kai paskutiniai trys skaitmenys sudaro skaičių, kuris dalijasi iš 8. (Tai išplaukia iš to, kad visi skaičiai, kurie yra 1000 kartotiniai, dalijasi iš 8.) Priešingu atveju liekana, gauta, dalijant paskutinių trijų skaitmenų sudarytą skaičių iš 8, sutampa su pradinio skaičiaus dalijimo iš 8 liekana. (Analogiška taisyklė galioja bet kokiam dvejeto laipsniui 2^n; skaičius dalijasi iš 2^n tada ir tik tada, jeigu skaičius, sudarytas iš jo paskutiniųjų *n* skaitmenų, dalijasi iš 2^n.)

Dalumo iš 9 požymis. Skaičius dalijasi iš 9 tada ir tik tada, jeigu jo skaitmeninė šaknis lygi 9. Priešingu atveju skaitmeninė šaknis sutampa su liekana, kuri bus gauta, dalijant pradinį skaičių iš 9. Dolerio banknoto numerio skaitmeninė šaknis lygi 1, vadinasi, liekana, gauta, dalijant numerį iš 9, lygi 1.

Dalumo iš 10 požymis. Skaičius dalijasi iš 10 tada ir tik tada, jeigu jis baigiasi 0. Priešingu atveju paskutinis skaitmuo duoda dalybos iš 10 liekaną.

Dalumo iš 11 požymis. Iš dešinės į kairę pakaitomis rašykime pasirinkto skaičiaus skaitmenims pliuso ir minuso ženklus (paskutinis skaitmuo rašomas su pliuso ženklu, priešpaskutinis — su minuso ir t. t.) ir apskaičiuokime visų skaitmenų sumą (kiekvieną skaitmenį reikia imti su jo ženklu). Pradinis skaičius dalijasi iš 11 tada ir tik tada, jeigu gautoji suma dalijasi iš 11 (0 laikomas daliu 11). Dolerio banknoto numeriui $2-4+1-1+7-6+$ $+1-6=6$. Kadangi gautoji suma nesidalija iš 11, pradinis skaičius — numeris — nesidalija iš 11. Norėdami rasti skaičiaus dalybos iš 11 liekaną, išnagrinėsime tą pačią jo skaitmenų, paimtų su besikeičiančiais ženklais, sumą. Jeigu ta suma mažesnė už 11 ir teigiama, ji sutampa su liekana. Tačiau kai ji didesnė už 11, iš jos nesunku gauti skaičių, mažesnį už 11, padalijus jį iš 11 ir paėmus liekaną. Kai liekana teigiama, ji sutampa su pradinio skaičiaus dalybos iš 11 liekana, o kai neigiama, prie jos reikia pridėti 11. (Pavyzdyje su banknoto numeriu $-6+11=$ $=5$. Tai reiškia, kad, dalydami numerį iš 11, gausime liekanos 5).

Dalumo iš 12 požymis. Patikrinkite mus dominančio skaičiaus dalumą iš 3 ir 4 — 12 daliklių. Skaičius dalijasi iš 12 tada ir tik tada, jeigu jis dalijasi iš 3, ir iš 4.

Skaitytojas jau, aišku, pastebėjo vieną aukščiau pateiktojo dalumo požymių sąrašo ypatybę — jame nėra dalumo iš 7 — viduramžių numeralogijos stebuklingo skaičiaus — požymio. Septyniukė — vienintelis skaičius, kuriam iki šiol nepasisekė rasti paprasto dalumo požymio. Tokia nepaprasta septyniukės savybė jau seniai domina tuos, kurie nagrinėja skaičių teoriją. Buvo pasiūlyta daugybė gana įdomių ir iš pirmo žvilgsnio tarpusavyje nieko bendra neturinčių dalumo iš 7 požymių. Bet gaila, kad daugumai iš jų laiko sugaištama ne mažiau, negu paprastai („garbingai") dalijant iš 7.

Vienas seniausių dalumo iš 7 požymių yra toks. Skaičiaus skaitmenis priešinga tvarka reikia dauginti iš dešinės į kairę: pirmąjį skaitmenį dauginti iš 1, antrąjį — iš 3, trečiąjį — iš 2, ketvirtąjį — iš 6, penktąjį — iš 4, šeštąjį — iš 5 ir t. t. (jei skaičius turi daugiau kaip 6 skaitmenis, daugiklių seką 1, 3, 2, 6, 4, 5 reikia vis pakartoti). Gautosios sandaugos sudedamos. Pradinis skaičius dalijasi iš 7 tada ir tik tada, kai gautoji suma dalijasi iš 7. Jeigu ši suma nesidalija iš 7, jos ir artimiausio septynių kartotinio skirtumas yra pradinio skaičiaus dalijimo iš 7 liekana.

Štai, pavyzdžiui, kaip šį požymį pritaikysime dolerio banknoto numeriui:

$$
\begin{array}{r}
2\times1=12\\
4\times3=12\\
1\times2=2\\
1\times6=6\\
7\times4=28\\
6\times5=30\\
1\times1=1\\
6\times3=18\\
\hline
99
\end{array}
$$

Dalydami 99 iš 7, liekanos gauname 1. Vadinasi, padalije dolerio numerį iš 7, liekanos gausime taip pat 1. Procedūrą galima pagreitinti, „išbraukiant septyniukes" iš gautų sandaugų: vietoje 12 rašant 5, vietoje 28—0 ir t. t.

Sandaugų suma, „išbraukus septyniukes", bus ne 99, o 22. Iš esmės minėtas dalumo iš 7 požymis yra ne kas kita, kaip skaičių, kurie yra 7 kartotiniai, išbraukimo iš pradinio skaičiaus metodas. Jis paremtas tuo, kad nuoseklūs skaičiaus 10 laipsnių lyginiai moduliu 7 yra skaičiai 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3,..., sudarantys pasikartojančią seką. (Lyginiais moduliu *k* vadinami skaičiai, kurie, dalijami iš *k*, duoda tą pačią liekaną.) Vietoje skaičių 6, 4, 5 galima imti jų lyginius (7 moduliu) — 1, — 3, — 2. Tie, kuriems įdomu, išsamų paaiškinimą ras F. Kuranto ir H. Robinso knygos „Kas tai yra matematika"? * skyriuje apie lyginius. Kadangi pagrindinė idėja jau aiški, nesunku sudaryti analogiškus dalumo požymius ir bet kokiems kitiems skaičiams (Blezas Paskalis tai suprato dar 1654 metais). Pavyzdžiui, norint išvesti dalumo iš 13 požymį, pakanka tik atkreipti dėmesį į tai, kad nuoseklūs 10 laipsniai yra periodinės eilutės, 1,—3, —4, —1, 3, 4,... lyginiai moduliu 13. Norėdami patikrinti, ar mus dominantis skaičius dalijasi iš 13, su skaitmenimis atlikime tuos pačius veiksmus (prieš tai padauginę iš 1, —3, —4, —1, 3, 4,...), kaip ir tikrindami dalumą iš 7.

Kyla klausimas: iš ko reikia dauginti skaičiaus skaitmenis, tikrinant dalumą iš 3, 9 ir 11? Skaičiaus 10 laipsniai yra (moduliu 3 ir moduliu 9) skaičių 1, 1, 1,... lyginiai, todėl mes tučtuojau gauname žinomus dalumo iš 3 ir 9 požymius. Paėmus modulį 11, skaičiaus 10 laipsniai pasirodys esą lyginiai eilutės $-1, +1, -1, +1, \ldots$, kuri taip pat duoda mums jau žinomą dalumo iš 11 požymį. Suradęs koeficientų seką kitiems dalikliams, skaitytojas įsitikins, kad kiekviena gautoji eilutė yra arba susijusi su jau žinomu dalumo požymiu, arba atskleidžia (pavyzdžiui, 6 ir 12) naujus požymius.

Maždaug nuo praėjusio amžiaus vidurio žinomas kitas gana keistokas dalumo iš 7 požymis. Išbraukime mūsų pasirinkto skaičiaus paskutinį skaitmenį, ir, padvigubinę jį, atimkime iš to, kas liko. Šią procedūrą kartokime tol, kol gausime vienaženklį skaičių. Pradinis skaičius dalijasi iš 7 tada ir tik tada, jeigu gautasis vienaženklis skai-

---

* Р. Курант, Г. Роббинс. Что такое математика? Изд. 2-е, М., изд-во «Просвещение», 1967.

čius dalijasi iš 7. Taikydami šį požymį dolerio banknoto numeriui, spręsime taip:

```
61671142
       4
--------
6167110
      0
-------
616711
     2
------
61669
   18
-----
6148
  16
----
598
 16
---
43
 6
--
-2
```

Pastarasis skaičius nesidalija iš 7, vadinasi, pradinis skaičius taip pat nesidalija iš 7. Šio požymio trūkumas tas, kad pagal jį negalima taip pat paprastai rasti dalybos iš 7 liekanos.

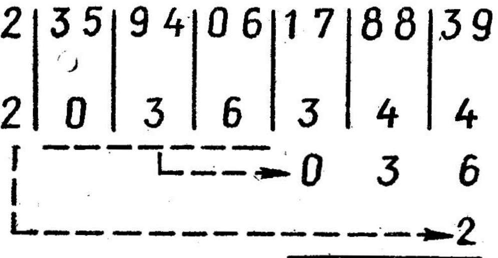
Dalumo iš 7 požymį, ypač tinkamą didelių skaičių dalumui tikrinti, pasiūlė V. Lionsas. Operacijų seka parodyta 103 paveiksle 13-ženkliu skaičiumi. Taikant šį metodą šešiaženkliams skaičiams, labai greitai galima rasti atsakymą: tik reikia rasti tris skaičius, paskui du, ir, pagaliau, vieną skaičių. Tai bus atsakymas!

Taikydamas šį metodą, Lionsas atskleidė daugybę puikiausių fokusų su šešiaženkliais skaičiais. Fokusai analogiški tiems, kurie demonstruojami estradose. Štai vienas Lionso fokusų.

Pasiūlykite kam nors parašyti lentoje bet kokį šešiaženklį skaičių, kuris *nesidalija* iš 7. Tarkime, jog parašytas skaičius 431 576. Jūs sakote, kad greitai galite rasti šešis naujus skaičius, kurių kiekvienas dalijasi iš 7 ir nuo 431 576 skiriasi tik vienu skaitmeniu.

Tuo tikslu jūs, visų pirma, perrašote skaičių šešis kartus iš eilės, išdėstydami skaitmenis kvadratinės lentelės langeliuose. Paskutinį pirmos eilutės langelį, priešpaskutinį — antros ir t. t. paliekate tuščią (kad būtų patogiau aiškinti, 104 paveiksle tie langeliai pažymėti raidėmis nuo A ir E; rodant fokusą, jie lieka tušti). Patikrinę skaičiaus dalumą iš 7 Lionso metodu, nustatote, kad dalybos iš 7 liekana lygi 5. Vadinasi, tam, kad viršutinis skaičius

103 pav. Dalumo iš 7 požymis (Lionso požymis)



1. Iš dešinės į kairę suskirstykite skaitmenis poromis.
2. Po kiekviena pora parašykite jos ir artimiausio 7 kartotinio (neviršijančio tos poros) skirtumą.
3. Gautuosius skirtumus sugrupuokite po 3 iš dešinės į kairę. Sudėkite atskirai skaičius, esančius pirmojoje kiekvienos grupės skiltyje, atskirai — antrojoje, ir atskirai — trečiojoje.
4. Kiekvieną gautą sumą pakeiskite dalybos iš 7 liekana.
5. Nubrėžkite vertikalę. Jai iš kairės parašykite pirmųjų dviejų skaitmenų sudaryto skaičiaus dalybos iš 7 liekaną, iš dešinės — paskutinių dviejų skaitmenų sudaryto skaičiaus dalybos iš 7 liekaną.
6. Atimkite kairįjį skaičių iš dešiniojo. (Jei dešinysis skaičius mažesnis už kairįjį, prieš tai prie jo pridėkite 7.) Gautasis skirtumas yra dalybos iš 7 liekana. Taigi pradinis skaičius dalijasi iš 7 tada ir tik tada, jei šis skirtumas yra lygus nuliui.

4	3	1	5	7	A
4	3	1	5	B	6
4	3	1	C	7	6
4	3	D	5	7	6
4	E	1	5	7	6
F	3	1	5	7	6

4	3	1	5	7	1
4	3	1	5	3	6
4	3	1	6	7	6
4	3	6	5	7	6
4	7	1	5	7	6
3	3	1	5	7	6

104 pav. Skaičiavimo fokusas, pagrįstas Lionso požymiu

dalytųsi iš 7, langelyje A turi būti skaitmuo 1 (vietoje iš pradžių buvusio skaitmens 6).

Dabar jau nesunku greitai užpildyti kitus langelius nuo B iki E. Skaičius, kurį sudaro du paskutinieji antrosios eilutės skaitmenys, turi B6 pavidalą. Virš jo yra skaičius 71, kuris iš 7 dalijasi su liekana 1 (priminsime, jog skaičius, stovintis pirmoje eilutėje, jau dalijasi iš 7). Vadinasi, langelyje B turi būti įrašytas toks skaitmuo, kad, skaičių B6 dalijant iš 7, būtų liekana 1. Įrašę į langelį B skaitmenį 3, gausite norimą rezultatą. (Nustatyti, kad ieškomas skaitmuo 3, labai paprasta. Pakanka mintinai atimti 1 iš 6 ir prisiminti, koks dviženklis skaičius, kuris baigiasi 5, dalijasi iš 7. Atsakymas: tik 35.) Skaitmuo, kurį reikia įrašyti į langelį C, randamas analogiškai. Virš skaičiaus C7 yra 53, kurį dalijant iš 7, gaunama liekana 4. Kad skaičius C7, dalijamas iš 7, duotų liekaną 4, langelyje C reikia įrašyti skaitmenį 6. Taip užpildomi ir kiti langeliai. Galutinis rezultatas pavaizduotas 104 paveikslo dešinėje: kiekvienos eilutės šešiaženklis skaičius dalijasi iš 7. Matematikui, puikiai suprantančiam, kaip sunku patikrinti skaičiaus dalumą iš 7, šis fokusas atrodo ypatingai nuostabus. Analogiškas fokusas 6 skaičiams, kurie dalytųsi iš 9, rasti būtų trivialus.

Dalumo požymiai neretai padeda rasti puikius skaitmenų uždavinių sprendimus, kurie be jų būtų ypatingai sunkūs. Išnagrinėsime, pavyzdžiui, tokį uždavinį. Paim-

kime devynias korteles, sunumeruotas nuo 1 iki 9, ir rūpestingai jas sumaišykime. Kokia tikimybė, kad devyniaženklis skaičius, sudarytas iš skaitmenų, nurodytų atsitiktinai išdėstytose kortelėse, dalijasi iš 9? Kadangi skaičių nuo 1 iki 9 suma lygi 45, o skaičius 45 dalijasi iš 9, jūs iš karto suvokiate, kad ieškomoji tikimybė lygi 1 (būtinas įvykis). Dabar paimsime keturias korteles su skaitmenimis nuo 1 iki 4. Kokia tikimybė, kad keturženklis skaičius, sudarytas iš skaitmenų, nurodytų atsitiktinai išdėstytose kortelėse, dalysis iš 3? Žinodami dalumo iš 3 požymį, iš karto galite pasakyti, kad ta tikimybė lygi 0 (negalimas įvykis).

Nuostabus fokusas gali būti pademonstruotas taip. Įduokite kam nors devynias korteles su numeriais nuo 1 iki 9. Nusisukę paprašykite permaišyti korteles su numeriais nuo 1 iki 4 ir sudėlioti iš jų keturženklį skaičių. Neatsigręždami galite pasakyti, kad gautasis skaičius nesidalija iš trijų. Paskui pasiūlykite prie tų keturių pridėti penktąją kortelę (su numeriu 5), ir, sumaišius jas, sudėlioti penkiaženklį skaičių. Kaip pirma neatsigręždami, galite tvirtinti, jog šį kartą skaičius dalijasi iš 3.

Prieš pasižiūrėdamas į atsakymus, skaitytojas gali pasitikrinti savo sugebėjimus, spręsdamas tokius dalumo požymių turinčius skaitmenų uždavinius:

1. Žmogui, kuriam daugiau kaip 9 ir mažiau kaip 100 metų, siūlo tris kartus iš eilės parašyti skaičių, reiškiantį jo amžių (pavyzdžiui, 484848). Įrodykite, kad gautasis skaičius dalijasi iš 7.

2. Imkime septynias korteles su numeriais nuo 1 iki 7. Sudėkime jas į kieno nors kepurę ir rūpestingai sumaišykime. Paskui, imdami iš kepurės po vieną kortelę, sudėliokime jas į vieną eilę. Kokia tikimybė, kad gautasis septyniaženklis skaičius dalijasi iš 11?

3. Raskite mažiausią sveiką skaičių, kuris iš 2 dalytųsi su liekana 1, iš 3 — su liekana 2, iš 4 — su liekana 3, iš 5 — su liekana 4, iš 6 — su liekana 5, iš 7 — su liekana 6, iš 8 — su liekana 7, iš 9 — su liekana 8 ir iš 10 — su liekana 9.

4. Vaikas turi n vienodų medinių kubelių. Iš jų jis stengiasi sudėti kuo didesnių matmenų kubą, tačiau pastebi, kad trūksta lygiai vienos kubelių eilės, lygiagretės didžiojo kubo briaunai. Įrodykite, kad n dalijasi iš 6.

5. Kokią gausime liekaną, dalydami $3^{123456789}$ iš 7?

6. Raskite keturis skaitmenis (nė vienas jų nelygus nuliui), iš kurių negalima sudaryti dalaus iš 7 keturženklio skaičiaus.

Visi uždaviniai, išskyrus paskutinį, pasirinkus tinkamą sprendimą, pasirodo daug paprastesni, negu gali atrodyti iš pirmo žvilgsnio. Skaitytojui, kuris stengsis susidoroti su visais 6 uždaviniais, bus atlyginta „treniruote", reikalinga elementarinei skaičių teorijai.

Paskelbęs žurnale straipsnį apie dalumo požymius, gavau daugybę skaitytojų laiškų.

Kai kurie skaitytojai pasiūlė kitokius, negu mano išvardyti, dalumo iš 7 požymius. Čia pateiksiu tik dažniausiai skaitytojų laiškuose paminėtą. Šis senas ir gerai žinomas dalumo požymis pagrįstas tuo, kad skaičius 1001 (atsitiktinai sutampantis su rinkinio „Tūkstantis ir viena naktis" pasakų skaičiumi) yra lygus trijų nuosekliai einančių pirminių skaičių 7, 11 ir 13 sandaugai. Skaičius, kurio dalumas tikrinamas, iš dešinės į kairę suskirstomas triženklėmis skaitmenų grupėmis. Pavyzdžiui, skaičius 61671142 suskirstomas grupėmis 61/671/142. Triženkliams skaičiams, sudarytiems iš kiekvienos grupės skaitmenų, prirašomi iš eilės pliuso ir minuso ženklai taip, kad paskutinis dešinysis skaičius turėtų pliusą. Paskui skaičiai sudedami: 142−671+61=−148. Dalydami gautąjį skaičių iš 7, 11 ir 13, gausime tokią pat liekaną, kaip ir dalydami pradinį skaičių.

ATSAKYMAI

1. Kad ABABAB pavidalo skaičius dalytųsi iš 7, pakanka pastebėti, jog toks skaičius yra skaičių AB ir 10101 sandauga. Daugiklis 10101 dalijasi iš 7, taigi iš 7 dalijasi ir ABABAB.

2. Jeigu skaitmenys nuo 1 iki 7 atsitiktinai išdėlioti eilute, tikimybė, kad gautasis skaičius dalysis iš 11, lygi $\frac{4}{35}$. Pažiūrėkime, kaip apskaičiuojama ši tikimybė. Kad skaičius dalytųsi iš 11, jo skaitmenų, esančių nelyginėse vietose, ir skaitmenų, esančių lyginėse vietose, sumų skirtumas turi būti lygus 0 arba dalytis iš 11. Skaitmenų nuo 1 iki 7 suma lygi 28. Nesunku pastebėti, jog dalumo iš 11 požymį gali patenkinti tik dvi 28 paskirstymo kombi-

nacijos: 14/14 ir 25/3. Pastarąją atmetame, nes bet kokių 3 nelyginių nuliui ir tarpusavyje nelygių skaičių suma visada didesnė už 3. Taigi lieka tik paskirstymas 14/14. Galimos 35 skirtingos trijų skaičių, stovinčių lyginėse skaičiaus ABABAB, kurio skaitmenų A suma lygi 14, vietose (pažymėtų raide B), kombinacijos. Iš jų tik 4 kombinacijų (167, 257, 347, 356) suma sudaro 14. Vadinasi, tikimybė, kad atsitiktinai sudarytas skaičius dalijasi iš 11, lygi $\frac{4}{35}$.

3. Mažiausias skaičius, kurį dalydami iš visų skaičių nuo 2 iki 10 gauname liekaną, vienetu mažesnę už daliklį, lygus 2519. Įdomu pažymėti, kad „profesorius Hofmanas" * savo knygoje „Seni ir nauji galvosūkiai" („Puzzles Old and New") (1893) šį uždavinį laiko „sunkiuoju" ir skiria jo sprendimui daugiau kaip du puslapius. Hofmanas nepastebėjo, kad ieškomasis skaičius dalijasi iš visų skaičių „beveik sveikai": dalybos liekana visada vienetu mažesnė už daliklį. Vadinasi, norint gauti atsakymą, pakanka rasti skaičių 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ir 10 bendrą mažiausią kartotinį (jis lygus 2520) ir iš jo atimti 1.

4. Kubo su trūkstama mažų kubelių eilute konstravimo uždavinys yra ekvivalentus tokiam uždaviniui: įrodyti, kad n^3-n pavidalo skaičius (n— bet koks sveikas skaičius) visada dalijasi iš 6. Tai, kad n^3-n dalijasi iš 6, lengviausia įrodyti n^3-n suskaidžius dauginamaisiais: $n^3-n=n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)$. Iš šios lygybės dešiniosios pusės reiškinio matome, kad n^3-n lygus trijų nuosekliai vienas paskui kitą einančių skaičių sandaugai. Kokius tris nuosekliai vienas paskui kitą einančius skaičius bepaimtume, vienas jų dalysis iš 3, o bent vienas bus lyginis (suprantama, ir pirmą, ir antrą savybę gali turėti *vienas ir tas pats skaičius;* toks, pavyzdžiui, skaičius 18 skaičių 17, 18, 19 sekoje). Kadangi 2 ir 3 priklauso bet kokių nuosekliai vienas po kito einančių skaičių daugiklių aibei, šių skaičių sandauga dalijasi iš 2×3, tai yra iš 6.

5. Liekana, gauta dalijant $3^{123456789}$ iš 7, lygi 6. Atsakymą nesunku gauti, pastebėjus, kad, dalijant iš 7 tris nuosekliai didėjančius laipsnius, liekanos sudaro periodiškai pasikartojančią seką. Sekos periodą sudaro 6 skai-

---

* Andželo Liuso pseudonimas. — *Aut. pastaba*

čiai: 3, 2, 6, 4, 5, 1. Kadangi dalydami skaičių 123456789 iš 6 gauname liekaną 3, turime paimti trečią iš 6 sekos narių. Jis lygus 6; tai ir yra uždavinio atsakymas.

Dalijant bet kokio skaičiaus nuosekliai didėjančius laipsnius iš 7, gaunamos liekanos, kurios sudaro periodiškai pasikartojančią seką. Skaičiams, kurie 7 moduliu sudaro lyginius, tos periodinės sekos sutampa. Bet koks laipsnis skaičiaus, kuris 7 moduliu sudaro lyginius su 1, dalijamas iš 7 duoda liekaną 1. Laipsniai skaičių, kurie 7 moduliu sudaro lyginius su 2, sudaro pasikartojančių ciklų 2, 4, 1 seką. Skaičiams, kurie 7 moduliu sudaro lyginius su 3, ciklas jau buvo nurodytas, 4 ciklas sudarytas iš 4, 2, 1; 5 — iš 5, 4, 6, 2, 3, 1; 6 — iš 6, 1; 7 — suprantama, iš nulio.

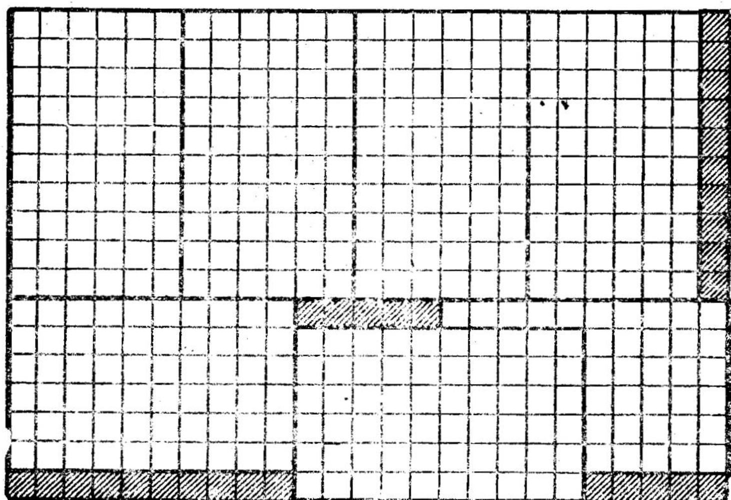
Kokią gausime liekaną, dalydami iš 7 skaičių 123456 789, pakeltą 123456789—tuoju laipsniu? Kadangi 123456 789 dalydami iš 7 gauname liekanos 1, iš karto galime atsakyti: ieškomoji liekana 1.

6. Iš 126 skirtingų 4 skaitmenų kombinacijų skaičiaus, kuris dalytųsi iš 7, negalima sudaryti tik iš trijų: 1238, 1389 ir 2469.

XX skyrius

Dar devyni uždaviniai

1. Septynios kortelės. 25×17 cm popieriaus lapo plotas 425 cm². Septynių mažesnio, 6×10 cm formato, kortelių bendras plotas 420 cm². Aišku, kad jomis visiškai uždengti didžiojo lapo negalima. Kyla klausimas: kam lygus maksimalus plotas tos didžiojo lapo dalies, kurią galima uždengti septyniomis kortelėmis? Kortelės turi gulėti viena prie kitos, jų negalima lankstyti arba pjaustyti. Bet jas galima išdėstyti taip, kad jos išsikištų pro didžiojo lapo kraštus, ir ant didžiojo lapo gulėtų ne tik tiesiai, bet ir įstrižai: kortelių kraštai nebūtinai turi būti lygiagretūs didžiojo lapo kraštams. 105 paveiksle pavaizduota, kaip išdėstyti septynias korteles, kad jos uždengtų lapo dalį, kurios plotas 395 cm²; bet tai dar ne maksimumas.



105 pav. Kurią lapo dalį galima padengti septyniomis kortelėmis?

Šį galvosūkį patogiau spręsti, iš anksto išpjovus iš kartono 25×17 cm dydžio stačiakampį ir septynias 6× ×10 cm dydžio korteles. Neuždengtą plotą bus lengviau apskaičiuoti, didįjį stačiakampį subraižius kvadratais, kurių kraštinės lygios 1 cm.

2. **Uždavinys iš chromatinių grafų teorijos.** Šešios Holivudo kino žvaigždės sudaro labai savotišką grupę. Joje bet kurios dvi žvaigždės arba jaučia viena kitai simpatiją, arba viena kitos neapkenčia. Jokios trys kino žvaigždės nejaučia tarpusavio simpatijos. Įrodykite, kad bent trys kino žvaigždės viena kitai jaučą neapykantą. Uždavinys glaudžiai susijęs su patrauklia ir nauja grafų teorijos sritimi — „tūščiai mėlynais" chromatiniais grafais, kurių esmę paaiškinsime atsakyme.

3. **Du laimėjimai iš eilės.** Vienas matematikas, jo žmona ir paauglys sūnus domisi šachmatais. Kartą sūnus šeštadienio vakarą nusprendė praleisti su bičiuliais ir paprašė tėvą 10 dolerių. Tėvas sekundei susimąstė ir, išpūtęs iš pypkės dūmų kamuolį, atsakė:

Padarykime taip. Šiandien trečiadienis. Tu suloši vieną partiją šachmatais šiandien vakare, antrą rytoj ir trečią penktadienį. Tavo partneriai iš eilės būsime mama ir aš. Jeigu tu laimėsi dvi partijas iš eilės, aš tau duosiu pinigų.

– O kas su manim žais pirmą partiją: tu ar mama?

– Pasirink pats, — atsakė matematikas, klastingai šyptelėjęs.

Sūnus žinojo, kad tėvas žaidžia geriau už motiną. Kokiu nuoseklumu jam reikėtų žaisti tris partijas (su tėvu — motina — tėvu ar su motina — tėvu — motina), norint turėti daugiausia šansų laimėti dvi partijas?

Šis įdomus uždavinys iš elementarios tikimybių teorijos; suprantama, atsakymą reikia ne atspėti, o įrodyti.

4. Du „kriptoritmai". Kriptoritmas — uždavinys, kuriame reikia iššifruoti tam tikrus aritmetinius veiksmus. Daugelyje kriptoritmų kokio nors paprasto aritmetinio uždavinio kiekvienas skaitmuo užšifruotas tam tikra raide. Du puikūs kriptoritmai, pavaizduoti 106 paveiksle, maloniai paįvairina įsigalėjusius kanonus, tačiau, remiantis loginiais samprotavimais, juos lengva išspręsti, ir kiekvienas jų turi vienintelį atsakymą.

Abiejuose uždaviniuose dauginami tam tikri du skaičiai. Kairiajame uždavinyje raide *E* pažymėti lyginiai skaitmenys, raide *O* — nelyginiai. Suprantama, iš to, kad visi lyginiai skaitmenys pažymėti ta pačia raide *E*, dar neaišku, kad visi lyginiai skaitmenys yra vienodi. Viena raidė *E* gali reikšti skaitmenį 2, kita — 4 ir t. t. Nulis laikomas lyginiu skaitmeniu. Reikia iššifruoti visą pratimą.

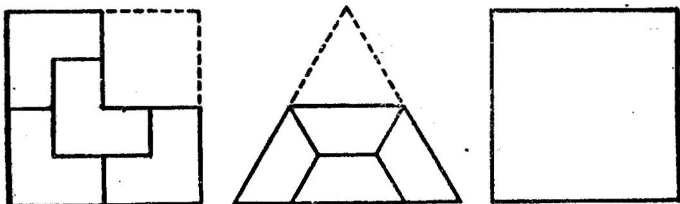
Dešiniajame uždavinyje raide P pažymėti kokie nors pirminiai vienaženkliai skaičiai (2, 3, 5 ar 7).

Šis uždavinys pasidarė tam tikru požiūriu klasikinis.

5. Karpymo uždavinys. Ar galima, padalijus kvadratą į keturis vienodus kvadratus ir vieną ketvirtį nukirpus, likusią dalį padalyti į keturias kongruenčias (vienodo dydžio ir formos) figūras? Pasirodo, galima. Kaip tai daroma, pavaizduota 107 paveiksle, kairėje. Analogiškai lygiakraštį trikampį padalijus į 4 vienodus lygiakraščius trikampius tiesėmis, lygiagrečiomis jo kraštinėms, ir nukirpus vieną mažųjų trikampių, turinčių bendrą viršūnę su

```
    E E O          P P P
      O O            P P
  E O E O        P P P P
  E O O        P P P P
O O O O O      P P P P P
```

106 pav. Du neįprasti kriptoritmai



107 pav. Trys karpymo uždaviniai

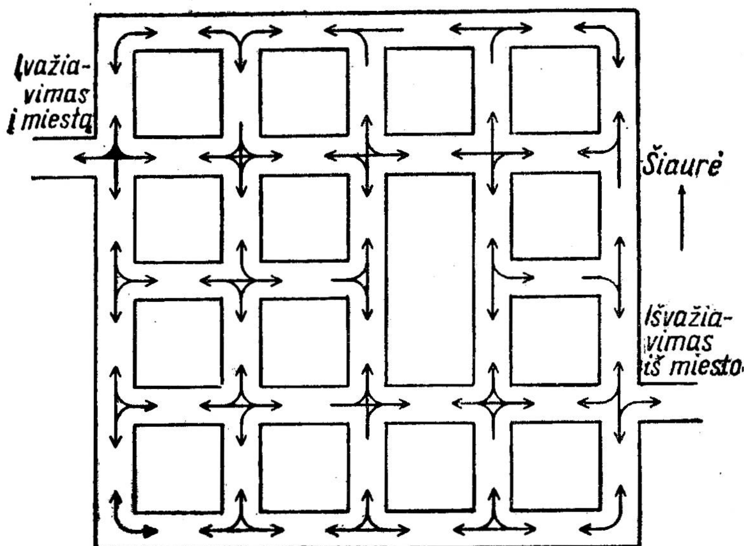
didžiuoju, kitą trikampio dalį taip pat galima padalyti į keturias kongruenčias figūras (107 pav., viduryje). Abu pateikti uždaviniai tipiški plačiai karpymo uždavinių kategorijai. Jų sąlyga formuluojama taip: „Duota tam tikra geometrinė figūra. Ją reikia sukarpyti į numatytą skaičių mažesnių matmenų vienodų figūrų, kartu sudarančių pradinę figūrą.“

Ar galima sukarpyti kvadratą (107 pav., dešinėje) į penkias kongruenčias dalis? Pasirodo, galima, be to, sprendimas vienintelis. Dalys gali būti bet kokios, kaip norima įmantrios formos, bet būtinai vienodos ir dydžiu, ir forma. Asimetriškas dalis galima „apversti“, tai yra kiekvienos asimetriškos dalies neskiriame nuo jos veidrodinio atvaizdo. Iš pradžių uždavinys atrodo nepaprastai sunkus, bet vėliau „praregime“ ir randame nuostabiai paprastą sprendimą.

6. Eismo problemos Floidz-Nobo miestelyje. Robertas Ebotas, knygos „Nauji kortų lošimai“ * autorius, skaitytojams pasiūlė labirintą, pavaizduotą 108 paveiksle, pridėdamas tokį paaiškinimą:

„Indianos valstijos Floidz-Nobo miestelyje yra užregistruota tik 37 automobilai, ir miestelio me-

* R. **Abbott, Abbott's New Card Games**, N. Y., 1963.



108 pav. Transporto judėjimo Floidz-Nobo miestelyje schema

ras nusprendė savo pusbrolį Henrį Steiblzą — didelį pokštininką, žinomą potraukiu ekscentriškiems poelgiams, — paskirti eismo reguliavimo skyriaus viršininku, nusprendęs, kad šis be vargo susidoros su pavestomis pareigomis. Greitai meras pasigailėjo, taip nusprendęs. Kartą miestelio gyventojai, pabudę rytą, pamatė daugybę naujų kelio ženklų. Jie buvo iškabinėti taip, kad judėjimas kai kuriose gatvėse pasidarė vienpusis, o posūkiai sankryžose — labai sudėtingi ir painūs.

Miestelio gyventojai norėjo, kad visi kelio ženklai būtų nuplėšti. Tačiau policijos viršininkas — kitas mero pusbrolis — nustatė, kad vairuotojai nuo tokios ženklų gausybės taip netenka kantrybės, jog anksčiau ar vėliau padaro draudžiamą posūkį, ir miesto iždas už šiuos pažeidimus iš baudų pelno gauna daugiau, negu už viršytą greitį priemiestiniame kelyje.

Be to, miestelio gyventojai piktdžiugiškai laukė, kaip kitą dieną, šeštadienį, per miestą per-

važiuos Mozesas Mak-Adamas, turtingiausias apylinkės fermeris, įpratęs savaitgalį praleisti užmiesčio viloje. Visi tikėjosi pasišaipyti iš Mozeso, manydami, kad pravažiuoti per miestą be jokio pažeidimo neįmanoma. Tačiau Mozesas slapčia gavo miesto planą su visais kelio ženklais ir gerai jį išstudijavo. Šeštadienį jis, gyventojų nuostabai, pervažiavo per visą miestą, nepažeidęs taisyklių!"

Ar galite atkurti maršrutą, kuriuo Mozesas važiavo per miestą? Atsidūrę bet kurioje sankryžoje, jūs turite teisę važiuoti tik vienos kurios rodyklės kryptimi, t. y. pasukti į reikiamą pusę leidžiama tik su sąlyga, jeigu yra posūkis, kuriuo galima pasukti, ir vadinasi, tiesiai — tik su sąlyga, jeigu į reikiamą pusę eina tiesi linija. Pasukti, važiuojant atbulai, draudžiama. Negalima apsisukti ir 180°. Išvažiuoti iš sankryžos galima tik kurios nors rodyklės kryptimi. Pavyzdžiui, įvažiavę į miestą ir pasiekę pirmą sankryžą, turėsite išsirinkti vieną iš dviejų galimybių: važiuoti į šiaurę arba tiesiai (į rytus). Jeigu važiuosite tiesiai, sekančioje sankryžoje galėsite arba pasukti į pietus, arba toliau važiuoti į rytus. Nors antroje sankryžoje ir yra posūkis į šiaurę, bet rodyklės, rodančios šiaurę, nėra, todėl iš antrosios sankryžos važiuoti į šiaurę draudžiama.

7. Litlvudo pastabos. Kartais ant kokio nors žurnalo viršelio pasirodo to paties žurnalo atvaizdas, kuriame aiškiai matyti dar mažesnis šio žurnalo atvaizdas ir t. t., matyt, iki begalybės. Ši be galo mažėjančių sekų rūšis neretai pridaro painiavos logikoje ir semantikoje. Kartais be galo mažėjančią seką pavyksta nutraukti, kartais tai padaryti neįmanoma. Anglų matematikas Dž. Litlvudas knygoje „Matematinės įvairenybės" * kaip panašios situacijos pavyzdį pateikia tris pastabas, padarytas vieno jo straipsnių pabaigoje. Straipsnis buvo išspausdintas prancūzų žurnale ir pastabos (prancūzų kalba) teigė:

„1. Aš labai dėkingas prof. Risui už šio straipsnio vertimą.

2. Aš dėkingas prof. Risui už ankstesnės pastabos vertimą.

* Д ж. Л и т л в у д. Математическая смесь. М., Физматгиз, 1962.

3. Aš dėkingas prof. Risui už ankstesnės pastabos vertimą."

Sakykim, kad Litlvudas visai nemoka prancūzų kalbos. Kokiu samprotavimu remdamasis, jis gali išvengti be galo pasikartojančių vienodų pastabų ir sustoti po trečiosios pastabos?

8. Kaip gauti skaičių 100 iš skaičių nuo 1 iki 9. Įdomiųjų uždavinių rinkiniuose pasitaiko vienas senas galvosūkis, nors jo sprendimas seniai žinomas. Galvosūkis toks. Tarp skaičių nuo 1 iki 9 aritmetinių veiksmų ženklus reikia parašyti taip, kad išeitų reiškinys, kurio reikšmė būtų lygi 100. Skaitmenys turi eiti iš eilės, jų perstatinėti negalima. Uždavinys turi šimtus sprendimų, paprasčiausias jų atrodo taip:

$$1+2+3+4+5+6+7+(8\times 9)=100$$

Uždavinys darosi žymiai sunkesnis ir įdomesnis, aritmetinių veiksmų ženklus apribojus pliusu ir minusu. Tuo atveju sprendimų taip pat daug, pavyzdžiui:

$$1+2+34-5+67-8+9=100$$
$$12+3-4+5+67+8+9=100$$
$$123-4-5-6-7+8-9=100$$
$$123+4-5+67-89=100$$
$$123+45-67+8-9=100$$
$$123-45-67+89=100$$

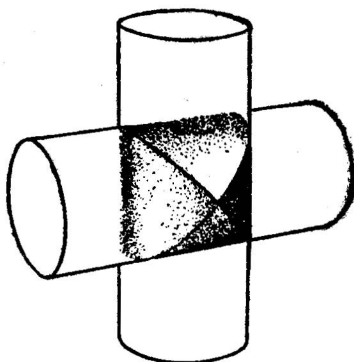
„Paskutinis sprendimas ypač paprastas, — rašė Henris E. Djudenis, * — ir aš nemanau, kad kada nors pavyks jį patobulinti.

Turint galvoje uždavinio populiarumą, negalima nesistebėti, kad jam „priešingam" galvosūkiui skiriama tiek mažai dėmesio. „Priešingu" aš suvokiu tokį uždavinį. Skaitmenys surašyti mažėjančia tvarka nuo 9 iki 1. Reikia ekonomiškiausiu būdu parašyti pliusus ir minusus taip, kad išeitų reiškinys, lygus 100.

9. Susikertantys ritiniai. Vienu didžiausių Archimedo laimėjimų reikia laikyti tai, kad jis rėmėsi (nors ir ne-

---

* H. E. Dudeney. Amusements in mathematics. N. Y., Dover Publications, 1958, Problem 94.



109 pav. Archimedo uždavinys apie susikertančius ritinius

griežtai) kai kuriomis idėjomis. Ilgainiui tai turėjo didelę reikšmę, pagrindžiant matematinę analizę.

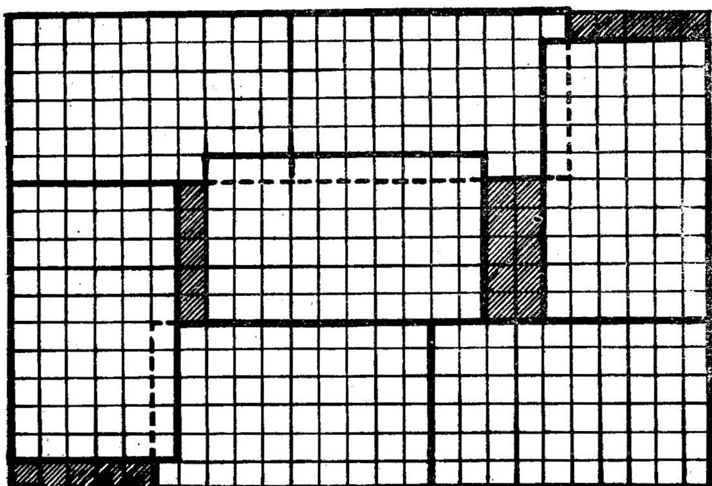
109 paveiksle pavaizduotas klasikinis pavyzdys uždavinio, kurį norint išspręsti, daugelio šiuolaikinių matematikų nuomone, būtinai reikia žinoti matematinės analizės metodus (šis uždavinys net kartais pateikiamas vadovėliuose). Taikant nuovokius Archimedo metodus, galima lengvai išspręsti uždavinį. Tiksliai jis formuluojamas taip: „Du statūs skrituliniai ritiniai susikerta stačiu kampu. Abiejų ritinių spinduliai lygūs vienetui. Kam lygus erdvinės figūros, kurią sudaro susikirsdami ritiniai, tūris?

Iki mūsų neišliko užrašai, iš kurių būtų matyti, kaip uždavinį sprendė pats Archimedas, bet gauti atsakymą stebėtinai paprasta. Reikia žinoti tik šiek tiek daugiau, negu skritulio ploto formulę (πR^2, čia R — skritulio spindulys) ir rutulio tūrio formulę ($\frac{4}{3}\pi R^3$, čia R — rutulio spindulys). Visai galimas dalykas, kad ir Archimedas šį uždavinį sprendė kaip tik taip. Mūsų dienomis uždavinys apie ritinių susikirtimą tapo žinomu pavyzdžiu, kaip, remiantis nuovokiais, bet paprastais samprotavimais, galima išspręsti uždavinį, kurį anksčiau išspręsti buvo įmanoma, tik taikant aukštosios matematikos metodus.

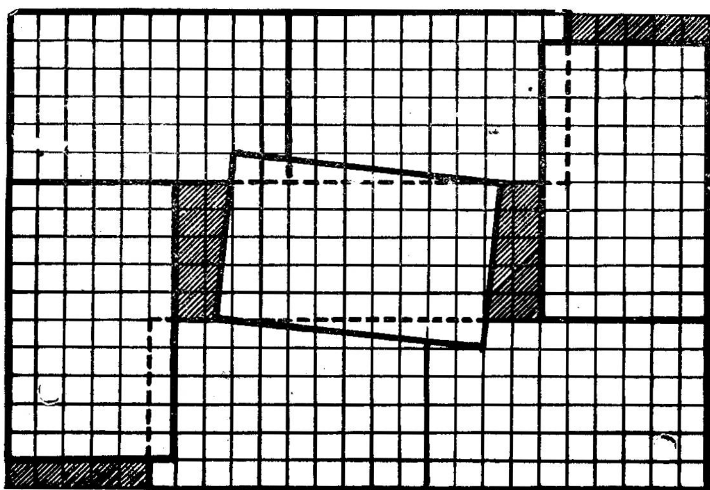
ATSAKYMAI

1. Jeigu kortelių kraštai turi būti lygiagretūs didžiojo lapo kraštams, jomis uždengti galima daugiausia 400 cm². Vienas daugelio optimalių kortelių išdėstymų pavaizduotas 110 paveiksle.

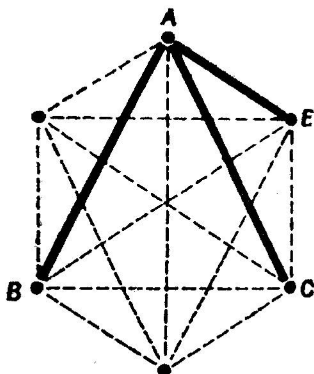
Stifenas Baras pirmasis pastebėjo, kad, pasukus centrinę kortelę (111 pav.), galima šiek tiek padidinti uždengtosios lapo dalies plotą (iki 400, 286... cm²). Šiek tiek



110 pav. Kaip septyniomis kortelėmis uždengti 400 cm²



111 pav. Esant tokiai kortelės padėčiai, uždengiama šiek tiek daugiau negu 400 cm²



112 pav. Grafas, kurį taikant, galima išspręsti 2 uždavinius

padidinus kampą, galima uždengti dar didesnę lapo dalį. Apskaičiuoti kampą, kuriuo pasiekiamas maksimumas, t. y. bus uždengta maksimaliai galima lapo dalis,— uždavinys neelementarus; jį sprendžiant, tenka taikyti matematinės analizės metodus. Paaiškėjo, kad, keičiant kampą nuo 6°12′ iki 6° 13′, uždengtosios lapo dalies plotas lieka pastovus penktojo ženklo po kablelio tikslumu: 400,26332... cm². Kai kampas 6°12′37,8973″, uždengtosios lapo dalies plotas sudaro 400,263337992... cm².

2. Uždavinį lengva išspręsti grafiškai. Sakykim, šeši taškai žymi šešias kino žvaigždes (112 pav.). Punktyrinė linija, jungianti taškų porą, žymi arba tarpusavio simpatiją, arba tarpusavio neapykantą. Tarkim, kad mėlynos linijos (šiuo atveju jos pažymėtos punktyru) atitinka simpatijas, o raudonos (storos linijos) — neapykantą.

Išnagrinėkime tašką *A*. Iš penkių linijų, išeinančių iš jo, bent trys turi būti vienos spalvos. Kadangi samprotavimai nesikeičia nepriklausomai nuo to, kokias tris linijas ir kokios spalvos pasirinksim, laikysime, kad išsirinkome tris raudonas linijas, išskirtas 112 paveiksle. Jeigu visos trikampio *BCE* kraštinės būtų mėlynos, reikštų, kad kino žvaigždės *B, C* ir *E* viena kitai jaučia tarpusavio simpatiją. Kadangi tai prieštarauja uždavinio sąlygai, bent viena trikampio *BCE* kraštinė turi būti raudona. Nepriklausomai nuo to, kuri trikampio *BCE* kraštinė bus raudona, gauname vieną trikampį, kurio visos kraštinės raudonos (arba trikampis *ABC,* arba *ABE,* arba *ACE).* Vadinasi, visuomet gali būti trys kino žvaigždės, kurios viena kitai jaučia neapykantą. Analogišką rezultatą gautume, pasirinkę pradinėmis tris mėlynas linijas vietoj trijų raudonų. Tokiu atveju visos trikampio *BCE* kraštinės turėtų būti raudonos, nes priešingu atveju gautume mėlyną trikampį, kurį sudarytų dvi tiesės, išeinančios iš *A* į trikampio *BCE* kraštinės galus, ir ši mėlyna kraštinė. Taigi

visuomet bus bent vienas trikampis, kurio visos kraštinės bus arba mėlynos, arba raudonos. Kadangi trikampių su trimis mėlynomis kraštinėmis negali būti pagal uždavinio sąlygą, galima teigti, kad visuomet atsiras vienas trikampis, kurio visos kraštinės bus raudonos.

Tiesą sakant, galima išreikšti net stipresnį teiginį. Jeigu mėlyni trikampiai draudžiami, visuomet atsiras bent du trikampiai, kurių visos trys kraštinės bus raudonos. Grafų teorijoje tokio tipo dvispalvis grafas, neturintis mėlynų trikampių, vadinamas chromatiniu „tuščiai mėlynu" grafu. Jeigu grafo viršūnių skaičius, kaip mūsų uždavinyje, lygus šešiems, minimalus raudonų trikampių skaičius lygus dviem.

Jeigu „tuščiai mėlyno" grafo viršūnių yra mažiau kaip šešios, nesunku sudaryti grafų, neturinčių nė vieno raudono trikampio, pavyzdžius. Kai viršūnės septynios, raudonų trikampių yra nemažiau kaip keturi. Kai viršūnės aštuonios, minimalus raudonų trikampių skaičius — aštuoni, kai viršūnės devynios — trylika. Egzistuoja gerai išvystyta „tuščiai mėlynų" grafų teorija.

3. Sakykim, *A* šachmatais žaidžia stipriau, negu *B*. Jūs norite laimėti dvi partijas iš eilės. Kaip žaisti: ar iš pradžių partiją su *A*, paskui su *B* ir vėl su *A*, ar iš pradžių su *B*, paskui su *A* ir vėl su *B*?

Sakykime, P_1 — tikimybė, kad laimėsite prieš *A*, o P_2 — kad laimėsite prieš *B*. Tikimybė, kad nelaimėsite (pralaimėsite arba sulošite lygiosiomis) prieš *A*, lygi $1 - P_1$, o prieš *B* lygi $1 - P_2$.

Žaidžiant su varžovais *ABA* nuoseklumu, laimėti dvi partijas iš eilės galima trimis būdais:

1. Jūs laimite visas tris partijas. Šio įvykio tikimybė lygi $P_1P_2P_1 = P_1^2 P_2$.

2. Jūs laimite tik pirmąsias dvi partijas. Šio įvykio tikimybė lygi $P_1P_2(1-P_1) = P_1P_2 - P_1^2 P_2$.

Jūs laimite tik dvi paskutiniąsias partijas. Šio įvykio tikimybė lygi $(1-P_1)P_2P_1 = P_1P_2 - P_1^2 P_2$.

Sudėję visas tris tikimybes, gausime skaičių $P_1P_2(2-P_1)$. Tai ir bus tikimybė laimėti dvi partijas iš eilės, jūsų partneriams pasikeitus *ABA* tvarka.

Tarkime, kad partneriai keičiasi *BAB* eile. Analogiški samprotavimai rodo, kad tikimybė laimėti visas tris partijas lygi $P_1^2P_2$, tikimybė laimėti pirmąsias dvi partijas

lygi $P_1P_2 - P_1 P_2^2$ ir tikimybė laimėti dvi paskutiniąsias partijas — $P_1P_2 - P_1P_2^2$. Visų trijų tikimybių suma lygi P_1P_2 $(2-P_2)$. Tai ir yra tikimybė laimėti dvi partijas iš eilės, jūsų partneriams keičiantis *BAB* tvarka.

Iš uždavinio sąlygos aišku, kad P_2 (tikimybė, kad jūs laimėsite prieš silpnesnį žaidėją *B*) didesnė, negu P_1 (tikimybė, kad jūs laimėsite prieš stipresnį žaidėją *A*). Vadinasi, dydis P_1 P_2 $(2-P_1)$ turi būti didesnis už dydį P_1P_2 $(2-P_2)$. Kitaip tariant, jūs turite daugiau šansų laimėti iš eilės dvi partijas, jeigu partnerius keisite pagal schemą *ABA*, tai yra iš pradžių sulošite partiją su stipresniu žaidėju, paskui — su silpnesniu ir pabaigoje — vėl su stipresniu.

Kai kurie skaitytojai padarė analogišką išvadą, remdamiesi tokiais negriežtais samprotavimais. Norėdamas laimėti dvi partijas iš eilės, sūnus turi laimėti antrąją partiją. Vadinasi, antrąją partiją jam naudingiau žaisti su silpnesniu žaidėju, t. y. su motina. Be to, jis turi laimėti bent vieną partiją prieš stipresnį žaidėją. Todėl jo šansai laimėti išaugs, jeigu su stipresniu žaidėju jis susitiks dviejose partijose. Vadinasi, jam naudinga keisti varžovus pagal schemą *ABA*. Uždavinį galima išspręsti, nieko nežinant apie laimėjimo prieš kiekvieną varžovą tikimybes, todėl vienas skaitytojų pastebėjo, kad, norint gauti atsakymą, pakanka išnagrinėti kokį nors labai paprastą atskirą atvejį. Sakykime, pavyzdžiui, sūnus neabejotinai nugali motiną. Tuomet, bent kartą nugalėjęs tėvą, jis sugebės laimėti dvi partijas iš eilės. Jo šansai laimėti bus didesni, su tėvu sužaidus dvi partijas.

4. Kairysis kriptoritmas turi vienintelį sprendinį

```
  285
   39
-----
 2565
 855
-----
11115
```

dešiniojo vienintelis sprendinys —

```
  775
   33
-----
 2325
2325
-----
25575
```

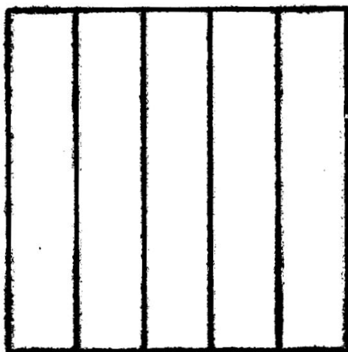
Prieš pradedant spręsti antrą, sunkesnį uždavinį, geriausia pasistengti rasti visus triženklius skaičius, parašytus „pirminiais" skaitmenimis (t. y. skaitmenimis, išreiškiančiais pirminius vienaženklius skaičius), kuriuos padauginus iš pirminio vienaženklio skaičiaus, gaunamas keturženklis skaičius, parašytas taip pat vien tik „pirminiais" skaitmenimis. Tokie triženkliai skaičiai iš viso yra keturi:

$$775\times3=2\,325$$
$$555\times5=2\,775$$
$$755\times5=3\,775$$
$$325\times7=2\,275$$

Kadangi mus domina triženkliai ir keturženkliai skaičiai, parašyti tik „pirminiais" skaitmenimis, iš kiekvieno aukščiau pateiktojo triženklio skaičiaus tik su vienu daugikliu galima gauti keturženklį skaičių (iš skaičiaus 775— su daugikliu 3, iš skaičiaus 555 — su daugikliu 5 ir t. t.). Vadinasi, mūsų uždavinyje abu dviženklio daugiklio skaitmenys turi būti vienodi. Peržiūrėję keturis variantus, rasime atsakymą.

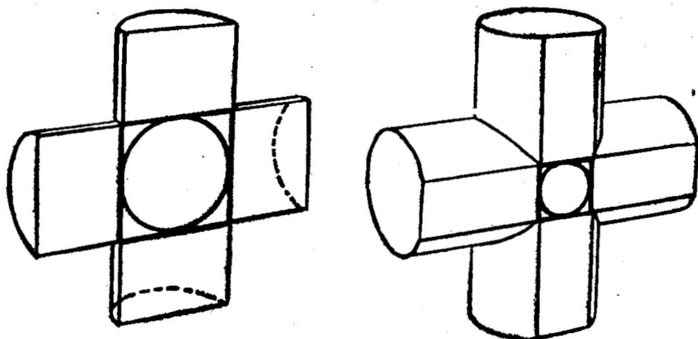
5. Kvadratą galima supjaustyti į penkias kongruenčias dalis tik taip, kaip parodyta 113 paveiksle. Tiems, kurie negali išspręsti uždavinio, jis atrodo paniškai sunkus. Ši baimė gali prilygti tik sumišimui, kuris juos apims, pažvelgus į atsakymą.

6. Norint pervažiuoti per Floidz-Nobą, nepažeidus eismo taisyklių, sankryžose reikia pasukti tokiomis kryptimis (Š reiškia šiaurę, P — pietus, R—rytus ir V—vakarus; sankryžos — tokia eile, kaip jos privažiuojamos kelyje): R—R—P—P—R—Š—Š—Š—R—P—V—P—R—P—P—V—V—V—V—Š—Š—R—P—V—P—R—R—R—R—Š—R.



113 pav. Penktojo uždavinio sprendimas

7. Litlvudas, aiškindamas, kaip jam pavyko išvengti



114 pav. Du Archimedo ritinių ir į jų bendrąją dalį įbrėžtos sferos pjūviai

daugybės pastabų straipsniui, kurį išvertė Risas, pastebėjo: „Kad ir kaip blogai aš moku prancūzų kalbą, vis dėlto aš įstengiu *perrašyti* prancūzišką frazę."

8. Norint gauti reiškinį, lygų 100, tarp skaitmenų, paimtų atvirkščia tvarka, pakanka įrašyti keturis pliusus ir vieną minusą:

$$98-76+54+3+21=100$$

Kitų sprendimų su keturiais ženklais nėra. Pilnas visų sprendimų skaitmenims, išdėstytiems tiek didėjančia, tiek mažėjančia tvarka, sąrašas pateiktas autoriaus knygoje D-ro Matrikso numerologija." *

9. Taikant puikų metodą, galima lengvai išspręsti uždavinį vien tik elementariomis priemonėmis.

Įsivaizduokime, kad erdvės dalyje, priklausančioje abiem ritiniams, įbrėžta vienetinio spindulio sfera, kurios centras yra ritinių ašių susikirtimo taške. Ritinius ir sferą perkirsim pusiau plokštuma, einančia per ritinių ašis. (114 pav., kairėje). Dviejų ritinių bendrosios dalies pjūvis bus kvadratas, sferos pjūvis — apskritimas, įbrėžtas į šį kvadratą.

Dabar sakykime, kad ritinius ir sferą perkirtome plokštuma, lygiagrečia pirmajai, bet neinančia per ritinių ašis. Tokia plokštuma nuo ritinių ir sferos atkirs ne pusę, o

* M. Gardner. Numerology of Dr. Matrix. N. Y., 1967, p. 64—65.

tik nedidelę dalį (114 pav., dešinėje). Ritinių bendrosios dalies pjūvis, kaip ir pirma, bus kvadrato formos, o sferos pjūvis — į tą kvadratą įbrėžto apskritimo formos. Nesunku matyti, kad, kokią plokštumą, lygiagrečią ritinių ašims, beišvestume, rezultatas bus tas pats: kvadratas ir apskritimas, įbrėžtas į jį.

Įsivaizduokime, kad visus šiuos išilginius pjūvius sudėjome kaip knygos puslapius. Sferos tūris bus lygus, aišku, visų skritulinių pjūvių „sumai", o ritinių bendrosios dalies tūris — visų kvadratų „sumai". Vadinasi, ritinių bendrosios dalies ir į ją įbrėžtos sferos tūrių santykis lygus skritulio ir apie jį apibrėžto kvadrato plotų santykiui. Nesudėtingi apskaičiavimai rodo, kad paskutinysis santykis lygus $\frac{\pi}{4}$. Pažymėję x ritinių bendrosios dalies tūrį, gausime lygtį

$$\frac{4\pi r^3/3}{x}=\frac{\pi}{4},$$

iš čia $x=\frac{16}{3}r^3$. Mūsų atveju $r=1$; vadinasi, dviejų ritinių bendrosios dalies tūris lygus tiesiog $\frac{16}{3}$. Kaip pastebėjo Archimedas, šis dydis sudaro $\frac{2}{3}$ tūrio kubo, apibrėžto apie sferą, tai yra kubo, kurio briauna lygi kiekvieno ritinio skersmeniui.

Aukščiau pateiktame sprendime taikomas Bonaventūro Kavaljerio, italų matematiko, gyvenusio XVII amžiuje metodas. Paprasčiausia šio metodo forma pagrįsta teiginiu, kad dviejų kūnų, turinčių vienodas aukštines ir lygiapločius skersinius pjūvius bet kokiu atstumu nuo pagrindo, tūriai lygūs. Įrodydamas šį teiginį, Kavaljeris buvo integralinio skaičiavimo pirmtakas: jis nagrinėjo kunus, sudarytus iš sluoksnių, ir perėjo prie ribos. Kavaljerio principas buvo žinomas dar Archimedui. Tik 1906 metais rastoje jo knygoje „Apie metodą", kurioje pateikiamas uždavinio apie dviejų susikertančių ritinių bendrosios dalies tūrį sprendimas, Archimedas šio principo atradimą priskiria Demokritui, kuris, remdamasis tuo principu, išvedė piramidės ir kūgio tūrių formules.

XXI skyrius

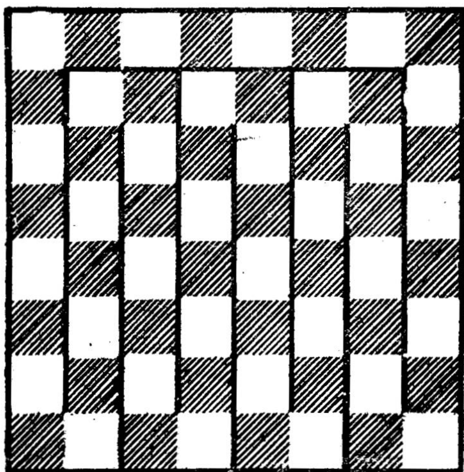
Aštuonios valdovės ir kiti įdomūs šachmatų lentos uždaviniai

Nė vieno geometrinio rašto įdomiosios matematikos mėgėjai nėra taip rūpestingai ištyrinėję, kaip kvadratinėmis plytelėmis iškloto parketo. Aš turiu galvoje ne šaškių, šachmatų ir go tipo žaidimus, kuriuose tokio parketo sumažintas variantas atstoja žaidimo lentą, o nepabaigiamą virtinę galvosūkių, pagrįstų metrinėmis ir topologinėmis paties rašto savybėmis.

Prisiminsime vieną jau anksčiau pasitaikiusių ir plačiai žinomų uždavinių.* Ar galima 31 domino kauliuku užkloti visus įprastos 8×8 šachmatų lentos, kurioje išpjauti du kampiniai įstrižai priešingi laukeliai, langelius? Kadangi 1 domino kauliukas gali uždengti du gretimus laukelius — vieną baltą, kitą juodą, — 31 kauliukas užklos 31 juodą ir 31 baltą laukelį. Išpjautieji kvadratai yra įstrižainės galuose ir, suprantama, jie vienos spalvos, todėl lentos su išpjautais kampais turi 32 vienos spalvos langelius ir 30 kitos spalvos langelių. Tokios lentos, be abejo, domino kauliukais uždengti negalima. Įrodymas, kad šis uždavinys „neturi“ sprendinio, yra klasikinis pavyzdys, demonstruojantis, kad nuspalvinta šachmatų lenta ne tik graži ir patraukli, bet tokioje lentoje lengviau sekti šachmatų ar šaškių partijų ėjimus, taip pat sėkmingai analizuoti įvairiausius uždavinius, kuriuose vienaip ar kitaip naudojama šachmatų lenta.

Įsivaizduokime, jog iš skirtingų šachmatų lentos vietų išpjauname du skirtingų spalvų kvadratus (vieną juodą ir vieną baltą). Ar visuomet galima likusius 62 laukelius uždengti 31 domino kauliuku? Pasirodo, visuomet. Ar yra paprastas šio teiginio įrodymas? Suprantama, galėtume paprastai perrinkti visas skirtingų spalvų kvadratų poras, tačiau toks sprendimas būtų keblus. Puikų įrodymą rado matematikas Gomoris. Šachmatų lentoje nubrėžkime ištisines linijas — sienas — taip, kaip parodyta 115 pa-

* Žr. knygos «Математические головоломки и развлечения» 3 skyriaus 3 uždavinį.

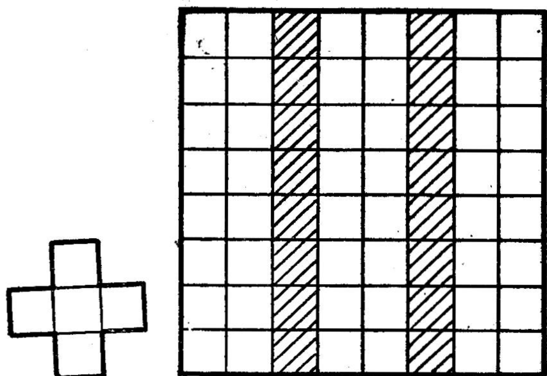


115 pav. Gomorio teoremos apie domino ir šachmatų lentą įrodymas

veiksle. Labirinte tarp sienų juodi ir balti laukeliai kaitaliojasi kaip dviejų spalvų karoliukų vėrinyje (pažymėsime, kad „siūlas“, ant kurio „suverti“ mūsų laukeliai, uždaras, t. y. maršrutas, kuriuo galima apeiti visą labirintą, yra uždara kreivė). Kokius du skirtingos spalvos kvadratus beišpjautume iš lentos, mūsų „vėrinys“ iš langelių nutrūks: išpjovus gretimus labirinto langelius, vienoje vietoje ir priešingu atveju — dviejose vietose. Kiekvieną vėrinio atkarpą sudarys lyginis langelių skaičius. Vadinasi, jas (drauge ir visą lentą) galima visiškai užkloti domino kauliukais.

Nemažiau įdomus ir kitas uždavinys. Tarkime, jog šachmatų lentoje langelius išpjovėme taip, kad kitoje dalyje netelpa nė vienas domino kauliukas. Kokį mažiausią skaičių langelių reikia pašalinti, kad ant kitos lentos dalies nebūtų galima pakloti nė vieno domino kauliuko (kauliuką galima pakloti, jeigu jis uždengs du vertikalius arba horizontalius gretimus langelius)? Nesunku matyti, kad iš lentos reikia išpjauti 32 vienos spalvos langelius. Uždavinys darosi kur kas sudėtingesnis, vietoje domino paėmus vieną iš poliomino figūrų * (priminsime, jog

* Žr. pirmosios knygos 12 ir 46 skyrius.

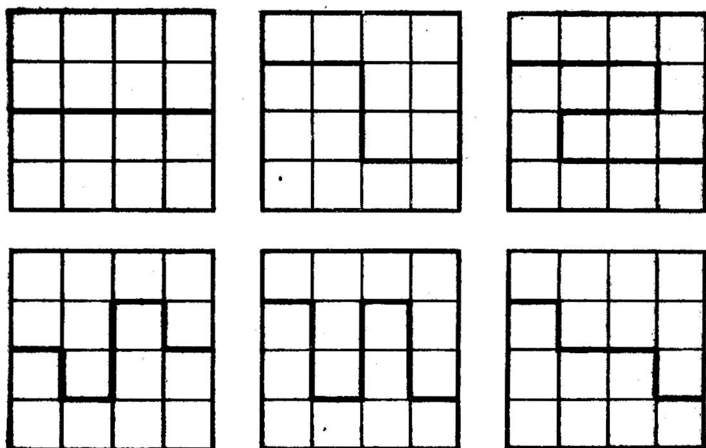


116 pav. Graikiško kryžiaus formos pentamino uždavinys

poliomino figūros sudarytos iš šachmatų lentos langelių, kurių kiekvienas turi mažiausiai vieną bendrą kraštinę su kokiu nors kitu langeliu). Neseniai įvairių uždavinių pasiūlė poliomino išradėjas ir pirmosios knygos apie šį žaidimą autorius S.Golombas*. Jis išsprendė visų tipų imtinai iki dvylikos pentamino (figūra, sudaryta iš penkių langelių) poliomino uždavinius. Paėmus graikiško kryžiaus formos pentamino, galima sugalvoti labai gražų uždavinį. Tarkime, jog įprasta 8×8 šachmatų lenta padaryta iš popieriaus. Užtušavus 16 langelių taip, kaip parodyta 116 paveiksle, iš kitos lentos dalies graikiško kryžiaus formos pentamino, suprantama, iškirpti nebegalima. Vis dėlto 16 nėra minimalus skaičius. Kyla klausimas, koks yra minimalus užtušuotų langelių skaičius (kitaip sakant, reikia rasti, kam lygus mažiausias skaičius užtušuotų langelių, kuriam esant, negalima iškirpti graikiško kryžiaus formos pentamino)?

Nemažiau patrauklus (kol kas dar neišspręstas) kitas šachmatų lentos karpymo uždavinys: reikia nustatyti, keliais būdais galima sukarpyti 8×8 lentą į dvi kongruenčias dalis, kerpant išilgai sienų tarp langelių. Abi dalys turi būti vienodų matmenų ir formų bei sutapti, uždėtos viena ant kitos. Šį uždavinį pirmasis iškėlė Henris E. Djudenis. Jo žodžiais tariant, uždavinys primena ežį: iš ko-

* S. Golomb. Polyominoes. N. Y., 1965.



117 pav. Šeši 4×4 lentos sukarpymo į dvi vienodo dydžio ir vienodos formos dalis būdai

kios pusės jį bandysi įveikti, būtinai papulsi ant „spyglio" — kokios nors kliūties. Pats Djudenis nesugebėjo sudaryti pilno sprendinių sąrašo.

2×2 lentą, aišku, perkirpti į dvi vienodas dalis galima tik vienu būdu. 3×3 lentos iš viso negalima perkirpti į dvi vienodas dalis (nes ji sudaryta iš nelyginio langelių skaičiaus), bet jeigu laikysime, kad centrinio langelio nėra, 3×3 lentą (su skyle centre) vėl bus galima perkirpti į dvi vienodas dalis tik vienu vieninteliu būdu.

Nustatyti sprendinių skaičių 4×4 lentai ne taip jau paprasta, tačiau, truputį pagalvojus, darosi aišku, kad perkirpti ją į dvi vienodas dalis galima tik šešiais būdais (117 pav.). Kiekvienu atveju lentą (ir jos dalis) galima pasukti ir gauti jos veidrodinį atspindį, bet taip gaunami variantai nelaikomi skirtingais nuo tų 6 rastų sprendinių. Djudenis sugebėjo įrodyti, kad 5×5 (su skyle centriniame langelyje) lenta gali būti sukarpyta į vienodas dalis 15 skirtingų būdų, o 6×6 lenta — net 225 būdais! Tuo jis ir baigė. ESM nesunkiai išspręstų analogiškus uždavinius 7×7 ir 8×8 lentai, tačiau, kiek žinoma, tuo dar niekas nesidomėjo.

Uždavinį, glaudžiai susijusį su aukščiau minėtu, pasiūlė H. Grosmanas. Kvadratinę šachmatų lentą reikia

sukarpyti į keturias vienodos formos ir dydžio dalis. 2×2 lentą, taip pat kaip ir 3×3 lentą su skyle centriniame langelyje, galima „ketvirčiuoti“ tik vieninteliu būdu. Ką galima pasakyti apie 4×4 lentą? Keliais iš esmės skirtingais būdais (t. y. negaunamais vienas iš kito posūkiu ir veidrodiniu atspindžiu) ją galima sukarpyti į keturias vienodos formos ir dydžio dalis? Skaitytojai be vargo sudarys visas sukarpymo schemas. Drąsesni skaitytojai gali pabandyti laimę, spręsdami analogišką uždavinį 5×5 lentai su skyle centre. Jiems pranešame, kad sprendinių skaičius šiuo atveju lygus 7. (Bet kurią lyginės eilės* kvadratinę ir bet kurią nelyginės eilės kvadratinę lentą su skyle centriniame langelyje visada galima padalyti į keturias vienodas dalis; tai susiję su paprastu faktu: bet kokio lyginio skaičiaus kvadratas dalijasi iš 4 be liekanos, o bet kokio nelyginio skaičiaus kvadratas, dalijamas iš 4, duoda liekaną 1.) Net 6×6 lentos „ketvirčiavimo“ uždavinį nesunku išanalizuoti be ESM, nors šiuo atveju sprendinių skaičius išaugo iki 37. Kaip ir uždavinyje apie lentos dalijimą į 2 lygias dalis, 7×7 ir 8×8 lentų ketvirčiavimo uždavinių sprendiniai nežinomi, nors galimas dalykas, kas nors, sudaręs tobulesnę programą ESM, jau rado juos.

Abu uždaviniai — apie kvadratinių šachmatų lentų dalijimą į 2 ir į 4 vienodas dalis — turi erdvinius (trimačius) analogus. Erdvinių uždavinių analizė žymiai sudėtingesnė. Sunkumai prasideda nuo 2×2×2 kubo. Daugelis galvoja, kad tokį, girdi, kubą į dvi vienodas dalis galima perpjauti tik vieninteliu būdu (pjūvis turi eiti tik plokštumomis, atskiriančiomis kubinius „langelius“ vieną nuo kito), o iš tikrųjų 2×2×2 kubą į dvi vienodas dalis galima perpjauti trimis būdais. (Ar įsivaizduojate juos?) Į keturias vienodas dalis 2×2×2 kubą galima supjaustyti dviem būdais. Apie 4×4×4 kubą nieko nežinome (nei apie pjaustymo į dvi dalis uždavinį, nei apie „ketvirčiavimą“).

Įsivaizduokime, kad mūsų šachmatų lentoje pasirodė kažkokios figūros, ir mums atsivers naujos beribės galimybės konstruoti patraukliausius galvosūkius. Imkime, pavyzdžiui, *n* eilės lentą (priminsime, jog lentos eile vadiname skaičių langelių, išsidėsčiusių pagal jos kraštinę).

---

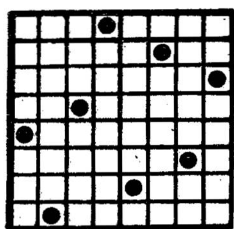
* Kvadratinės šachmatų lentos eile autorius vadina langelių, išsidėsčiusių išilgai lentos krašto, skaičių. — *Vert. į rusų k. pastaba.*

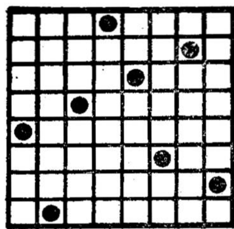
Kam lygus maksimalus skaičius valdovių, kurias lentoje galima išdėstyti taip, kad jos neatakuotų viena kitos? Kadangi valdovė gali eiti per bet kurį langelių skaičių horizontaliai, vertikaliai ir įstrižai, uždavinį galima suformuluoti kitaip: kam lygus maksimalus skaičius figūrų, išdėstytų šachmatų lentoje taip, kad jokios dvi figūros nestovėtų nei vienoje horizontalėje, nei vienoje vertikalėje, nei vienoje įstrižainėje. Nesunku pastebėti, kad maksimalus figūrų skaičius negali viršyti lentos eilės. Įrodyta, kad n eilės lentoje, kai $n>3$, galima išdėstyti n viena kitos neatakuojančias valdoves.

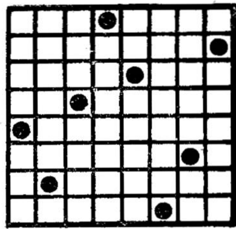
Nelaikant naujais tų figūrų išsidėstymų, kurie vienas iš kito gaunami lentos posūkiu arba veidrodiniu atspindžiu, 4×4 lentoje valdoves galima išdėstyti vieninteliu būdu, 5×5 lentoje — dviem būdais ir 6×6 lentoje — vieninteliu būdu. (Skaitytojas pats gali pamėginti rasti tuos sprendinius.) 7×7 lentoje bus jau šeši sprendiniai, 8×8 lentoje — dvylika, 9×9 lentoje — keturiasdešimt šeši, ir 10×10 lentoje — devyniasdešimt du. (Formulė, pagal kurią būtų galima rasti „taikiai sugyvenančių“ valdovių skaičių n eilės lentoje, nežinoma.) Jeigu lentos eilė n nesidalija iš 2 arba 3, tai n sprendinių galima pridengti vieną kitu taip, kad valdovės užims visus lentos langelius. Pavyzdžiui, 5×5 lentoje galima sustatyti 25 valdoves (po 5 skirtingų penkių spalvų vadoves) taip, kad jokios dvi tos pačios spalvos valdovės neatakuotų viena kitos.

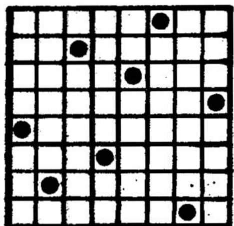
Dvylika pagrindinių (negaunamų viena iš kitos pasukant ar atspindint lentą) valdovių išdėstymo schemų standartinėje 8×8 šachmatų lentoje parodyta 118 paveiksle. Aštuonių valdovių uždaviniui išspręsti yra nemažai literatūros. Pirmasis šį uždavinį iškėlė 1848 metais Maksas Becelis. Dvylika pagrindinių sprendinių 1850 metais paskelbė Francas Naukas. Įrodyti, kad tais dvylika sprendimų išnaudotos visos galimybės, vis dėlto nelengva. Tai 1874 metais, remdamasis determinantų teorija, sugebėjo padaryti anglų matematikas Dž. U. L. Glešeris.

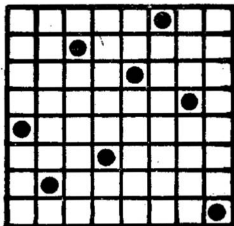
Pasukant ir atspindint lentą, kiekvienas iš vienuolikos pagrindinių sprendinių generuoja kitus septynis. Išimtis tik dešimtasis sprendinys: jis simetriškas, todėl generuoja tik tris kitus sprendinius. Taigi iš viso yra devyniasdešimt du uždavinio apie aštuonias valdoves sprendiniai. Dešimtasis, pagrindinis sprendinys — vienintelis, kuriame centrinėje lentos dalyje (4×4 kvadrate) nėra valdo-

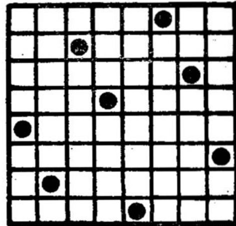

1

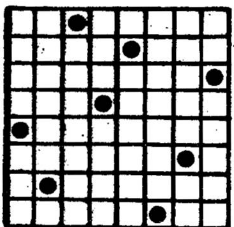

2

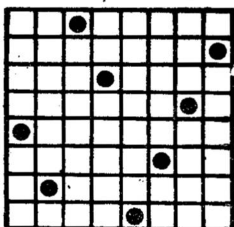

3

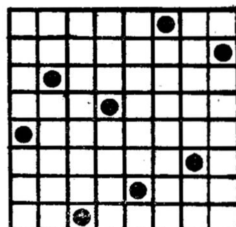

4

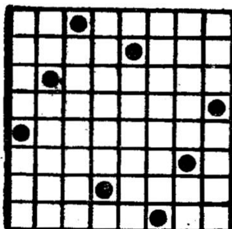

5

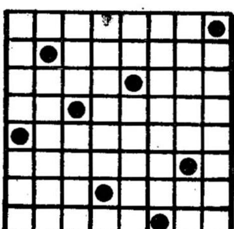

6

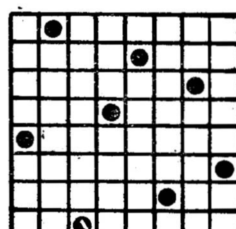

7


8


9


10


11


12

118 pav. Dvylika klasikinio uždavinio apie aštuonias valdoves sprendinių

vių. Dešimtasis ir pirmasis sprendinys turi vieną bendrą savybę: ir viename, ir kitame nėra valdovių pagrindinėse įstrižainėse. Įdomiausias yra septintasis sprendinys: jame nerasime trijų valdovių (turėsime galvoje langelių, kuriuose stovi valdovės, centrus), esančių vienoje tiesėje. Skaitytojas gali patikrinti šį teiginį, kitų sprendinių schemose nubrėždamas tieses, kuriose yra trys ar keturios valdovės. (Šiuo atveju tiesės bus ne tik lentos įstrižainės.) Kartkartėmis koks nors galvosūkių mėgėjas paskelbia, kad jam, girdi, pasisekę rasti dar vieną uždavinio apie aštuonias valdoves sprendinį, kuriame, taip pat kaip ir septintajame sprendinyje, nerasime trijų valdovių, išdėstytų vienoje tiesėje. Atidžiai panagrinėjus, pasirodo, kad „naujasis" sprendinys gaunamas iš 7 sprendinio, atitinkamai pasukus ar atspindėjus lentą. Reikia pridurti, kad kartais tenka išgirsti tvirtinant, jog uždavinys apie aštuonias valdoves neturi sprendinio, pagal kurį viena valdovė stovėtų lentos kampe. Kaip matyti iš 118 paveikslo, egzistuoja net du sprendiniai (5 ir 11), kuriuose viena valdovių stovi kampiniame langelyje. Abu sprendiniai turi dar vieną įdomią savybę: viena valdovių stovi ketvirtajame iš apačios kairės lentos pusės langelyje.

Suprantama, galima imti ne tik valdoves. Labai įdomių uždavinių galima sugalvoti ir kitoms figūroms. Imkime, pavyzdžiui, bokštus. n eilės lentoje, taip pat kaip ir valdovių atveju, galima išdėstyti ne daugiau kaip n vienas kito neatakuojančius bokštus. Priešingu atveju, kokie nors du bokštai pasirodytų esą išdėstyti toje pačioje vertikalėje arba toje pačioje horizontalėje. Universalus metodas, kuriuo remiantis, galima išspręsti uždavinį apie vienas kitą neatakuojančius bokštus bet kokios eilės lentoje, yra bokštų išrikiavimas išilgai pagrindinės įstrižainės. n eilės lentoje galimi $n!$ ($n!$ reiškia faktorialą, tai yra $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\, n$) sprendiniai, tačiau atrinkti tuos, kurie gaunami vienas iš kito pasukant ir atspindint lentą, taip sunku, kad iš esmės skirtingų sprendinių skaičius nenustatytas net standartinei 8×8 lentai.

Analogiškas uždavinys apie vienas kitą neatakuojančių rikių išdėstymą n eilės lentoje turi $2n-2$ sprendinius. Įrodymui pastebėsime, kad įstrižainių, einančių viena kryptimi, skaičius lygus $2n-1$. Iš jų dvi įstrižainės turi tik po vieną (kampinį) langelį. Šių vienalangių įstrižainių rikiai negali užimti tuo pačiu metu, nes priešingu atveju

jie atakuoja vienas kitą pagrindinėmis įstrižainėmis, jungiančiomis tuos kampinius langelius. Vadinasi, maksimalus skaičius rikių, kuriuos galima išdėstyti lentoje taip, kad neatakuotų vienas kito, lygus $2n-2$. Įrašę į šią formulę $n=8$, gauname, jog standartinėje 8×8 lentoje maksimalus vienas kito neatakuojančių rikių skaičius lygus 14. Djudenis parodė, kad šiuos 14 rikių galima išdėstyti 36 iš esmės skirtingais būdais. Bendras uždavinio apie vienas kito neatakuojančių rikių išdėstymą n eilės lentoje sprendinių skaičius 2^n, tačiau, taip pat kaip ir uždavinyje apie bokštus, sunku nurodyti, kokie sprendiniai iš esmės skirtingi, o kokie gaunami vienas iš kito, pasukant ar atspindint lentą. Maksimalaus „nesipykstančių" rikių skaičiaus išdėstymo n eilės lentoje metodas toks: reikia n rikių išdėstyti langeliuose, esančiuose viename lentos krašte, kitus (jų yra $n-2$) išdėstyti priešingame krašte, palikus laisvus kampinius langelius.

Maksimalus skaičius karalių, neatakuojančių vienas kito, lygus $\frac{n^2}{4}$ lyginės eilės lentai ir $\frac{(n+1)^2}{4}$ — nelyginės eilės lentai. Viena karalių išdėstymo schema gaunama, išdėsčius juos kvadratinės gardelės mazguose taip, kad vienas nuo kito būtų nutolę per langelį. Nustatyti, keliais skirtingais būdais $n\times n$ lentoje gali būti išdėstytas maksimalus skaičius vienas kito neatakuojančių karalių, labai sunku. Šį uždavinį neseniai išsprendė K. Fabelis ir H. E. Kempas.* 8×8 lentoje, įskaitant ir sprendinius, gautus, pasukant bei atspindint lentą, galimas 281 571 sprendinys.

Žirgą dėl keistokų šuolių Djudenis vadino „paniekos vertu šachmatų lentos juokdariu." Vienas kito neatakuojančių žirgų išdėstymo uždavinį, matyt, lengviau analizuoti, negu analogišką uždavinį kitoms šachmatų figūroms. Kam lygus didžiausias skaičius žirgų, kuriuos standartinėje 8×8 šachmatų lentoje galima išdėstyti taip, kad nebūtų nė vienos vienas kitą atakuojančių žirgų poros? Keliais iš esmės skirtingais būdais galima išspręsti šį uždavinį?

---

* E. Bonsdorf, K. Fabel, I. Riihimaa. Schach und Zahl. Düsseldorf, 1966.

Uždavinys apie šachmatų lentų dalijimą į dvi ir keturias lygaus dydžio ir vienodos formos dalis sužadino daugelio skaitytojų vaizduotę. Vieni jų patikrino, ar teisingas Djudenio nurodytas rezultatas 255, reiškiąs 6 eilės lentos dalijimo į dvi lygias (ir dydžiu, ir forma) dalis variantų skaičių. Kiti sudarė programas ir, ESM padedami, gavo atsakymus 7 ir 8 eilės lentoms. 7 eilės lentoms gauti 1897 sprendiniai, 8 eilės — 92 263 sprendiniai. Vėliau buvo rasti ir 9 eilės lentos dalijimo į dvi lygias dalis sprendiniai. Jų gauta 1 972 653. Šį rezultatą ESM gavo per 22 minutes.

Vienas programų sudarinėtojų pranešė autoriui, kad jo programa buvusi pagrįsta tokiu samprotavimu: linija, dalijanti lentą į dvi lygias dalis, būtinai turi eiti per lentos centrą, kuris pačią liniją dalija į dvi lygias dalis; abi linijos dalys turi būti išsidėsčiusios simetriškai centro atžvilgiu. „Mašinos, veikiančios pagal mūsų programą, veiksmai primena veiksmus pelės, kuri mėgina ištrūkti iš labirinto, — rašė jis. Ji visada pradeda iš lentos centro. Kiekvienas ėjimas reiškia vieną langelio kraštinės ilgio žingsnį, be to, mašina visą laiką daro posūkį į dešinę. Pataikiusi į jau nueitą kelio atkarpą, mašina atsitraukia per vieną žingsnį, 90° kampu pasisuka kairėn ir važiuoja toliau. Pasiekusi lentos kraštą, ji įsimena gautąjį sprendinį, paskui vėl per žingsnį atsitraukia, pasuka kairėn ir t. t. Taip ji randa visus galimus sprendinius. Rezultatai atspausdinami, kai mašina randa tiesų kelią nuo lentos centro iki krašto pirmojo žingsnio kryptimi“.

Tokio tipo programa gali būti taikoma tik lyginės eilės lentoms. Sudaryti programą nelyginės eilės lentoms su skyle centriniame langelyje kur kas sunkiau.

Daugelį skaitytojų sudomino aštuonių valdovių uždavinys — jo istorija, apibendrinimai, įvairios įdomios detalės. Iš visos šiam uždaviniui skirtos literatūros išsamiausiu laikytinas Arenso * darbas. Jame pateikti pagrindiniai sprendiniai visų eilių iki 13 lentoms. Bendras sprendinių skaičius žinomas ir aukštesnių eilių lentoms, tačiau jeigu

---

* A. Ahrens. Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Leipzig, 1910, Bd. 1, Kap. 9.

pagrindinių sprendinių 14 eilės lentai skaičių kas nors ir rado, autorius apie šį skaičių dar nieko nežino.

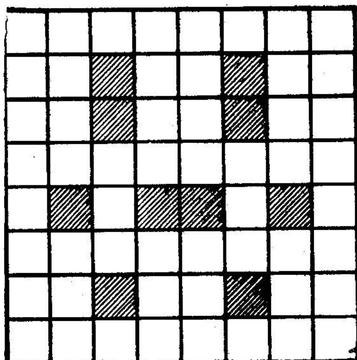
Vienas skaitytojų atkreipė mano dėmesį į paprastą ir puikų įrodymą, kad pagrindiniai aštuonių valdovių uždavinio 8 eilės lentoje sprendiniai (iš 12 sprendinių, pavaizduotų 118 pav.) negali būti uždėti vienas ant kito taip, kad uždengtų visus 64 langelius. Šio įrodymo (1914 m.) autorius yra F. Gosetas. Reikia nubraižyti 8×8 lentą, užtušuoti po keturis langelius viduryje eilučių, prisiglaudusių prie kraštų, ir keturis 6×6 lentos, esančios didžiosios lentos centre, kampinius langelius. Išdėstę lentoje 8 valdoves pagal bet kurią iš 12 pagrindinių schemų, pamatysime, kad mažiausiai 3 valdovės yra užtušuotuose langeliuose. Jeigu būtų galima uždėti vieną ant kito daugiau kaip šešis uždavinio apie aštuonias valdoves sprendinius, tas reikštų, jog užtušuotuose langeliuose (kurių iš viso 20) turėtų būti mažiausiai 21 valdovė, ir kiekviena stovėtų savo langelyje. Gautasis prieštaravimas įrodo, kad uždėti pagrindinius uždavinio apie aštuonias valdoves sprendinius vieną ant kito taip, kad neliktų nė vieno tuščio lentos langelio, negalima.

Įdomus uždavinio apie aštuonias valdoves variantas gaunamas tuo atveju, jeigu, tarkime, kiekviena valdovė darys ėjimus ne tik kaip bokštas ir kaip rikis (tradiciškai), bet ir kaip žirgas. Ar galima n „supervaldovių" išdėstyti $n \times n$ lentoje taip, kad jos neatakuotų viena kitos? Nesunku įrodyti, kad šis uždavinys neturi sprendinio, jeigu lentos eilė ne didesnė už 9. Vienas skaitytojas išnagrinėjo 92 uždavinio apie valdoves 10 eilės lentoje sprendinius ir padarė išvadą, kad tik vienu atveju visas 10 valdovių galima laikyti „supervaldovėmis". Šį unikalų atvejį paliekame rasti pačiam skaitytojui.

Uždavinio apie vienas kito neatakuojančius bokštus sprendinius rado du skaitytojai. Be ESM pagalbos jie rado 5 282 pagrindinius sprendinius 7 eilės lentoje ir 46 066 — 8 eilės lentoje. Vienas jų pranešė, kad 9 eilės lentoje galimi 456 454 sprendiniai, tačiau šis rezultatas iki šiol dar nepasitvirtino. Pagrindinių sprendinių skaičius lentose nuo 2 iki 7 eilės atitinkamai sudaro 2, 7, 23, 115, 694.

Kad iš 8×8 lentos nebūtų galima iškirpti graikiško kryžiaus formos pentamino, iš jos reikia iškirpti mažiausiai dešimt langelių. Uždavinys turi daug sprendinių. Vie-

nas jų, kurį atrado V. Lionsas, pavaizduotas 119 paveiksle.



119 pav. Golombo uždavinio sprendinys

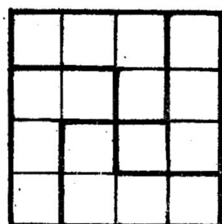
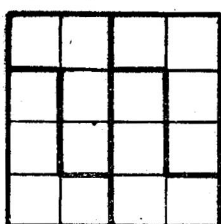
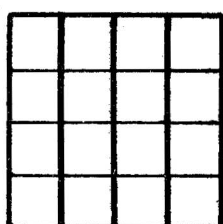
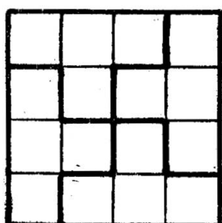
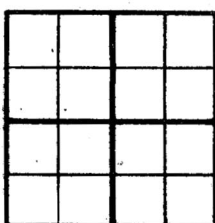
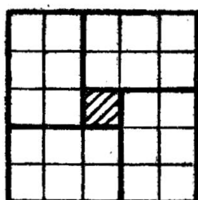
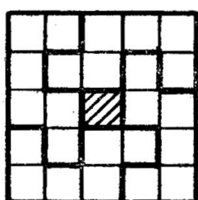
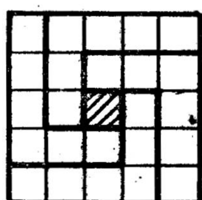
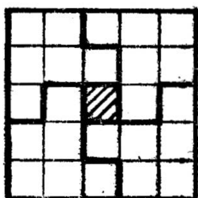
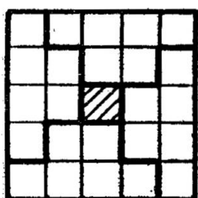
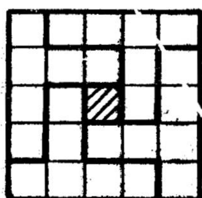
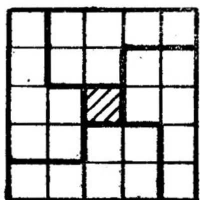
4×4 lentą į keturias vienodas dalis galima sukarpyti tik penkiais būdais. Visi jie parodyti 120 paveikslo viršuje. Pusę lentos viršutinės paveikslo eilės centre galima pakeisti jos veidrodiniu atspindžiu, bet tada dviejų ketvirtadalių negalima bus uždėti vieno ant kito, jų neapvertus. 5×5 lentą (su skyle centre) galima padalyti į keturias vienodas dalis septyniais būdais. Visi jie pavaizduoti 120 paveikslo apačioje.

Standartinėje lentoje galima išdėstyti daugiausia 32 žirgus taip, kad jie neatakuotų vienas kito: po vieną žirgą kiekviename vienos spalvos langelyje. Įdomią detalę mums pateikė Dž. Tompsonas. Keli šachmatininkai, susirinkę viename Niujorko viešbutyje, uždavinį apie žirgų išdėstymą nagrinėjo taip audringai, kad aistroms numaldyti viešbučio tarnautojas iškvietė policiją.

XXII skyrius

Žaidimas virvute

Panašiai kaip japonų popieriaus lankstymo senovės menas — origami — žavus figūrų, kurias galima išlankstyti iš paprasto švaraus popieriaus lapo, įvairove, žaidimai virvute, arba kaip juos vadina Anglijoje ir JAV, „kačių lopšeliai“, žavūs žaismingų ir nepaprastai gražių raštų, kuriuos galima išpinti paprasta virvės kilpa, įvairo-

120 pav. 4×4 (viršuje) ir 5×5 (apačioje) lentos dalijimas į keturias vienodo dydžio ir vienodos formos dalis

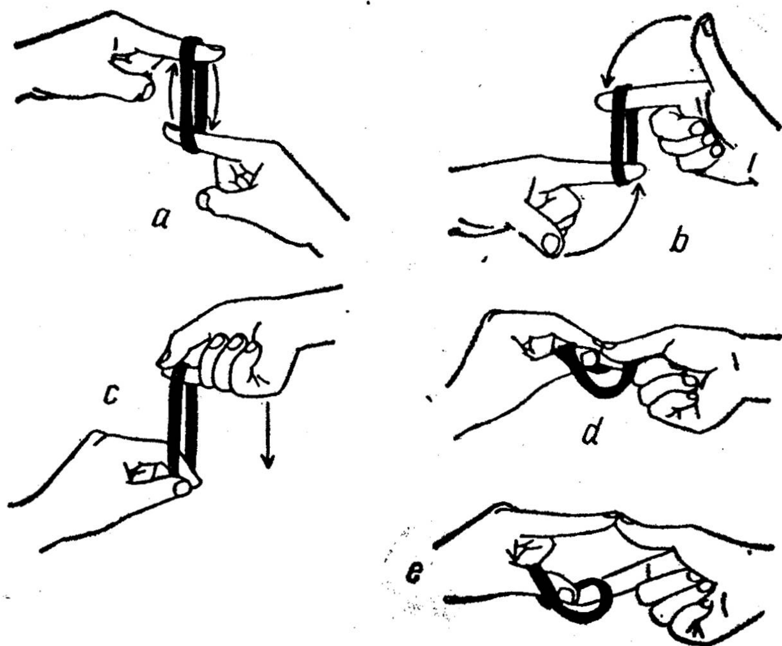
ve *. Žaidimui reikia labai paprasto inventoriaus: paimti maždaug pusantro metro ilgio virvutę ir surišti jos galus. Gautąją kilpą galima laikyti paprastos uždaros kreivės modeliu. Atliekant visokias manipuliacijas virvute, nesikeičia tik virvutės ilgis ir jos topologinės savybės, todėl žaidimą virvute galima laikyti topologiniu žaidimu plačiąja prasme.

Žaidimai virvute skirstomi į du pagrindinius tipus: pirmajam priklauso visokie „išnarpliojimai" ir „suraišiojimai", antrajam — virviniai raštai. Pirmojo tipo žaidimuose atrodo, jog virvutė tarytum apraizgyta apie kažkokį daiktą ir net perpinta su juo, tačiau, patraukus virvutę už galo, ji, jūsų nuostabai, stebuklingai išsinarplioja! Kitame to paties tipo žaidimų variante virvutė nesuprantamu būdu suveržia kokį nors daiktą. Šių žaidimų yra labai įvairių: virvutė perkišama per švarko kilpą ir surišama mazgu, paskui, vos tik truktelėta už galo, ji keistu būdu atsiriša, kilpos, užmestos ant kaklo, rankos, kojos (ir net ant nosies), nesuprantama kaip išsileidžia ir t. t. Kartais virvutė užmezgama ant kieno nors smiliaus. Po kelių žaismingų triukų belaisvis išlaisvinamas. Kituose fokusuose — „išlaisvinimuose" virvutė, sudėtingiausiai apnarpliota apie kairės rankos pirštus, netikėtai lengvai išsilaisvina, patraukus ją už laisvojo galo. Yra daugybė apgavikiškų fokusų, kuriuos seniau demonstruodavo mugėse, variantų. Aš turiu galvoje vadinamą „fokusą su raiščiu" (anais laikais, kai vyrai nešiojo šilkines kojines, jis neretai būdavo atliekamas su kojinės raiščiu): virvutė padedama ant stalo gana įmantria su persikirtimais kreive, pageidaujančiam siūloma eiti lažybų (suprantama, iš pinigų), ar sugebės jis įbesti pirštą į tokią kilpą, kuri, patraukus virvutę už galo, susismaugs arba, atvirkščiai, nesusismaugs. Suprantama, žiūrovas visada prakišdavo lažybas, nes sukčius, susilažinęs su juo, mokėjo labai gudriai numatyti lažybų pasekmes savo naudai.

Labai populiarus ir toks fokusas. Virvelės kilpą sudėkite dvigubą tris kartus iš eilės. Išeis nedidelė kilpa iš aštuonių virvelės eilių. Prakiškite per ją abiejų rankų smilius ir pradėkite kilpą sukti apie pirštus taip, kaip

---

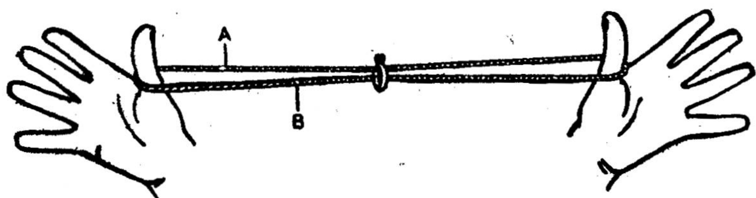
* Plačiau apie šį žaidimą jūs galite pasiskaityti straipsnyje «Веревочные узоры», kuris atspausdintas žurnale «Наука и жизнь», 1966, Nr. 7. — *Vert. į rusų k. past.*



121 pav. Virvinės kilpos išlaisvinimo fokusas

parodyta 121 paveiksle, *a*. Sustokite 121 paveiksle, *b*, nurodytoje padėtyje ir suspauskite abiejų rankų nykščius ir smilius (121 pav., *c*). Palengva nuleiskite dešinę ranką ir suspauskite nykščių ir smilių galus, kaip parodyta 121 paveiksle, *d*. Atkreipkite dėmesį į tai, kad dešinės rankos nykštys liečia kairės rankos smilių, o kairės rankos nykštys — dešinės rankos smilių. (Stenkitės į tai neatkreipti žiūrovų dėmesio: čia ir slypi fokuso esmė!) Laikydami nykščius prispaustus prie smilių, pakelkite dešinės rankos nykštį ir kairės rankos smilių taip, kaip parodyta 121 paveiksle, *e*. Kilpa liks laisvai gulėti ant kairės rankos nykščio ir dešinės rankos smiliaus. Dabar, neatitraukdami sujungtų pirštų, lengvai nukratysite kilpą nuo rankų.

Paprašykite, kad bet kuris pageidaujantis pakartotų jūsų veiksmus, ir jis įsitikins, jog tai itin sunku. Dauguma žmonių galvoja, kad nykštys liečia nykštį, o smilius — smilių. Taip sujungus pirštus, kilpos tikrai neįmanoma iš-



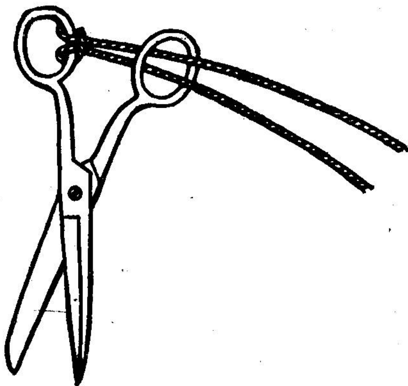
122 pav. Fokusas su žiedeliu

laisvinti, neišskėtus pirštų žiedo, o išskėsti, suprantama, negalima. Treniruokitės, kol išmoksite fokusą atlikti sklandžiai ir greitai, tuomet niekas iš žiūrovų negalės pakartoti jūsų manipuliacijų, kad ir kiek tą fokusą demonstruotute.

Visai kitas fokuso tipas yra žiedo nuėmimas nuo per jį perkištos virvelės kilpos. Virvelės kilpą, prakištą pro žiedą, užmaukite ant abiejų žiūrovo rankų nykščių (122 pav.). Paprasčiausia žiedą numauti taip. Ištiestą kairės rankos pirštą uždėkite ant abiejų virvelių taške *A*. Dešine ranka paimkite virvelę, kuri arčiau jūsų, taške *B* ir, pakėlę ją, užnerkite ant žiūrovo dešinės rankos nykščio (jums iš kairės) rato judesiu (iš pradžių į save, paskui nuo savęs). Pamažu lenkite kairės rankos smilių, kad abi kilpos atšakos įsitemptų. Patraukite žiedą kuo daugiau į kairę. Dešine ranka paimkite viršutinę virvutę žiedo dešinėje ir kilstelėję užnerkite ją ant žiūrovo dešinės rankos nykščio (šį kartą rato judesys turi būti atvirkščias pirmajam: iš pradžių nuo savęs, paskui į save).

Sustokite ir paprašykite žiūrovą stipriai suspausti abiejų rankų nykščių ir smilių galus, „kad kilpa negalėtų nusmukti." Paimkite žiedą dešine ranka ir paprašykite žiūrovą, jums suskaičiavus iki „trijų", išskėsti rankas. Sukomandavę „trys!", ištraukite kairės rankos smilių iš kilpos. Žiedas liks jūsų dešinėje rankoje, o virvinė kilpa — ant žiūrovų pirštų. (Kad sustiprintute įspūdį, pastumkite žiedą į dešinę. Tuomet žiūrovui atrodys, jog žiedas nusimauna nuo kilpos prie kairės rankos nykščio, kur, kaip jis tvirtai žino, kilpa niekaip negali nusmukti.) Šis fokusas ypač patinka vaikams, nes jis labai paprastas, ir jie gali be vargo demonstruoti jį savo draugams.

Išmokę šį fokusą, pabandykite gudresnį jo variantą, kai ant virvutės užneriami trys žiedai, o nuimamas tik



123 pav. Kaip, neperpjovus virvutės, išlaisvinti žirkles

vienas vidurinis. Fokusas pradedamas taip pat, kaip ir išnagrinėtuoju atveju: ant žiūrovo dešinės rankos nykščio užmetama kilpa. Paskui du žiedai pastumiami į kairę, o vienas — į dešinę, prie žiūrovo kairės rankos nykščio. Paėmę viršutinę virvutę iš dešinės nuo dviejų žiedų, prieš užnerdami ant žiūrovo dešinės rankos nykščio, perkiškite ją per pirmąjį žiedą. Tuomet dešine ranka paimkite vidurinį žiedą ir baikite fokusą taip, kaip pirma. Vidurinis žiedas liks jūsų rankose. Ar sugebėsite savarankiškai sugalvoti seką operacijų, kurias atlikus, žiedas vėl atsidurtų ant virvutės tarp ant jos jau kabėjusių žiedų?

123 paveiksle fokusas apie daikto „išlaisvinimą“ pavaizduotas kaip galvosūkis. Pririškite žirkles prie vieno virvutės galo taip, kaip parodyta paveiksle, o kitą virvutės galą pririškite prie kėdės atkaltės. Reikia „išlaisvinti“ žirkles, neperkirpus virvutės ir neatrišus jos nuo kėdės atkaltės. Šis galvosūkis labai paprastas, tad skelbti jo atsakymo neverta, nors daugeliui jis atrodys sunkus.

Turint virvutės kilpą ir monetą, galima žaisti ir tokį „sugavimais“ ir „išlaisvinimais“ pagrįstą žaidimą (vargu ar skaitytojas ką nors apie jį žino, nes aš visai neseniai jį sugalvojau). Moneta skiausčiai dedama ant stalo. Žaidžiantysis ima kilpą už mazgo ir laiko ją virš stalo taip, kad ji nukarusi liestų monetą, paskui paleidžia mazgą. Virvutė krenta, sudarydama chaotišką kilpų rezginį. Žai-

džiantysis nužiūri bet kurį monetos tašką ir, paėmęs pieštuką, jo smaigalį veda per kilpų rezginį iki įsidėmėto taško. Vienoje rankoje laikydamas pieštuką (smaigalys kietai prispaustas prie monetos), kita ranka žaidžiantysis ima virvutę už mazgelio ir traukia ją į šalį. Labai įtikėtina, kad virvutė užsikabins už pieštuko smaigalio. Jeigu virvutė apie pieštuko smaigalį apsivyniojusi vieną kartą, žaidėjas gauna 1 tašką. Už kiekvieną papildomą apviją jis gauna dar po tašką (pavyzdžiui, jeigu virvutė apsivyniojusi apie pieštuką tris kartus, žaidžiantysis gauna 3 taškus). Jeigu virvutė visai už pieštuko neužsikabinusi, žaidžiantys praranda penkis taškus. Žaidžiama paeiliui. Laimi tas, kuris pirmasis surenka 30 taškų.

Antrajam taip pat gausiam žaidimų virvute tipui priklauso įvairūs raštai ir figūros, kurias galima išpinti iš virvutės kilpos, užnertos ant abiejų rankų. Virvelinių raštų pynimo menas buvo labai paplitęs daugelio civilizacijų vystymosi pradiniame etape. Virveliniai raštai buvo viena pagrindinių pramogų daugelyje eskimų kartų (tiesa, vietoje virvutės jie naudojo elnių sausgysles arba diržus, išpjautus iš kotiko odos). Gana išvystytas virvelinių raštų menas tarp Šiaurės Amerikos indėnų ir Australijos aborigenų, Naujosios Zelandijos, Karolinų, Havajų ir Maršalų salų, Filipinų, Naujosios Gvinėjos čiabuvių. Per daugelį šimtmečių virvelinių raštų pynimo menas šiose tautose (ypač eskimų) taip ištobulėjo, kad galėtų sėkmingai varžytis su figūrų išlankstymo iš popieriaus menu, paplitusiu Rytų šalyse ir Ispanijoje. Buvo sugalvota tūkstančiai raštų. Kai kurie iš jų pasirodė esą tokie sudėtingi (apie juos galime spręsti iš piešinių, kuriuos atliko pirmieji tyrinėtojai antropologai), jog iki šiol dar neišaiškinta, pagal kokią operacijų seką būtų galima „ant pirštų“ gauti tuos raštus. Pirmykščių genčių meistrai pynė savo raštus nepaprastai greitai, dažniausiai tik rankų pirštais (nors kartais prireikdavo dantų ir kojų pirštų). Be to, neretai demonstravimą papildydavo kokia nors daina ar įdomios istorijos pasakojimas.

Virveliniai raštai paprastai buvo vadinami pagal panašumą į tuos daiktus, kuriuos jie primindavo. Dauguma tų „realistinių“ figūrų pasirodo pinant: tarp abiejų rankų delnų netikėtai blyksteli žaibo zigzagas, lėtai leidžiasi saulė, į medį ropščiasi berniukas, išsižioja ir užsičiaupia burna, šuoliuoja žirgas, raitosi gyvatė, nežinia kieno

paleista ietis skrieja pirmyn ir atgal, lėtai lapu slenka vikšras, bandant sugauti musę dviem rankomis, ji dingsta ir t. t. Net statiški paveikslai iš virvutės neretai būna kupini gilaus realizmo. Pavyzdžiui, paveiksle, vaizduojančiame drugelį, viena virvelių susukta spirale, sudarydama drugelio straubliuką.

Tradicinis „kačių lopšelis“ — vienintelis virvelinės kilpos vaikų žaidimas, plačiai paplitęs Anglijoje ir JAV, priskiriamas įdomiai žaidimų virvute rūšiai; žaisti būtinai turi du partneriai. Virvutė paeiliui keliauja iš vienų rankų į kitas, ir kiekvieno perdavimo metu gimsta naujas raštas. Antrojo pasaulinio karo metu JAV armijos kareiviams, dislokuotiems Didžiojo vandenyno salose, buvo rekomenduojama turėti kišenėje virvutės kilpą ir, pastebėjus įtartiną čiabuvį, pradėti žaisti „kačių lopšelį“. Instrukcijos autoriai tvirtino, kad čiabuviai, negalėdami atsispirti pagundai, taip pat įsijungs į žaidimą.

Literatūros apie virvelinius raštus, kaip apie origami, yra nemažai. Pirmieji šį žaidimą mini XIX ir XVIII amžiaus autoriai. Kapitonas Viljamas Blajis ataskaitoje apie „Baunti“ (1787—1790) plaukiojimą praneša matęs, kaip šį žaidimą žaidė Taiti salos čiabuviai. Čarzlas Lembas prisimena, kad „kačių lopšelį“ žaidęs mokykloje. 1879 metais anglų antropologas Edvardas B. Teiloras atkreipė dėmesį į tai, kad figūros iš virvučių yra svarbus genties ar tautos kultūrinio lygio rodiklis, o 1888 metais antropologas Francas Bonsas apskelbė išsamų virvelinių figūrų konstravimo būdų aprašymą. V. Riversas ir Alfredas C. Ezdonas 1902 metais sudarė metodų, taikomų virvelinėms figūroms pinti, nomenklatūrą ir aprašymo sistemą. Nuo to laiko žaidimui virvute buvo skirta daug straipsnių specialiuose antropologijos žurnaluose ir net monografijose. Buvo metas (mūsų amžiaus antrasis dešimtmetis), kai, sutikus žmogų su virvutės kilpa kišenėje, buvo galima drąsiai tvirtinti, jog jis tikriausiai antropologas. Gaila, bet paaiškėjo, kad žaidimas virvute antropologijai ne toks reikšmingas, kaip tikėtasi iš pradžių. Šiandien žmogus su virvutės kilpa kišenėje greičiau pasirodys esąs ne antropologas, o fokusininkas.

Dauguma knygų apie virvelinius raštus seniai bebuvo leidžiamos, bet 1962 metais išėjo antrasis (pirmasis išėjo 1906 metais) išsamiausias iš ta tema išėjusių leidi-

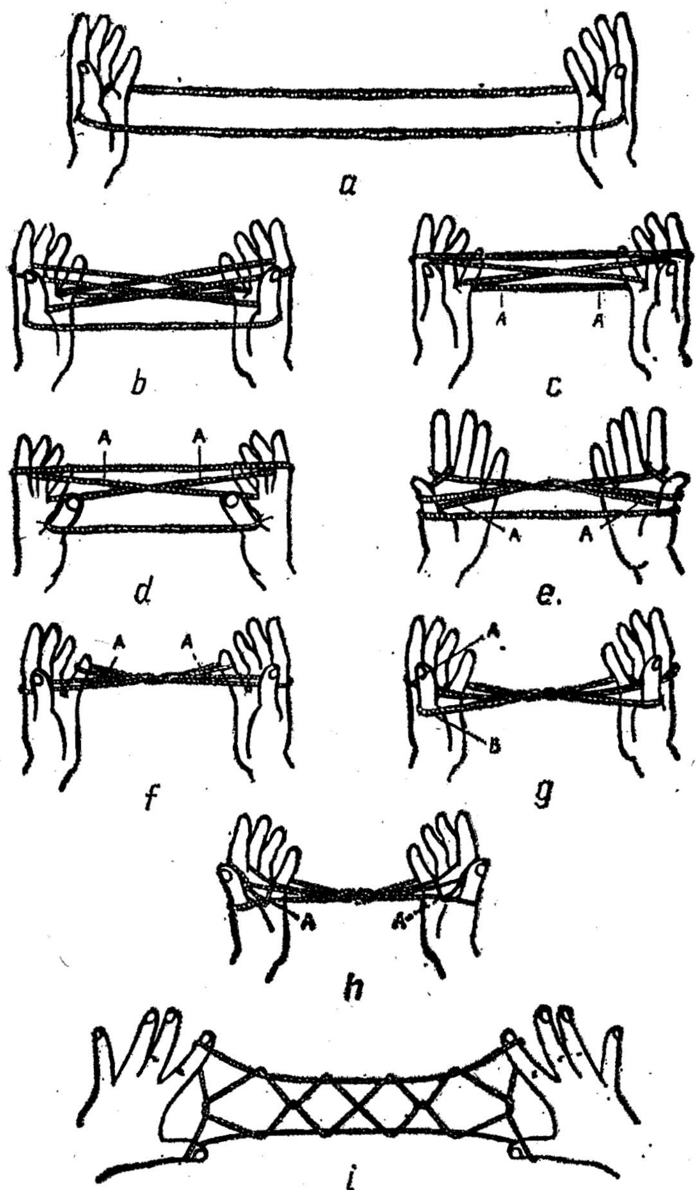
nių — Karolinos Fernesės Džeinės * knygos leidimas. Šiame didelės apimties ir gausiai iliustruotame leidinyje išsamiai nurodyta, kaip sudaryti virš šimto įvairių virvelinių raštų. Leidinys pravartus norintiems susipažinti su daugeliui nauju menu. Tenka apgailestauti, kad virvelinių raštų sudarymo menas plačiau nepaplito; itin naudingi virveliniai raštai galėtų būti pradinių klasių mokytojams, medicinos seserims, prižiūrinčioms ilgam prie lovos prikaustytus ligonius, ir psichiatrams, rekomenduojantiems rankų darbą kaip terapinę priemonę.

Norėdamas patenkinti skaitytojų smalsumą, paaiškinsiu, kaip padaryti vieną paprasčiausių ir labiausiai žinomų rombo formos raštų. Misis Džeinė vadina jį „osedžėjų rombais", mat, šį raštą jai pirmą kartą parodė osedžėjų genties indėnas, tačiau JAV jis dažniau vadinamas „Jokūbo kopėčiomis". Skaitytojas turi paimti pusantro metro ilgio minkštą virvę, surišti jos galus ir „parodyti, ką gali". Truputį pasipraktikavę, „Jokūbo kopėčias" galėsite supinti greičiau kaip per 10 sekundžių.

Pradinė padėtis tokia pati, kaip daugelio virvelinių raštų: kilpa uždėta ant abiejų rankų nykščių ir mažylių pirštų (124 pav., *a*). Dešinės rankos smilium užkabinkite virvę tarp kairės rankos mažylio piršto ir nykščio ir, nenuleisdami virvės nuo smiliaus, grąžinkite dešinę ranką į pradinę padėtį. Kairės rankos smilium užkabinkite virvę tarp dešinės rankos mažylio ir nykščio (kairės rankos smilius šiuo atveju turi pralįsti pro virvę, užkabintą ant dešinės rankos smiliaus) ir patraukite kairę ranką į kairę. Gausite figūrą, kuri parodyta 124 paveiksle, *b*. Išlaisvinę abiejų rankų nykščius ir įtempę virvę, gausite figūrą, pavaizduotą 124 paveiksle, *c*. Pasukite rankas delnais nuo savęs, kad būtų patogiau nykščių galais užkabinti tolimiausią virvės dalį taškuose, 124 paveiksle, *c*, pažymėtais raidėmis *A*. Užkabinę atsukite rankas atgal į pradinę padėtį. Dalis, buvusi toliausiai nuo jūsų, pralįs po visomis kitomis virvės dalimis ir bus arčiausiai jūsų (124 pav., *d*). Sulenkite nykščius virš artimiausių virvės dalių ir užkabinkite jais kitas dalis taškuose, 124 paveiksle, *d*, pažymėtus raidėmis *A*. Numeskite kilpas nuo mažylių pirštų. Gausite 124 paveiksle, *c*, pavaizduotą virvelinę figūrą.

---

* C. F. Jayne. String Figures and How to Make Them. Dover Publications, 1962.



124 pav. Kaip supinti Jokūbo kopėčias

Dabar mažuosius pirštus sulenkite virš artimiausių jiems virvės dalių ir vidine mažųjų pirštų puse užkabinkite virvę taškuose, 124 paveiksle, *e*, pažymėtais raidėmis *A*. Išlaisvinę nykščius, gausite figūrą, pavaizduotą 124 paveiksle, *f*. Sulenkite nykščius virš dviejų artimiausių jiems virvės dalių ir vidine jų puse užkabinkite kitas (trečias nuo jūsų) virvės dalis taškuose, 124 paveiksle, *f*, pažymėtus raidėmis *A*. Grąžinkite nykščius į pradinę padėtį. Gausite 124 paveiksle, *g*, pavaizduotą figūrą.

Dešinės rankos nykščiu ir smiliumi suimkite virvę taške *A* (124 pav., *g*), patraukite į save ir užmeskite kilpą ant kairės rankos nykščio. Tuomet paimkite kilpą, kuri jau buvo uždėta ant kairės rankos nykščio, taške *B* (124 pav., *g*) ir pakelkite tą kilpą, drauge nuleisdami ją nuo nykščio. Šitoks kilpų pasikeitimas dažnai pasitaiko virveliniuose raštuose. Kaire ranka atitinkamai sukeiskite kilpas ant dešinės rankos nykščio. (Virvelinių raštų meistrai sukeičia kilpas ant abiejų pirštų iš karto, tik viena ranka, tačiau pradedančiam geriau laikytis aukščiau aprašyto veiksmų nuoseklumo.) Po visų operacijų turi išeiti 124 paveiksle, *h*, pavaizduota figūra.

Dabar jau viskas paruošta paskutiniam judesiui. Sulenkę smilius, įkiškite jų galus į mažus trikampius, 124 paveiksle, *h*, pažymėtus raidėmis *A*. Išvaduokite iš kilpų mažylius pirštus ir kartu pasukite abi rankas delnais nuo savęs, kuo stipriau išskėtę nykščius ir smilius. (Atlikdami paskutinę operaciją, sekite, kad virvė būtų pakankamai „laisva", kitaip raštas iki galo neatsiskleis.) Ištempkite virvę. Jeigu viską atlikote teisingai, pamatysite kilimėlį iš rombų, kuris pavaizduotas 124 paveiksle, *i*. Netikėtas gražių raštų susidarymas iš virvelinių pynių chaoso yra viena iš maloniausių daugelio manipuliacijų virvute savybių.

Tiems, kurie tobulai įsisavinę virvelinių raštų pynimo meną, gali būti malonu pasirodyti ir poroje, kai vieną ir tą pačią kilpą laiko du žaidėjai: vienas — dešine, kitas — kaire ranka. Žaidžiant dviese, nesunku vienu metu supinti du vienodus raštus iš dviejų kilpų (pirmoji kilpa užmesta ant pirmojo žaidėjo dešinės rankos ir antrojo žaidėjo kairės, antroji kilpa — ant pirmojo žaidėjo kairės ir ant antrojo dešinės). Kur kas sunkiau vienu metu išpinti du skirtingus raštus. Tokiam triukui atlikti reikia didžiulio meistriškumo ir tikslios judesių koordinacijos.

Kitados JAV buvo labai populiarus Džeromo Bario detektyvinis romanas „Kačių lopšelis" („Leopard Cat's Cradle"), kuriame nemaža vietos buvo skirta virvelinėms figūroms. Ant eilinės aukos pirštų arba ant kartono kortelių šalia lavono žudikas būtinai palikdavo virvelinį raštą, simboliškai reiškiantį kurį nors aukos charakterio bruožą. Aš susipažinau su Džeromu Bariu 1962 metais, kai pastarasis dirbo reklamos agentūroje, ir žinojau romano kūrimo istoriją. Pirmą kartą pamatęs virvelinius raštus, Baris, jo žodžiais tariant, buvo taip sukrėstas, kad visur pradėjo nešiotis virvutės kilpą, išnaudodamas pratyboms kiekvieną laisvą minutę. Norėdamas pateisinti savo užsiėmimą, daugybei jį klausinėjančių bendradarbių jis sakydavo, jog virveliniai raštai jam esą reikalingi detektyviniam romanui, kurį jis rašąs. Klausinėjančių buvo tiek daug, kad galų gale Baris iš tikrųjų turėjęs sėsti prie detektyvinio romano, kurio intrigos pagrindas ir buvo virveliniai raštai. Šeštajame dešimtmetyje virvelinius raštus jis antrąkart panaudojo jau televizijos detektyviniam filmui. Aktorius, kuris atliko svarbiausią vaidmenį, niekaip negalėjo išmokti gudraus virvelinių mazgų sudarymo meno, dėl to teko tuos raštus iš anksto supinti ir aptepti klijais, kad virvutė būtų standi. Televizijos kamera rodydavo aktorių, atliekantį pirmąjį judesį, paskui stambiu planu Bario rankas, išpinančias visą figūrą iki galo, ir vėl aktorių su gatavu tvirtu karkasu ant pirštų.

O štai kokį laišką atsiuntė man A. Ričardas Kingas, pradinės mokyklos mokytojas iš Kanados.

Gerbiamas misteri Gardneri!

„Jokūbo kopėčios", žodis „pasitikėjimas" ir mano paties nepilnavertiškumo jausmas man tapo beveik sinonimais. Viskas prasidėjo nuo jūsų straipsnio apie virvelinius raštus...

Aš esu indėnų mokyklos ketvirtos klasės mokytojas. Žaidimas virvute, apie kurį buvo kalbama jūsų straipsnyje, pasirodė man gana paranki priemonė vaikų dėmesiui sutelkti. Niekuomet iki tol aš nebuvau pastebėjęs, kad kuris nors iš jų būtų žaidęs šį žaidimą. Kartą aš parodžiau mažyliams keletą paprastų „kačių lopšelio" figūrų; jie su malonumu stebėjo visas mano manipuliacijas, tačiau jokių savarankiškų jų pačių veiksmų nepastebėjau. (Vaikai, apie kuriuos pasakoju, susirinko į mokyklą iš įvairių vidinio Jukono rajonų. Jie buvo skirtingų indėnų genčių, ir jokia kita kalba, išskyrus anglų, nekalbėjo. Pagal savo kilmę jie buvo klajoklių tautos, kalbėjusios įvairiais „atapaskan" kalbos dialektais ir žinomos kučinų, chano arba kaskų vardais, palikuonys.)

Mano pastangos sudaryti „Jokūbo kopėčias“ buvo energingos, tačiau bevaisės. Išbandęs, matyt, visus neteisingus variantus, aš galų gale išmokau nuosekliai atlikti reikalingus veiksmus, bet paskutinis veiksmas man nepasisekė, ir aš atsisakiau sumanymo išmokyti to rašto savo klasės vaikus, galvodamas, jog jis jiems bus per sunkus.

Po mėnesio ar daugiau aš vedžiau gana nuobodžią pamoką. Mes nagrinėjome žodį „pasitikėjimas“, pasitaikiusį rašybos pamokoje. Jau buvome išsiaiškinę frazių „prarasti pasitikėjimą“, „pateisinti pasitikėjimą“ prasmę. Nė viena jų mums nebuvo sunki. Tačiau apčiuopti skirtumą tarp frazės „naudotis pasitikėjimu“ ir frazės „turėti pasitikėjimą“ mums nė kaip nesisekė.

Viena geriausių mano mokinių, paprastai puikiai suvokianti prasmę to, apie ką kalbama klasėje, pavargusi nuo begalių, bet vis dėlto nesuprantamų aiškinimų, tingiai vartė rankose iš siūlo surištą kilpą. Vos pastebimas rankų judesys, ir ... pamačiau „Jokūbo kopėčias!“ Tai buvo nepamirštamas reginys. Neatsimenu, ką aš pasakiau, tačiau iš nustebimo išsižiojau. Švelniai, kad mergaitė nepamanytų, jog aš ruošiuosi ją nubausti, pabandžiau išsiaiškinti, kur ji išmoko virvelinių raštų pynimo meno.

Tačiau mane apėmusio nustebimo negalima nė lyginti su nustebimu vaikų, nesuprantančių, kodėl mane sudomino toks menkniekis. Tokį mažmožį mokėjo atlikti visi! Kadangi mokytojui „ne visi namie“ ir jis leidžia klasėje užsiiminėti tokiais dalykais, be to, matyt, jam tai patinka, tai ką gi, parodysime jam savo meną! Taip aš išvydau „vainiką“, „arbatos puodelį“, „berniuką sūpuoklėse“ ir daugybę rombinių raštų. Tiksliai neatsimenu, bet greičiausiai visai apie „pasitikėjimą“ tą dieną nebuvo tarta nė žodžio.

Paaiškėjo, kad šio žaidimo mažylius išmokė vyresnieji vaikai. Suaugusieji prisiminė, kad kadaise mokykliniais metais jie mokėjo išpinti virvelinius raštus, bet, į ką aš tik nesikreipiau, nė vienas negalėjo prisiminti, kaip tai daroma. Nors ir mane visi įtikinėjo, kad, „truputį pasipraktikavę“, galėtų iš naujo išmokti to meno. Žaidimui virvute niekas iš suaugusių neteikė jokios reikšmės. „Taip sau, vaikų žaidimas“, — kalbėjo jie.

Paveiksle pavaizduotos ir jūsų straipsnyje aprašytos „Jokūbo kopėčios“ priskiriamos tiems raštams, kuriuos vaikai laikė nesudėtingais ir vadino tiesiog „dvejetu“, „trejetu“ ir t. t. pagal rombų išbaigtame rašte skaičių. Mažyliai be ypatingo vargo įsigudrindavo prieiti iki „šešeto“.

...Jūs buvote visiškai teisus, tvirtindamas, kad tuos raštus galima lengvai išmokti atlikti greičiau kaip per 10 sekundžių. Žaidimų su kilpa, uždėta ant skirtingų dviejų žmonių rankų, variantas vaikams buvo naujiena. Jie greitai įsisavino jį ir su malonumu žaidė...

Dėkoju už straipsnį, kuris padėjo man atrasti tokį įdomų dalyką“.

XXIII skyrius

Pastovaus pločio kreivės

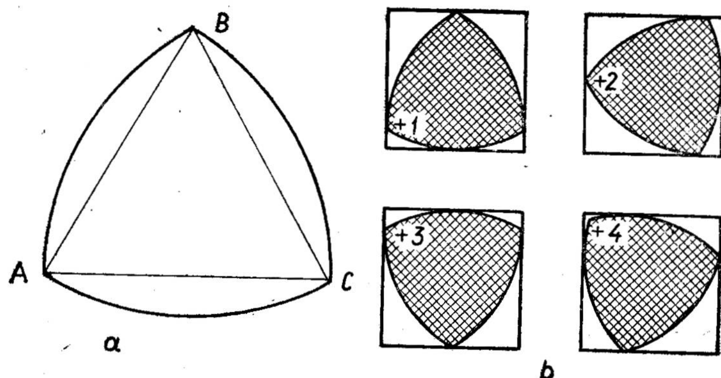
Kasdieniniame gyvenime neretai reikia pervežti iš vietos į vietą sunkų daiktą. Naudotis vežimėliu ne visada patogu: jo ašys nuo didelio apkrovimo gali sulinkti ir net įtrūkti. Tokiais atvejais sunkus daiktas dedamas ant platformos, po kuria pakišti ritinio formos volai. Platformai pajudėjus, laisvi užpakaliniai volai pernešami į priekį ir paklojami prieš platformą. Nei platforma, nei ramiai ant jos gulintis daiktas, riedant volams lygiu horizontaliu paviršiumi, visai nejuda vertikaliai dėl to, kad ritinio formos volų skersinis pjūvis yra skritulys, o skritulio kontūras — apskritimas — yra viena tų uždarų kreivių, kurioms būdinga savybė — „pastovus plotis". Įspraudę uždarą kreivę tarp dviejų lygiagrečių tiesių, gausime du lietimosi taškus, kurių atstumą laikysime duotos kreivės pločiu lygiagretėms tiesėms statmena kryptimi. Elipsė visomis kryptimis, suprantama, yra nevienodo storio: platforma, uždėta ant elipsinio cilindro formos volų, riedant volams, siūbuotų vertikaliai (jūreivių žodžiais tariant, „jaustųsi diferentas", tai yra laivo priekio vertikalus siūbavimas). Dėl to, kad apskritimo plotis visomis kryptimis vienodas, jį galima ridenti tarp dviejų lygiagrečių tiesių, nekeičiant atstumo tarp jų.

Ar, be apskritimo, egzistuoja kitos uždaros pastovaus pločio kreivės? Dauguma žmonių mano, kad tokių kreivių nėra, drauge parodydami, jog labai gali suklaidinti matematinė intuicija. Iš tikrųjų pastovaus pločio kreivių be galo daug. Bet kuri jų gali būti skersinis pjūvis volo, kuriuo platforma judės taip pat lygiai, kaip ir ritiniu. Jeigu pastovaus pločio kreivės nebūtų atrastos, technika pergyventų lemtingiausią perversmą! Įsivaizduokime, kad laivų statykloje surenkamas povandeninio laivo korpusas, tikrinant jo cilindriškumą maksimalaus skersmens visomis kryptimis matavimais. Greitai sužinosime, kad tokio laivo korpusas galėtų būti labai deformuotas ir vis dėlto jis sėkmingai praeitų aukščiau minėtą patikrinimą. Dėl to povandeninio laivo cilindriškumas tikrinamas specialiais šablonais.

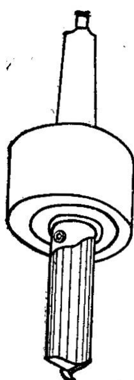
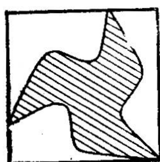
Paprasčiausia pastovaus pločio kreivė, nepanaši į apskritimą, matematiko ir inžinieriaus Franco Relo (1829—1905), Berlyno karališkosios aukštosios technikos mokyklos dėstytojo, garbei pavadinta Relo trikampiu. Kreivė matematikams buvo žinoma ir iki Relo, bet jis pirmasis įrodė jos nuostabią savybę — pastovų plotį. Nubrėžti Relo trikampį nesunku. Pirmiausia reikia nubrėžti lygiakraštį trikampį *ABC* (125 pav., *a*), paskui iš taško *A*, kaip iš centro, nubrėžti apskritimo, jungiančio taškus *B* ir *C*, lanką. Analogišką operaciją reikia atlikti, centrais parenkant taškus *B* ir *C*. Gautasis „iškreiptas trikampis" (taip šią figūrą vadino Relas), aišku, yra pastovaus pločio, kuris lygus lygiakraščio trikampio *ABC* kraštinei.

Jeigu pastovaus pločio kreivė įsprausta tarp dviejų lygiagrečių tiesių porų ir viena pora statmenai kerta kitą, ta pastovaus pločio kreivė būtinai turi būti įbrėžta į kvadratą. Relo trikampis, kaip ir apskritimas ar kokia nors kita pastovaus pločio kreivė, gali suktis kvadrate, visą laiką liesdamas visas keturias kvadrato kraštines (125 pav., *b*). Skaitytojas gali tuo įsitikinti, iškirpęs iš kartono Relo trikampį ir įstatęs jį į atitinkamų matmenų kvadratinę skylę.

Sukantis Relo trikampiui kvadrate, kiekviena jo viršūnių apeina beveik visą kvadrato perimetrą. Nedidelis nuokrypis pastebimas tik arti kvadrato viršūnių: kampai išeina truputį apvalūs. Relo trikampis pritaikomas daugelyje



125 pav. Relo trikampis:
a — brėžimas; *b* — sukimas kvadrate

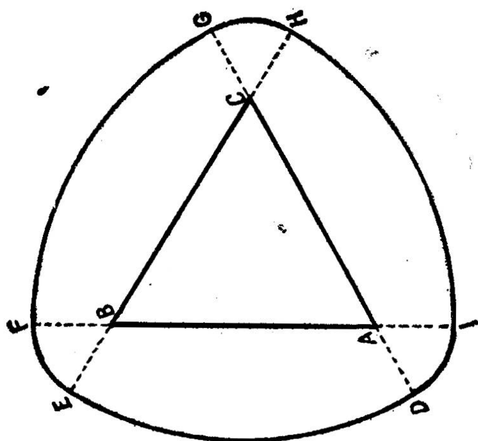



126 pav. Vatso grąžtas ir jį suspaudžiantis patronas

mechaninių įrenginių, tačiau niekur nepasinaudojama jo, kaip pastovaus pločio kreivės, nuostabia savybe. Tik 1914 metais anglų inžinierius Haris Džeimsas Vatsas išrado kvadratinių skylių gręžimo instrumentą, kurio skersinis pjūvis buvo Relo trikampis. Nuo 1916 metų viena firma pradėjo gaminti Vatso grąžtus. „Visi esame girdėję apie veržlių raktus, pritaikytus veržlėms su sriegėmis kairėn, apie į mazgus sujungtus vandentiekio vamzdžius ir ketaus bananus, — buvo rašoma viename tos firmos reklaminių prospektų. Panašius dalykus laikėme juokingais menkniekiais ir net netikėjome, jog kada nors jų pasitaikys tikrovėje. Ir staiga išrandamas instrumentas, kuriuo galima gręžti kvadratines skyles!“

Vatso grąžtas pavaizduotas 126 paveiksle. Dešinėje parodytas skersinis grąžto kvadratinėje skylėje pjūvis. Gręžiama taip. Iš pradžių ant metalo uždedamas metalinis šablonas su reikiamų matmenų kvadratine skyle. Grąžtas, sukdamasis šablono skylėje, įsirėžia krašteliu į metalą ir išgręžia jame kvadratinę skylę. 126 paveiksle matome, kad Vatso grąžtas — paprasčiausias Relo trikampis, kuriame padarytos išpjovos drožlėms pašalinti ir išgaląsti pjaunantys kašteliai. Relo trikampiui sukantis, jo centras nestovi vienoje vietoje, todėl Vatso grąžtą suspaudžiantis patronas neturi kliudyti jo judėjimui. Kompanija užpatentavo specialų patroną su „laisvai jame plaukiojančiu grąžtu“, patenkinančiu visus būtinus reikalavimus.

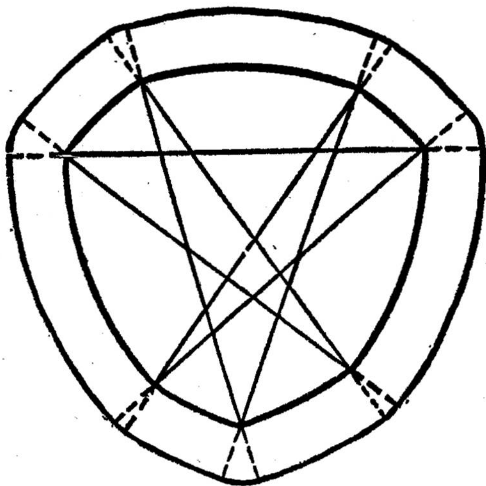
Iš visų duoto pastovaus pločio kreivių Relo trikampis yra mažiausio ploto. Jeigu Relo trikampio plotis lygus w, jo plotas lygus $(\pi - \sqrt{3})w^2$. Kampai prie trikampio viršūnių po 120°. Tai „smailiausi“ kampai iš visų kampų, kuriuos gali turėti pastovaus pločio kreivė. Juos galima suapvalinti, po lygiai pratęsus kiekvieną pradinio (lygiakraščio) trikampio kraštinę į abi puses (127 pav.). Nubrė-



127 pav. Simetriška pastovaus pločio kreivė su apvaliais kampais

žus iš taško A apskritimo lanką, reikia praplėsti skriestuvą ir nubrėžti iš to paties taško A dar vieną apskritimo lanką (šį kartą lanką FG). Tą patį reikia padaryti, imant centrais taškus B ir C. Gautoji kreivė visomis kryptimis turės plotį, lygų lankų, nubrėžtų iš kiekvienos viršūnės, spindulių sumai; ji bus pastovaus pločio kreivė. Kitas pastovaus kreivumo simetriškas kreives gausite, vietoje lygiakraščio trikampio paėmę taisyklingą penkiakampį (arba apskritai bet kokį taisyklingą daugiakampį su nelyginiu viršūnių skaičiumi) ir atlikę su juo analogišką procedūrą.

Yra būdų, kuriuos taikant, galima nubrėžti ir nesimetriškas pastovaus kreivumo kreives. Vienas jų toks. Imkite netaisyklingos formos žvaigždišką daugiakampį (tokio daugiakampio kampų skaičius neišvengiamai bus nelyginis), sudarytą iš vienodo ilgio tiesės atkarpų (128 paveiksle pavaizduotas žvaigždiškas septyniakampis). Įstatę skriestuvo kojelę kiekvienoje viršūnėje, išveskite apskritimo, sujungiančio dvi priešingas viršūnes, lanką. Kadangi visi lankai nubrėžti tuo pačiu spinduliu, gautoji kreivė (128 paveiksle ji parodyta juoda linija) bus pastovaus pločio. Jos kampus galima suapvalinti jau aukščiau aprašytu būdu: pratęsti žvaigždiško daugiakampio kraštines vienodai į abi puses ir galus sujungti apskritimų,

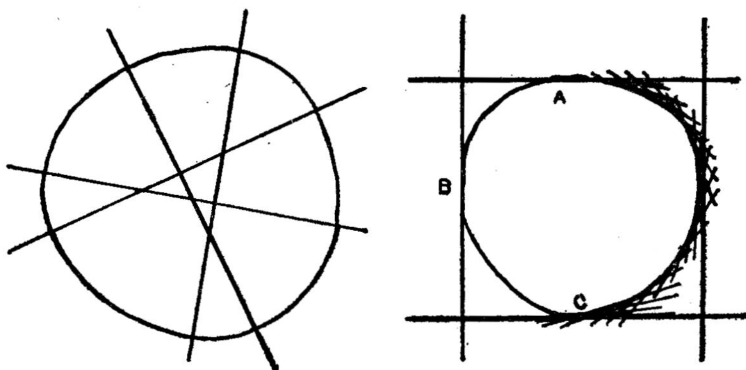


128 pav. Pastovaus pločio kreivės brėžimas, taikant žvaigždiško daugiakampio metodą

kurių centrai yra žvaigždės viršūnėse, lankais. Kreivė su apvaliomis viršūnėmis, 128 paveiksle pavaizduota plona linija, bus kita pastovaus pločio kreivė.

Dar vienas pastovaus pločio kreivių brėžimo metodas parodytas 129 paveiksle. Nubrėžkite bet kokį skaičių susikertančių tiesių, paskui iš eilės skriestuvo kojelę įstatydami į kiekvieną tiesių susikirtimo tašką, apskritimo lanku sujunkite tas dvi tieses, kurios susikerta jūsų pasirinktame taške. Pradėti galima nuo bet kurio taško, paskui toliau brėžti kreivę, eilinį lanką prijungiant prie anksčiau nubrėžtojo. Tiksliai nubrėžus visus lankus, turi išeiti uždara kreivė. Tai bus dar vienos pastovaus pločio kreivių rūšies atstovė. (Įrodyti, kad kreivė tikrai turi būti uždara ir pastovaus pločio, paliekame skaitytojui. Tai bus įdomus ir nesunkus pratimas.) Visos iki šiol mūsų brėžtos pastovaus pločio kreivės sudarytos iš apskritimų, brėžtų tik dviem skirtingais spinduliais, lankų. Tačiau taip pat sėkmingai būtų galima sudaryti pastovaus pločio kreives iš bet kokio skaičiaus apskritimų lankų.

Beje, pastovaus pločio kreivė gali būti sudaryta visai ne iš apskritimų lankų. Iš tikrųjų imkime kvadratą ir iš-



129 pav. Pastovaus pločio kreivės brėžimas, taikant susikertančių tiesių metodą. Dešinėje parodyta, kaip papildyti laisvai pasirinktą lanką iki pilnos pastovaus pločio uždaros kreivės

veskime bet kokią kreivę, jungiančią viršutinį pagrindą su apatiniu ir liečiančią kairiąją kraštinę (kreivę *ABC* 129 pav., dešinėje). Ši kreivė bus kairioji kažkokios pastovaus pločio kreivės pusė. Norėdami nubrėžti šios kreivės trūkstamą dešinę pusę, išveskime daugybę tiesių, lygiagrečių vienai iš lanko *ABC* liestinių ir nutolusios nuo jos per atstumą, lygų kvadrato kraštinei. Tokias tieses nubrėžti nesunku, naudojantis abiem liniuotės kraštais (pagrindinį kvadratą reikia imti tokių matmenų, kad jo kraštinė būtų lygi liniuotės pločiui). Uždėję liniuotę taip, kad vienas jos kraštas liestų lanką *ABC,* nubrėžkite tiesę išilgai kito jos krašto. Atlikdami šią operaciją, pasirinkite kuo daugiau lanko *ABC* taškų. Išvestųjų tiesių gaubtinė ir bus pastovaus pločio kreivės trūkstama dešinioji pusė. Taikant šį metodą, galima sudaryti kiek norima daug „kreivašonių“ pastovaus pločio kreivių.

Reikia pažymėti, kad lankas *ABC* ne visai bet koks. Grubiai kalbant, jo kreivumas nė viename taške neturi būti mažesnis už kreivumą apskritimo, kurio spindulys lygus kvadrato kraštinei. Lanko *ABC* konstrukcijoje negali, pavyzdžiui, būti tiesės atkarpa.

Tikslesnį reikalavimų lankui *ABC* formulavimą, taip pat elementarių teoremų apie pastovaus kreivumo

kreivių savybes įrodymus skaitytojas ras Rademacherio ir Teplico knygos * skyriuje apie tas kreives.

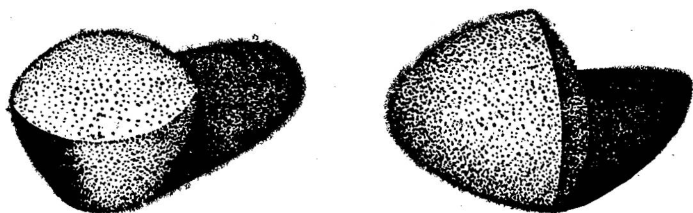
Jeigu turite reikalingų instrumentų ir mokate drožinėti medyje, jums bus malonu ištekinti medinius volus, kurių skersiniai pjūviai yra įvairios pastovaus pločio kreivės. Dauguma žmonių netenka žado, matydami, kaip stora knyga, slenkanti ant kreivašonių volų jai griežtai lygiagrete stalo plokštuma, visai nesiūbuoja. Dar paprasčiau demonstruoti pastovaus pločio kreivių nepaprastas savybes, iškirpus jas iš kartono ir prikalus per tam tikrą atstumą vieną nuo kitos prie siaurutės medinės lystelės. Kreivių gali būti įvairiausių formų, tik svarbu, kad jos būtų prikaltos per „centrą". Dabar paimkime didelę, bet lengvą kartoninę dėžutę ir uždėkime ją ant vertikaliai pastatytų kreivių, kurios prikaltos prie lystelės. Ridendami dėžutę pirmyn ir atgal, pamatysime stebinantį vaizdą: abu lystelės galai svyruoja tai aukštyn, tai žemyn, o dėžutė ant kartoninių „ratų" važiuoja taip, tarytum jie būtų apvalūs!

Pastovaus pločio kreivių savybės detaliai išnagrinėtos. Viena nuostabi ir sunkiai įrodoma savybė yra ta, kad visos vienodo pastovaus *n* pločio keivės turi vienodus perimetrus. Apskritimas yra pastovaus pločio kreivė, taigi bet kokios pastovaus *n* pločio kreivės perimetras yra lygus *n* skersmens apskritimo ilgiui — πn.

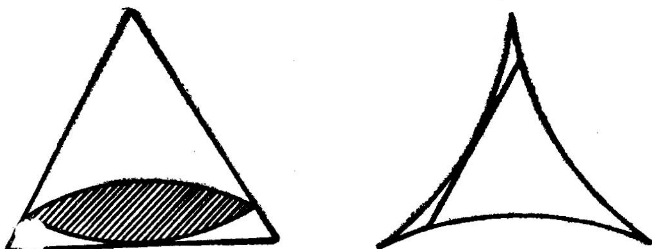
Trimačiai pastovaus pločio kreivių analogai vadinami pastovaus pločio kūnais. Sfera — ne vienintelis kūnas, galintis suktis kube, visą laiką liesdamas visas šešias jo sienas. Ta pati savybė yra būdinga visiems pastovaus pločio kūnams. Paprasčiausias nesferinio pastovaus pločio kūnas gaunamas, sukant Relo trikampį apie vieną jo simetrijos ašių (130 pav., kairėje). Yra be galo daug ir kitų pastovaus pločio kūnų. Tie, kurių tūris duotajam pločiui yra mažiausias, gaunami iš taisyklingo tetraedro lygiai taip pat, kaip Relo trikampis — iš lygiakraščio trikampio: iš pradžių ant kiekvienos tetraedro sienos uždedamos sferinės kepuraitės, paskui palengva suapvalinamos briaunos. Briaunos arba išvestos iš vienos viršūnės, arba su-

---

* Г. Радемахер, О. Теплиц. Числа и фигуры, сер. «Библиотека математического кружка». Вып. 10. М., Изд-во «Наука», 1966. Žr. ten pat И. М. Яглом, В. Г. Болтянский. Выпуклые фигуры, сер. «Библиотека математического кружка». Вып. 4, М.—Л., Физматгиз, 1951.



130 pav. Du pastovaus pločio kūnai



131 pav. Mažiausio ploto rotorius lygiakraščio trikampio viduje. Dešinėje parodyta atkarpa tiesėje, kuri sukasi hipocikloidės viduje

daro trikampį. Toks iškraipytas pastovaus pločio tetraedras parodytas 130 paveikslo dešinėje.

Kadangi visos vienodo pastovaus pločio kreivės turi vienodą perimetrą, gali atrodyti, jog analogiškai visi vienodo pločio kūnai turi vienodą paviršiaus plotą. Toks tvirtinimas neteisingas. Kaip įrodė žinomas matematikas Hermanas Minkovskis, visi pastovaus pločio (laikoma, kad saulės spinduliai lygiagretūs, o šešėlis krinta ant plokštumos, statmenos spinduliams) kūnų šešėliai turi pastovaus pločio kreivių formą. Visų vienodo pastovaus pločio kūnų šešėliai vienodi (ir lygūs πd; d — kūno plotis).

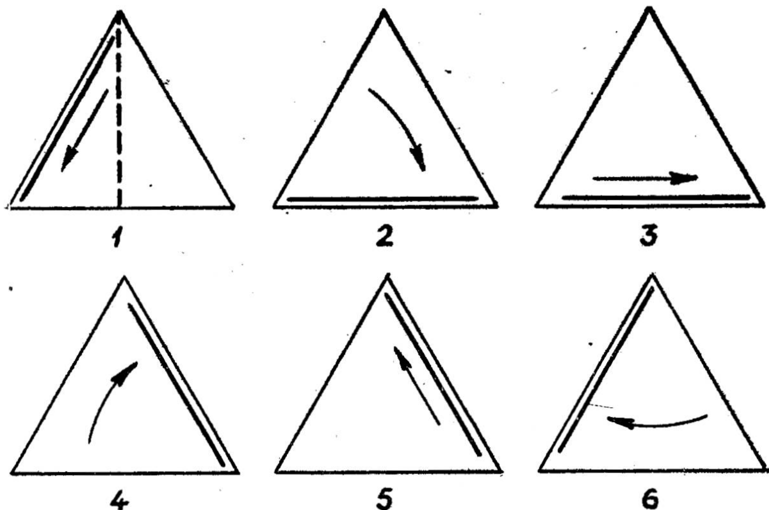
Iškila figūra, galinti suktis daugiakampio arba daugiasienio viduje, visą laiką liesdama visas jo kraštines arba sienas, vadinama rotoriumi. Matėme, kad Relo trikampis yra minimalaus ploto rotorius kvadrate. Minimalaus ploto rotorius lygiakraščiame trikampyje pavaizduotas 131 paveikslo kairėje. Tai lęšio formos figūra (suprantama, jos kontūras nėra pastovaus pločio kreivė), sudaryta iš dviejų apskritimų, kurių spinduliai lygūs trikampio

aukštinei (kiekvienas lankas sudaro 60°), lankų. Svarbu pažymėti, kad rotoriaus galai, jam sukantis, aprašo visą trikampio perimetrą, nesuapvalindami kampų. Gaila, kad technologiniai sunkumai neleidžia pagaminti rotoriaus formos grąžto, kuris išgręžtų lygiakraščio trikampio formos skyles, tačiau grąžtai, išgręžiantys taisyklingų penkiakampių, šešiakampių ir net aštuoniakampių nesuapvalintais kampais formos skyles, jau pagaminti. Įrodyta, kad trimatėje erdvėje egzistuoja nesferiniai rotoriai taisyklingam tetraedrui, oktaedrui ir kubui, tačiau jų nėra dodekaedrui ir ikosaedrui. Apie rotorius didesnio matavimų skaičiaus erdvėse jokių žinių nėra.

Tiesioginį ryšį su rotorių teorija turi žinomas uždavinys apie adatą. Šį uždavinį dar 1917 metais suformulavusio japonų matematiko Kakejos garbei jis vadinamas „Kakejos problema". Jos esmė tokia: kokioje minimalaus ploto plokštumos figūroje 360° kampu galima apsukti vienetinę atkarpą? Tokią atkarpą, savaime aišku, galima apsukti 360° kampu vieneto skersmens apskritime, tačiau šiuo apskritimu aprėpto skritulio plotas nebus minimalus.

Gana ilgai matematikai tvirtino, kad Kakejos problemos sprendinys yra kreivė, pavaizduota 131 paveikslo dešinėje. Jos aprėptas plotas lygus pusei skritulio ploto. (Ši kreivė vadinama hipocikloide. Tokią kreivę nubrėžia apskritimo, kuris nešliauždamas rieda iš vidaus kitu didesniu apskritimu, taškas, kai mažojo apskritimo skersmuo sudaro $\frac{1}{3}$ arba $\frac{2}{3}$ didžiojo apskritimo skersmens.) Atlaužę reikiamo ilgio degtuko atkarpą, praktiškai įsitikinsite, kad ją galima apsukti hipocikloidėje kaip tam tikrą vienmatį rotorių. Atkreipkite dėmesį į tai, kad degtuko galai visą laiką bus ant hipocikloidės kontūro.

Sensacija įvyko 1927 metais, praėjus dešimčiai metų po to, kai Kakeja iškėlė savo problemą. Jos „kaltininkas" buvo A. S. Bezikovičius. Jis įrodė, kad Kakejos problema... neturi sprendinio! Tiksliau, iš Bezikovičiaus rezultatų buvo matyti, kad minimalų plotą aprėpiančios kreivės, kurios viduje būtų galima 360° apsukti vieneto ilgio atkarpą, nėra. Kad ir koks mažas bebūtų kreivės aprėptas plotas, visada galima rasti kitą dar mažesnį plotą aprėpiančią kreivę, kurios viduje vienetinė atkarpa galėtų taip pat apsisukti 360°. Įsivaizduokime atkarpą, nusitęsusią nuo Žemės iki Mėnulio. Pagal Bezikovičiaus teoremą 360°



132 pav. Uždavinio apie vienetinę atkarpą atsakymas

ją galima apsukti figūroje, kurios plotas mažesnis už pašto ženklo su Linkolno atvaizdu plotą. Jeigu ir to bus maža, tą pačią atkarpą galima apsukti 360° figūroje, kurios plotas mažesnis už plotą, kurį užima Linkolno nosis minėtame pašto ženkle.

Bezikovičiaus įrodymas per daug sudėtingas, todėl apsieisime be jo. Tik pabrėšime, kad figūra, kurioje atkarpa apsukama, nėra vientisa. Vietoje to skaitytojui siūloma savarankiškai spręsti kitą paprastesnį uždavinį. Koks turi būti mažiausias iškilos figūros plotas, kad jos viduje 360° būtų galima apsukti vienetinę tiesės atkarpą? (Figūra vadinama iškila, jeigu visi tiesės, atkarpos, jungiančios bet kuriuos du tos figūros taškus, taškai priklauso figūrai. Kvadratai ir skrituliai — iškilos figūros, graikiški kryžiai ir mėnulio pjautuvas — neiškilos.)

ATSAKYMAI

Iškyla minimalaus ploto figūra, kurioje 360° galima apsukti vieneto ilgio atkarpą („adatą"), yra vieneto aukščio lygiakraštis trikampis. Jo plotas lygus $\sqrt{3}$.

Bet kuri figūra, kurioje 360° galima apsukti vienetinę atkarpą, suprantama, gali turėti plotį, ne mažesnį kaip 1. Iš visų vieneto pločio iškilų figūrų mažiausią plotą turi lygiakraštis trikampis, kurio aukštinė lygi 1. Įrodymą skaitytojas gali rasti J. Jaglomo ir V. Boltianskio knygoje „Iškilos figūros“ *. Nesunku pastebėti, kad tokio trikampio viduje vieneto ilgio atkarpa iš tikrųjų gali apsisukti 360° (132 pav.).

Iki 1963 metų buvo manoma, jog vientisa minimalaus ploto figūra, kurioje 360° galima apsukti vienetinę atkarpą, yra hipocikloidė. Teisingą atsakymą 1963 metais rado du žmonės: M. Blumas ir I. Dž. Šionbergas.

XXIV skyrius

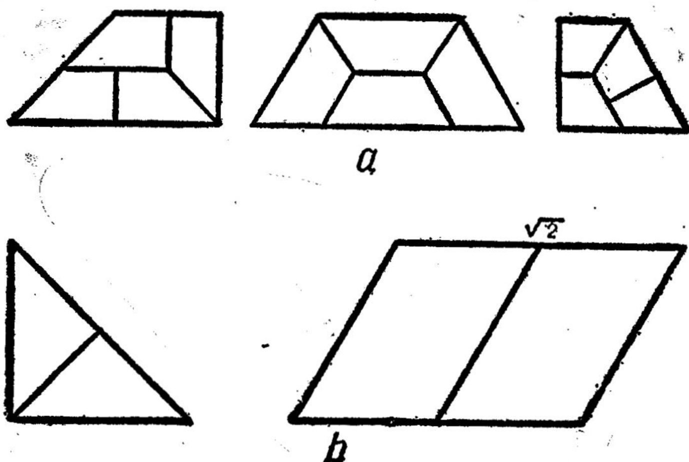
„Suskaldomos figūros“ plokštumoje

Plokštumą padengti parketu, kurio visos plytelės yra taisyklingų daugiakampių formos, galima tik trimis atvejais: jeigu plytelės yra lygiakraščio trikampio, kvadrato arba taisyklingo šešiakampio formos. Tačiau yra be galo daug netaisyklingų daugiakampių, kuriais taip pat galima padengti visą plokštumą. Tam pakanka, pavyzdžiui, paimti bet kokį trikampį. Bet kokiu keturkampiu taip pat galima padengti visą plokštumą. Tuo galite įsitikinti, nubraižę bet kokį netaisyklingos formos (nebūtinai iškilųjį) keturkampį ir iš kartono išpjovę apie dvidešimt jo kopijų. Iš tokių keturkampių sudėlioti parketą su glaudžiai sujungtomis plytelėmis — labai įdomus užsiėmimas.

Padengti plokštumą figūromis galima ir ypatingesniu (taip pat ir mažiau žinomu) būdu. Pažvelkite į 133 paveikslą, *a*. Kiekviena trapecija padalyta į keturias mažesnes trapecijas lygiai tokios pat formos, kaip ir pradinė. O kiekvieną ketvirtadalį galima padalyti į keturias dar mažesnio dydžio trapecijas, panašias į ją, ir t. t. Norint tokio-

---

* И. М. Яглом, В. Г. Болтянский. Выпуклые фигуры. М.-Л., Гостехтеоретиздат, 1951 (Библиотека математического кружка, вып. 4).



133 pav. Suskaldomi daugiakampiai: *a* — trys suskaldomos trapecijos (kiekvienai galimas 4 eilės skaldymas); *b* — du žinomi suskaldomi antrosios eilės daugiakampiai

mis figūromis išgrįsti plokštumą, reikia tik atlikti priešingą veiksmą: iš keturių vienodų tam tikro dydžio figūrų surinkti vieną didesnę figūrą, panašią į jas. Anglų matematikas Augustas De Morganas analogišką situaciją apibūdino jumoristiniame eilėraštyje, kurio pirmosios keturios eilutės perfrazuoja Džonatano Svifto jumoristinį ketureilį:

Stambias blusas vis kandžioja bluselės,
O bluseles — jų sesės mažutėlės.
Ir nėra pabaigos šiam karui parazitų,
Lotyniškai pasakius, *ad infinitum.*
Stambi blusa tai įkanda,
Pas kurią sau šiltą vietą randa.
Ši — storesnes, plačias per taliją blusas,
Ir taip be pabaigos viena kitą vis kąs.

Dar neseniai apie daugiakampius, turinčius įdomią savybę susitelkti į panašius didelius arba susiskaldyti į mažesnius, pakartojančius originalo formą, palyginti buvo mažai žinoma. 1962 metais Solomonas Holombas atkreipė dėmesį į šias nuostabias figūras. Remdamasis savo tyri-

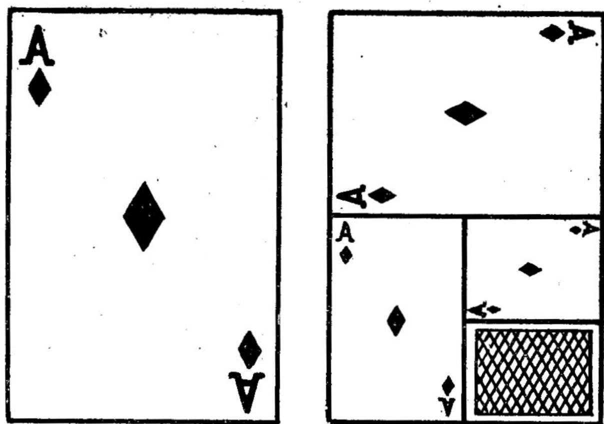
nėjimais, Holombas parašė tris straipsnius (spaudoje jie nebuvo skelbti), kuriuose jis pagrindė „suskaldomų" (arba „sudedamų") daugiakampių teoriją. Beveik viskas, apie ką kalbėsime šiame skyriuje, paimta iš tų trijų straipsnių.

Pagal Holombo terminologiją daugiakampis vadinamas k eilės suskaldomu daugiakampiu, jeigu jį galima padalyti į k vienodų mažesnio dydžio daugiakampių, panašių į jį. Pavyzdžiui, kiekviena trijų trapecijų, pavaizduotų 133 paveiksle, *a*, yra ketvirtosios eilės suskaldoma trapecija. k-osios eilės suskaldomi daugiakampiai galimi su bet kokiu k, tačiau jų mažiausia tais atvejais, kai k — pirminis skaičius, ir daugiausia — kai k sutampa su kokio nors skaičiaus kvadratu.

Žinomi tik du antrosios eilės suskaldomi daugiakampiai: lygiašonis statusis trikampis ir lygiagretainis, kurio kraštinių santykis lygus $1:\sqrt{2}$ (abi figūros pavaizduotos 133 paveiksle, *b*). Holombui pavyko paprastai įrodyti, kad tuo ir baigiasi visi galimi antrosios eilės suskaldomi trikampiai ir keturkampiai ir kad nėra jokių kitų iškiliųjų antrosios eilės suskaldomų daugiakampių. Abejotina, ar tarp neiškiliųjų daugiakampių yra antrosios eilės suskaldomų figūrų, nors ir neįrodyta, kad jų nėra.

Lygiagretainio, kurio kraštinių santykis lygus $1:\sqrt{2}$, vidaus kampai gali keistis, neturėdami įtakos jo sugebėjimui „skaldytis" (be to, į du lygiagretainius, panašius į pradinį). Stačiakampis, kurio kraštinių santykis $1:\sqrt{2}$, taip pat žymus meno istorijoje, ir kaip „auksinis stačiakampis". * Daugelis viduramžių ir Renesanso epochos dailininkų sąmoningai pasirinkdavo drobės kraštų santykį $1:\sqrt{2}$. Kartais rodomas toks kortų fokusas: būgnų tūzas jūsų akyse tris kartus sumažėja — kiekvieną kartą dvigubai (134 pav.). Fokusininkas, rodydamas jį, nepastebimu rankos judesiu kortą sulenkia per pusę ir parodo žiūrovams dvigubai mažesnio dydžio kortą. Jeigu kiekviena korta yra stačiakampio, panašaus į pradinį, formos, nesunku parodyti, kad kortų kraštinių santykis gali būti tik $1:\sqrt{2}$. Antrosios eilės suskaldomas stačiakampis pritaikomas ne tik kortų fokusuose. Knygų leidėjai, norintys stan-

* Žr. knygos «Математические головоломки и развлечения» 23 skyrių.

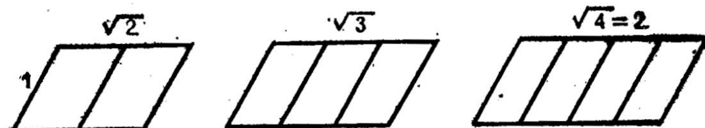


134 pav. Fokusas su mažėjančia korta, pagrįstas antrosios eilės suskaldomu stačiakampiu

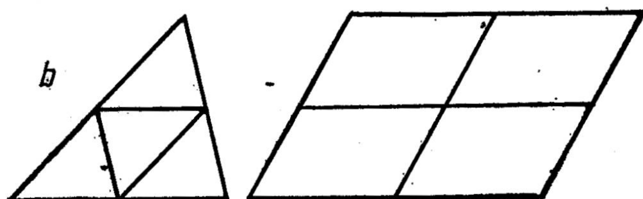
dartizuoti įvairių dydžių knygų formatą, pastebės, kad *in folio, in quarto* arba *in octavo* leidinių puslapiai turi antrosios eilės suskaldomo stačiakampio formą. Šis stačiakampis priklauso lygiagretainių, pavaizduotų 135 paveiksle, *a,* šeimai. Lygiagretainis, kurio kraštinių santykis lygus $1:\sqrt{k}$, visuomet yra k-osios eilės suskaldomas lygiagretainis; tai rodo, jog suskaldomi daugiakampiai galimi su bet kuriuo k. Holombas teigia, kad kitos šeimos, turinčios visų eilių suskaldomų figūrų, nežinomos. Kai $k=7$ (arba kai k lygus bet kokiam pirminiam $4n-1$ pavidalo skaičiui, didesniam už 3), nurodytos šeimos lygiagretainiai yra vieninteliai k-osios eilės suskaldomi daugiakampiai.

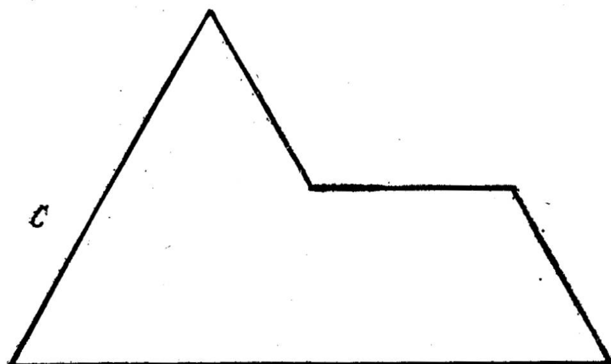
Ar sugebės skaitytojas savarankiškai rasti trečiosios ir penktosios eilės suskaldomus trikampius? Tokie trikampiai galimi.

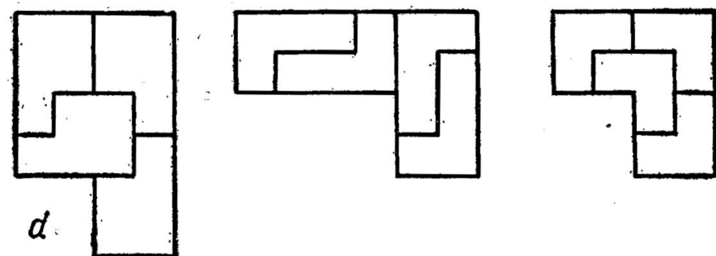
Ketvirtosios eilės suskaldomų figūrų yra žinoma gana daug. Pavyzdžiui, bet koks trikampis yra ketvirtosios eilės suskaldomas daugiakampis (jo padalijimo schema parodyta 135 pav., *b*). Bet koks lygiagretainis taip pat priklauso ketvirtosios eilės suskaldomų daugiakampių skaičiui (jo padalijimo schema parodyta 135 pav., *a*). Iš kitų 4-osios eilės keturkampių žinomos tik trys trapecijos, pavaizduotos 133 paveiksle.











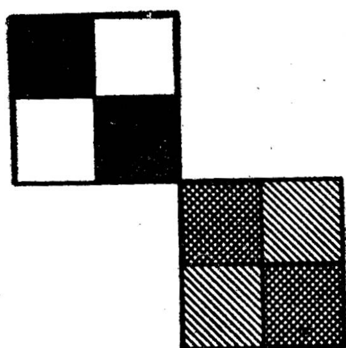
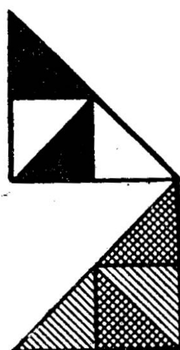
135 pav. Suskaldomi daugiakampiai: *a* — lygiagretainiai, kurių kraštinių santykis lygus $1:\sqrt{k}$, priklausantys k-osios eilės suskaldomų daugiakampių šeimai; *b* — bet kokiam trikampiui ir lygiagretainiui galimas 4-osios eilės skaldymas; *c* — „sfinksas", vienintelis žinomas 4-osios eilės suskaldomas penkiakampis; *d* — trys žinomos 4-osios eilės suskaldomų šešiakampių rūšys

Žinomas tik vienas penktosios eilės suskaldomas penkiakampis: tai 135 paveikslo, *c*, figūra, primenanti sfinksą. Holombas nustatė, kad jis priklauso ketvirtosios eilės suskaldomiems daugiakampiams. Kadangi 135 paveiksle, *c*, parodyti tik „sfinkso" kontūrai, skaitytojas gali pamėginti savarankiškai rasti jo padalijimo į 4 mažesnius „sfinksus" schemą.

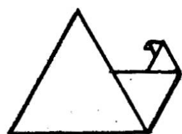
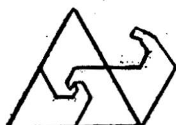
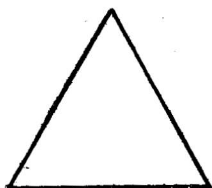
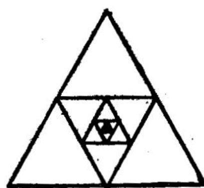
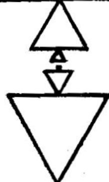
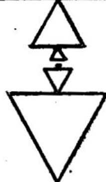
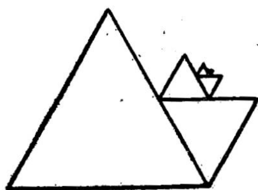
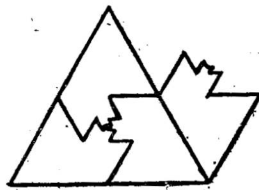
Žinomos trys ketvirtosios eilės suskaldomų šešiakampių rūšys; bet kokį stačiakampį padalijus į keturias lygias dalis tiesėmis, lygiagrečiomis jo kraštinėms, ir atmetus vieną ketvirtadalį, likusioji figūra bus 4-osios eilės suskaldomas šešiakampis. 135 paveiksle, *d*, dešinėje parodyta visiems galvosūkių mėgėjams žinoma schema, kaip padalyti šešiakampį, pradiniam stačiakampiui išsigimus į kvadratą. Greta parodyti du kiti 4-osios eilės suskaldomi šešiakampiai. Kiekvieną jų galima padalyti į keturis mažesnius šešiakampius ne mažiau kaip dviem būdais.

Šešiakampį, pavaizduotą 135 paveiksle, *d* (viduryje), padalijus kiek kitaip, negu parodyta (kiekvieno stačiakampio padalijimo schemą pakeitus jos veidrodiniu atspindžiu), visą figūrą galima afiniškai transformuoti (vietoj stataus išorinio kampo figūros „papilvėje" imti bet kokį kitą kampą, nesvarbu, buką ar smailą) ir gauti ketvirtosios eilės suskaldomus šešiakampius. (Tik tuo atveju, kai šis kampas lygus 90°, galimas figūros 9-osios eilės skaldymas.)

Kiti 4-osios eilės standartinių suskaldomų daugiakampių pavyzdžiai nežinomi. Tačiau galimi 4-sios eilės „spinduliniai" suskaldomi daugiakampiai (daugiakampis vadinamas „spinduliniu", kai jį sudaro du ar daugiau į jį panašūs mažesnių dydžių daugiakampiai, konverguojantys į atskirus taškus). Du „spinduliniai" daugiakampiai, kuriuos sukonstravo Holombas, parodyti 136 paveikslo, *a*, viršuje. Pirmajame pavyzdyje vietoj dviejų kvadratų galima imti bet kokius du vienodus stačiakampius. Be to, Holombas atrado tris 4-osios eilės suskaldomas figūras, kurios nėra daugiakampiai (nė vienos šių figūrų negalima nubraižyti per baigtinį žingsnių skaičių). Kiekviena jų (136 pav., *b*, iš kairės, apačioje) sudaroma, be galo pristatant šalia lygiakraščio trikampio vis mažesnius ir mažesnius trikampius (kiekvienas trikampis 4 kartus mažesnis už pirmesnįjį). Visais trimis atvejais, paėmus tris vienodas figūras, iš jų galima sudaryti vieną didelę

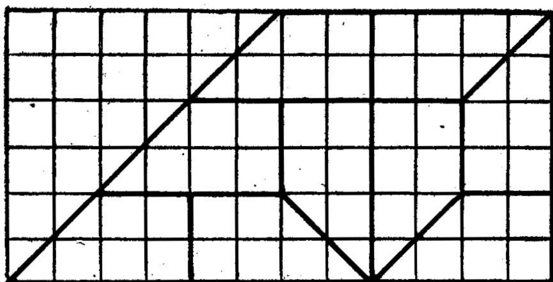



a

b

136 pav. 4-osios eilės suskaldomos figūros:
a — du 4-osios eilės „spinduliniai" daugiakampiai; **b** — trys 4-osios eilės suskaldomos figūros, kurios nėra daugiakampiai

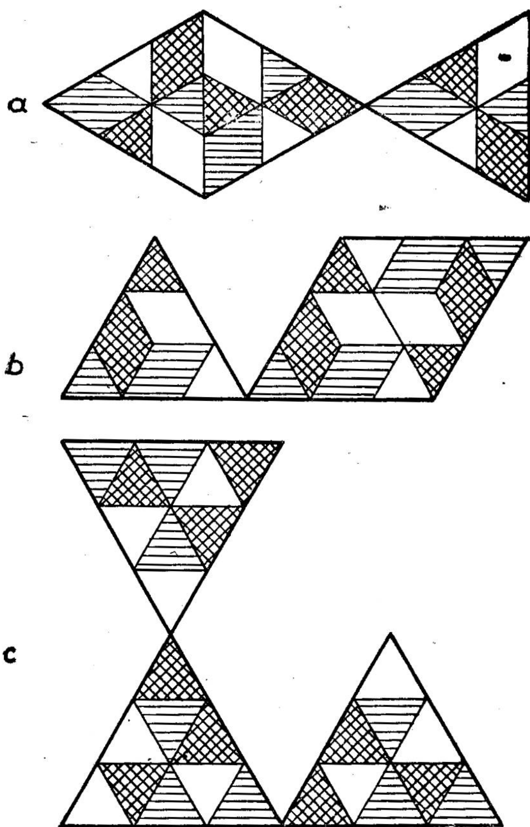


137 pav. Suskaldoma trapecija. Bet koks 4-osios eilės suskaldomas daugiakampis yra ir 9-osios eilės suskaldomas daugiakampis

tokios pačios formos figūrą (kaip tai daroma, parodyta 136 paveiksle, *b,* dešinėje). Kiekvienoje sumažintoje pradinės figūros kopijoje yra „tuštumos", kurios susidaro dėl to, kad originalas yra begalinė neaprėžtai mažėjančių dydžių trikampių seka.

Įdomu pažymėti, kad paprastai 4-osios eilės suskaldomiems daugiakampiams drauge galimas ir 9-osios eilės skaldymas. Trapecija, pavaizduota 137 paveiksle (tokios formos yra Nevados valstija JAV žemėlapyje) ir yra 4-osios eilės suskaldomas daugiakampis, kurį galima padalyti į 9 sumažintas kopijas (daugeliu būdų). Vieną jų matote 137 paveiksle. (Ar galės skaitytojas savarankiškai rasti visų kitų 4-osios eilės suskaldomų daugiakampių padalijimo schemas? Kalbama tik apie standartinius daugiakampius. Spindulinės figūros ir neaprėžtai mažėjančių dydžių figūrų, pristatomų šalia pradinės, begalinių sekų ribos į standartinių skaičių neįeina.) Teisingas ir atvirkštinis teiginys: standartiniams daugiakampiams, kuriems galimas 9-osios eilės suskaldymas paprastai galimas ir 4-osios eilės suskaldymas. Trys įdomūs 9-osios eilės spinduliniai daugiakampiai parodyti 138 paveiksle. Juos atrado ir taip pavadino Holombas. Nė vienai šių figūrų nėra galimas ketvirtosios eilės suskaldymas.

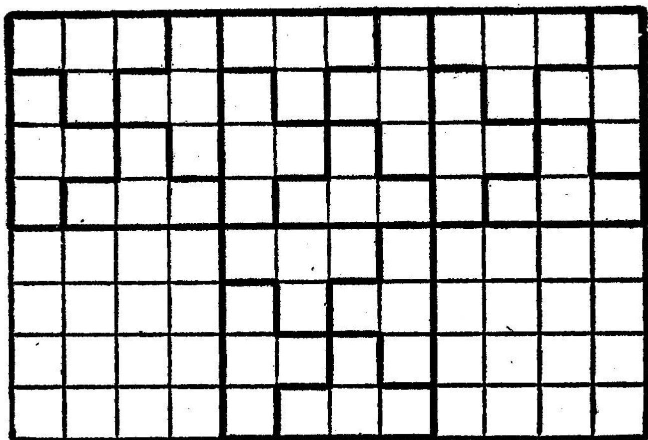
Dalydami 4×4 šachmatų lentą į keturias vienodos formos ir dydžio dalis (žr. 21 skyrių), gausime figūras, kurioms galimas 16-osios eilės skaldymas. Tik iš keturių „minilentos" egzempliorių reikia sudėti padidintą kiekvieno ketvirtadalio kopiją (žr., pavyzdžiui, 139 pav.). Analogiškai 6×6 lentą skaldant (daugeliu būdų) į keturias



138 pav 9-osios eilės „spinduliniai“ daugiakampiai:
a — žuvis; *b* — paukštelis; *c* — ženklas &

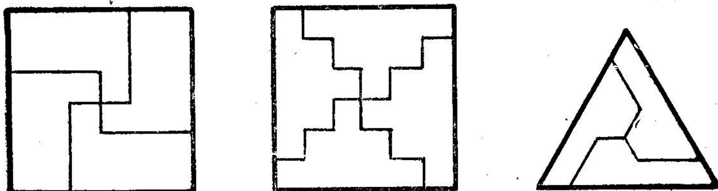
vienodas dalis, galima gauti 36-osios eilės suskaldomas figūras. Lygiakraštį trikampį taip pat galima padalyti išilgai tolygaus trikampio tinklelio linijų ir gauti figūrą, kuriai galimas 36-osios eilės skaldymas (140 pav.). Visi šie pavyzdžiai iliustruoja vieną paprastą teoremą, kurią Holombas aiškina taip.

Išnagrinėkime figūrą *P*, kurią galima padalyti į dvi arba didesnį skaičių lygių figūrų, nebūtinai panašių į figūrą *P*. Mažesnes figūras pažymėkime raide *Q*. Tokių figūrų skaičių pavadinkime „kartotinumu“, kuriuo figūra

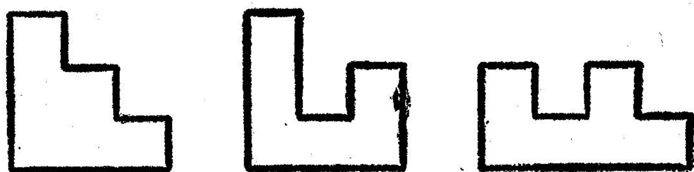


139 pav. 16-osios eilės suskaldomas aštuoniakampis

Q dalija figūrą *P*. Pavyzdžiui, 140 paveiksle pavaizduoti trys šešiakampiai trikampį dalija kartotinumu, lygiu 3, o mažesni lygiakraščiai trikampiai (trikampio tinklelio elementai) šias figūras dalija kartotinumu, lygiu 12. Abiejų kartotinumų sandauga (3×12) nurodo ir šešiakampio, ir lygiakraščio trikampio skaldymo eilę: iš 36 šešiakampių figūrų galima sudaryti vieną šešiakampę didelių matmenų figūrą, o iš 36 lygiakraščių trikampių — vieną didelį lygiakraštį trikampį. Abstrakčiau tą patį galima suformuluoti taip: jeigu yra dvi tokios figūros *P* ir *Q*, kad figūra *P* dalija figūrą *Q* kartotinumu *s*, o *Q* dalija *P* kartotinumu *t*, galimas abiejų figūrų *st* eilės skaldymas į panašias mažesnių matmenų figūras. Suprantama, kiekviena figūra drauge gali būti ir mažesnės eilės suskaldoma figūra. Pateiktame pavyzdyje lygiakraštis trikampis



140 pav. Trys 36-osios eilės suskaldomi daugiakampiai

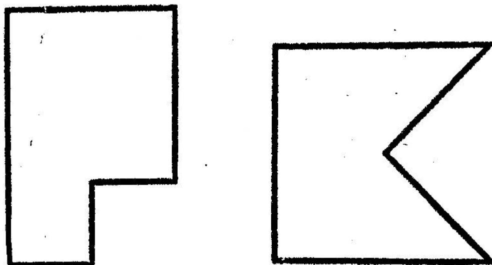


141 pav. Trys 144-osios eilės suskaldomi daugiakampiai

yra ne tik 36-osios eilės, bet ir 4, 9, 16 ir 25 eilės suskaldomas daugiakampis.

Jeigu figūros P ir Q panašios, iš Holombo teoremos išplaukia, kad kiekviena jų yra ne tik k, bet ir k^2, k^3, k^4 ir t. t., eilės, t. y. bet kurios eilės, sutampančios su vienu sveikųjų k laipsnių, suskaldoma figūra. Kita Holombo teoremos išvada: jeigu tam tikrai figūrai galimas s ir t eilių suskaldymas į panašias figūras, į tokias figūras jai taip pat galimas ir st eilės skaldymas.

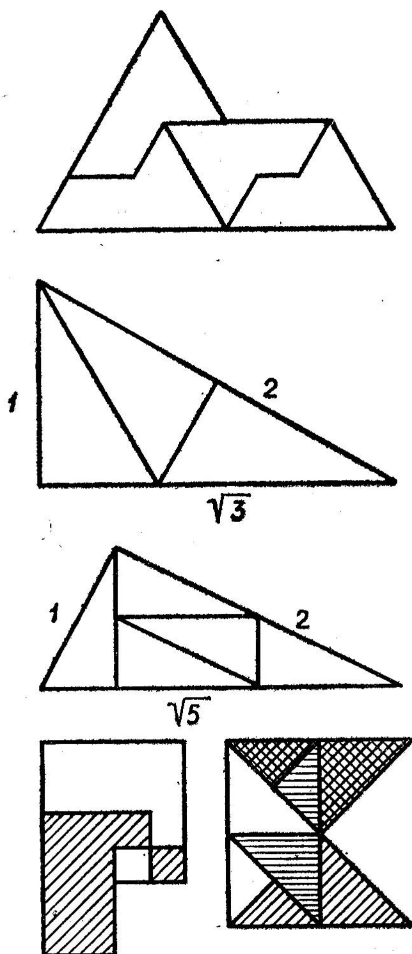
Principas, kuriuo pagrįsta teorema, leidžia apibendrinti. Jeigu P dalija Q kartotinumu s, Q dalija R kartotinumu t ir R dalija P kartotinumu u, kiekviena figūra P, Q ir R yra stu eilės suskaldoma figūra. Pavyzdžiui, kiekviena heksamino figūrų (141 pav.) stačiakampį 3×4 dalija kartotinumu lygiu 2, o stačiakampis 3×4 dalija kvadratą kartotinumu 12, o kvadratas kiekvieną heksamino figūrų dalija kartotinumu 6. Vadinasi, heksamino figūros yra $2\times12\times6=144$ eilės suskaldomos figūros. Matyt, tik dešinysis ir kairysis daugiakampis negali būti žemesnės eilės suskaldomos figūros, bet ši prielaida neįrodyta. Viduriniįjį daugiakampį vienam mūsų skaitytojui pavyko padalyti į 36 vienodus mažesnių matmenų daugiakampius, panašius į pradinį. Padalijimo schemos aš nepatei-



142 pav. Du suskaldymo uždaviniai

kiu, nenorėdamas kitiems skaitytojams atimti malonumą savarankiškai ją atrasti.

Holombas atkreipė dėmesį į tai, kad visi žinomi 4-osios eilės suskaldomi daugiakampiai, tarp jų ir spinduliniai, lygiagretainį dalija kartotinumu, lygiu 2. Kitaip tariant, iš dviejų bet kokio ketvirtosios eilės suskaldomo daugiakampio egzempliorių visuomet galima sudaryti lygiagretainį! Ši prielaida kol kas neįrodyta.



143 pav. Dalijimo uždavinių sprendimas

Palietėme tik elementariausius pagrindinio Holombo kūrinio iš „suskaldomų“ figūrų teorijos rezultatus. Ši teorija leidžia akivaizdžiai apibendrinti trijų ir daugiau matavimų erdvės atveju. Trivialus suskaldomo kūno pavyzdys yra kubas: jį galima padalyti į 8, 27 ir t. t. mažesnius kubus. Kiti trivialūs pavyzdžiai yra paprastos plokščios suskaldomos figūros, išpjautos iš vienodo storio lentos. Yra ir mažiau trivialių suskaldomų erdvės kūnų pavyzdžių. Jų tyrimas, matyt, padės gauti naujus svarbius rezultatus.

Be jau pateiktų uždavinių, pateiksime dar du neįprastus dalijimo uždavinius, betarpiškai susijusius su suskaldomų figūrų teorija (142 pav.). Pirmasis, lengvesnis, uždavinys formuluojamas taip: ar galima padalyti šešia-

kampį, pavaizduotą 142 paveikslo kairėje, į du lygius spindulinius daugiakampius? Antrasis uždavinys sunkesnis: penkiakampį, pavaizduotą 142 paveikslo dešinėje, reikia padalyti į 4 lygius spindulinius daugiakampius. Nei pirmajame, nei antrajame uždavinyje dalys neturi būti panašios į pradinę figūrą.

ATSAKYMAI

„Sfinkso“ padalijimo uždavinio sprendimas pavaizduotas 143 paveiksle, viršuje. Kitos dvi schemos parodo, kaip nubraižyti 3-osios ir 5-osios eilės suskaldomus trikampius. Apačioje pateikti dviejų dalijimo uždavinių sprendimai, taikant spindulinius daugiakampius. Pirmasis jų turi be galo daug skirtingų sprendimų; mes pateikiame vieną paprasčiausių. Antrasis sprendimas, apie kurį rašė dar Semas Loidas, „su barzda“, bet jis buvo žinomas ir anksčiau.

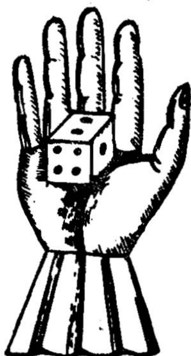
XXV skyrius

Dvidešimt šeši painūs klausimai

Siūlydamas jūsų dėmesiui 26 nedidelius uždavinius, autorius tikisi, kad kas nors iš skaitytojų „įklius į paruoštus spąstus.“ Dauguma klausimų — uždaviniai išdaigos, ir tik nedaugelis jų turi šiek tiek rimtesnę matematinę prasmę. Tačiau skaitytojui nevertėtų žvilgčioti į atsakymus, o pabandyti pačiam (nors ir „pusiau juokais“) atsakyti į kuo daugiau klausimų.

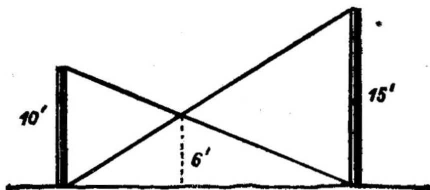
1. Nuvargęs fizikas atsigulė miegoti dvidešimt antrą valandą; jis ketino ilsėtis iki sekančios dienos 12 valandos ir tai valandai nustatė žadintuvą. Kiek valandų jis suspės pamiegoti, kol jį prikels žadintuvas?

2. Jonas ir Motiejus paeiliui meta lošimo kauliuką. Pirmas meta Jonas, antras — Motiejus. Kokia tikimybė, kad Jonui iškris daugiau akių, negu Motiejui?



3. Koks pagal prasmę teiginys visiškai priešingas teiginiui „ne į..."

4. Lygioje aikštelėje tam tikru atstumu nuo 10 pėdų aukščio stulpo stovi 15 pėdų aukščio stulpas. Sujungus kiekvieno stulpo viršūnę su kito stulpo pagrindu tiesėmis, jos susikirs taške, esančiame 6 pėdų aukštyje. Koks atstumas tarp stulpų?



5. — Kiek kainuoja vienas?

— Dvidešimt centų, — atsakė ūkinių prekių parduotuvės pardavėjas.

— O kiek kainuoja dvylika?

— Keturiasdešimt centų.

— Gerai, prašom duoti man devynis šimtus dvylika.

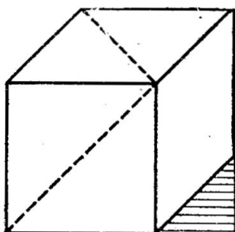
— Iš jūsų priklauso šešiasdešimt centų.

Ką parduotuvėje pirko pilietis?

6. Trikampio kraštinės lygios 13, 18 ir 31 cm. Kam lygus trikampio plotas?

7. Džonas Kenedis gimė 1917 metais. JAV prezidentu buvo išrinktas 1960 metais. Tais metais, kai JAV buvo išleista ši knyga (1963), jam sukako 46 metai ir prezidento poste jis jau buvo 3 metus. Keturių suminėtų skaičių (1917, 1960, 46, 3) suma lygi 3926. Šarlis de Golis gimė 1890 metais. Prancūzijos prezidentu tapo 1958 metais. Kuomet jam sukako 73 metai, jis jau 5 metus buvo prezidento poste. Keturių suminėtų skaičių (1890, 1958, 73, 5) suma ir šį kartą lygi 3926. Kuo paaiškinti tokį įspūdingą sutapimą?

8. Kam lygus kampas tarp dviejų punktyrinių tiesių, nubrėžtų pavaizduoto kubo paviršiuje?



9. Baseinas yra stataus ritinio formos. Žuvis, pradėjusi plaukti nuo ritinio sienos, plaukia tame pačiame gylyje ir vėl priplaukia sieną, tiksliai į šiaurę nuplaukusi 6 m. Palietusi sieną, žuvis pasisuka, plaukia tiksliai į rytus, ir, nuplaukusi 8 m, vėl paliečia sieną. Kam lygus baseino skersmuo?



10. Kartą visiems 6 000 miesto gyventojų statistikas pasiūlė seriją matematinių testų. Drauge jis išmatavo visų gyventojų pėdos ilgį. Pasirodė, kad tarp kojos dydžio ir matematinių gabumų yra stipri koreliacija. Kuo tai paaiškinti?

11. Parašykite paprastą formulę, turinčią tik vieną kintamąjį x ir tokią savybę: įrašius vietoje x bet kurį sveiką teigiamą skaičių, pagal tą formulę turi būti gaunamas koks nors pirminis skaičius.

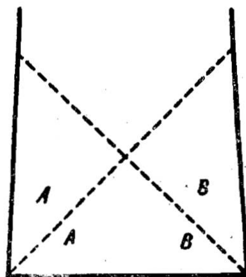
12. Didelio trikampio žemės sklypo viduryje savininkas sumanė pasistatyti namą ir nuo jo statmenai į kiekvieną trikampio kraštinę nutiesti po tiesų taką. Sklypas yra lygiakraščio trikampio formos. Kur reikia statyti namą, kad visų trijų takų ilgių suma būtų mažiausia?



13. 50 padalykite iš $\frac{1}{2}$ ir pridėkite 3. Kiek gavote?

14. Topologas nusipirko septynis riestainius ir visus, išskyrus tris, suvalgė. Kiek riestainių jam liko?

15. Piešinyje punktyru pavaizduotos trikampio kampų prie pagrindo pusiaukampinės. Jos kertasi statmenai. Kam lygi trikampio aukštinė, jei jo pagrindas lygus 10 cm?



16. Keli mėnesiai metuose turi po 30 dienų?

17. Misis Smit nusprendė mesti rūkyti, kai pabaigs pakelį, kuriame liko devynios cigaretės. Iš trijų nuorūkų ji gali pasidaryti vieną suktinę, pagal tabako kiekį atitinkančią vieną cigaretę. Kiek „cigarečių" ji surūkys, kol visai mes rūkiusi, jeigu suktines iš savo nuorūkų ji gali daryti neribotą skaičių kartų?

18. — Štai jums trys piliulės,— pasakė daktaras.— Išgerkite po vieną kas pusvalandį. .

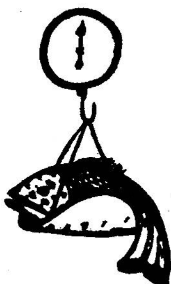
Jūs nuolankiai sutinkate. Kuriam laikui jums užteks daktaro išrašytų piliulių?

19. 137 asmenys užsirašė dalyvauti teniso varžybose, kurios vedamos olimpine sistema. Pirmojo rato varžyboms visi žaidėjai turi pasiskirstyti poromis, bet 137 — nelyginis skaičius, todėl vienam žaidėjui trūksta partnerio, ir jam iš karto leidžiama dalyvauti antrojo rato varžybose. Žai-



dėjai poromis skirstomi kiekviename rate, ir kiekvieną kartą be partnerio likusiam žaidėjui leidžiama dalyvauti sekančio rato varžybose. Kiek susitikimų bus organizuota, kol paaiškės čempionas, jeigu varžybų programa sudaryta taip, kad susitikimų būtų kuo mažiau?

20. Žuvis sveria 8 kg ir dar pusę savo svorio. Kiek sveria žuvis?

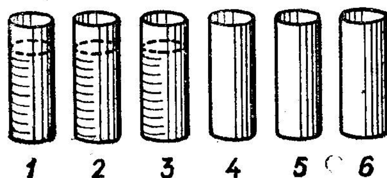


21. Anglų matematikas D. Dž. Princas atrado tokį simetrišką reiškinį:

$$X = \frac{|||}{|||} = |||\;\;|||$$

Kam lygus *X*? (Trijų vertikalių brūkšnių rinkinį galima interpretuoti trejopai.)

22. Sustatykite 6 stiklines eile taip, kaip parodyta piešinyje. Trys pirmos stiklinės pripiltos vandens, trys paskutinės tuščios. Ką reikia padaryti, kad pilnos ir tuščios stiklinės eitų pakaitomis, jeigu galima paliesti tik vieną (bet kurią) stiklinę?



23. Ratas turi 10 stipinų. Kiek tarpų tarp stipinų?

24. „Žodžių skaičius šiame sakinyje yra lygus septyniems". Šis teiginys, aišku, teisingas. Sugalvokite sakinį, turintį tiesiogiai priešingą prasmę ir taip pat teisingą.

25. Tiems patiems tėvams dvi mergaitės gimė vienais ir tais pačiais metais, vieną tą patį mėnesį, vieną ir tą pačią dieną, bet jos ne dvynukės. Paaiškinkite, kaip čia gali būti.

26. Tarkime, jog kas nors jums siūlo lažybas tokiomis sąlygomis: jūsų partneris stato dolerį ir tvirtina, kad jeigu jam duosite 5 dolerius, jis jums duos grąžos 100 dolerių. Ar verta lažintis?



ATSAKYMAI

1. Dvi valandas (žadintuvas suskambės 24 valandą).

2. $\frac{5}{12}$. Tikimybė, kad Jonui ir Motiejui iškris vienodas akių skaičius, lygi $\frac{1}{6}$; vadinasi, tikimybė, kad akių skaičius bus skirtingas, lygi $\frac{5}{6}$, arba $\frac{10}{12}$. Pusė šio skaičiaus ir yra tikimybė, kad Jonui iškris daugiau akių, negu Motiejui.

3. „Į..."

4. Atstumas tarp stulpų gali būti bet koks: tiesių, jungiančių vieno stulpo viršūnę su kito pagrindu, susikirtimo taško atstumas nuo žemės yra lygus dviejų stulpų aukščių sandaugai, padalytai iš jų sumos.

5. Namo numeris.

6. Nuliui.

7. Prie bet kokios datos pridėjus skaičių metų, praėjusių po jos iki kokios nors sekančios datos (šiame pavyzdyje prie 1963), gaunama antroji data, todėl sumos tarpusavyje lygios (ir kiekviena jų lygi $1963 \times 2 = 3926$).

8. 60°. Sujungę punktyru atvaizduotų tiesių galus, gausite lygiakraštį trikampį.

9. 10 m. Palietusi sieną pirmą kartą, žuvis keičia kursą 90°. Stataus kampo, kurio viršūnė yra apskritime, kraštinės kerta apskritimą diametraliai priešinguose taškuose. Vadinasi, baseino skersmuo yra stataus trikampio, kurio statiniai 6 m ir 8 m, įžambinė.

10. Uždavinio sąlygoje žodžius „visiems 6 000 miesto gyventojų" reikia suvokti pilna tų žodžių prasme: testai buvo pasiūlyti kūdikiams, vaikams, suaugusiems ir nusenusiems.

11. Tokių formulių daug, pavyzdžiui $2+1^x$; 0^x+3; $2+\frac{x}{x}$ ir t. t.

12. Bet kurioje sklypo vietoje. Trijų takų ilgių suma pastovi ir lygi lygiakraščio trikampio aukštinei.

13. 103.

14. Trys riestainiai.

15. Begalybei. Kampų *A* ir *B* suma lygi 90°. Kampai prie trikampio pagrindo (2*A* ir 2*B*) sudaro 180°. Vadinasi, viršūnės kampas turi būti lygus 0°, o trikampio šoninės kraštinės tarpusavyje lygiagretės, t. y. susikertančios begalybėje.

16. Visi mėnesiai, išskyrus vasarį.

17. Trylika. Kai kurie skaitytojai mano, kad misis Smit neleistinai išlaidi, nes paskutinės suktinės nuorūka lieka nepanaudota. Būtų geriau, samprotauja jie, kad misis Smit nuspręstų mesti rūkyti, kai pakelyje liktų 10 cigarečių. Po to, kai ji surūkė 14 „cigarečių" (t. y. tabako, kuris sudaro 14 cigarečių, kiekį), jai liktų 2 nuorūkos. Peleninėje ji galėtų rasti kokią tai trečią nuorūką, o surūkiusi savo penkioliktąją — ir paskutinę — cigaretę, vėl iš naujo grąžinti ją į peleninę.

18. Vienai valandai.

19. Iškristi turi 136 tenisininkai, vadinasi turi įvykti 136 susitikimai.

20. 16 kg.

21. $X = \frac{111}{3} = 37$.

Trys vertikalūs brūkšniai skaitiklyje reiškia 111, parašytą įprastoje dešimtainėje skaičiavimo sistemoje, trys vertikalūs brūkšniai vardiklyje — romėnišką trejetą. Pirmieji trys vertikalūs brūkšniai dešinėje lygybės pusėje taip pat reiškia romėnišką trejetą, o pastarieji trys vertikalūs brūkšniai — 7, parašytus dvejetainėje sistemoje.

22. Iš antrosios stiklinės perpilti vandenį į penktąją ir antrąją pastatyti atgal į vietą.

23. Taip pat 10.

24. „Žodžių skaičius šiame sakinyje tikrai nėra lygus septyniems".

25. Mergaitės dvynukės, gimusios kartu su broliu arba su trečia sesute („trynukės").

26. Neverta. Paėmęs jūsų 5 dolerius, lažybų partneris gali pasakyti: „Aš pralošiau",— ir sumokėti jums dolerį. Išlošite lažybas, bet prarasite 4 dolerius.

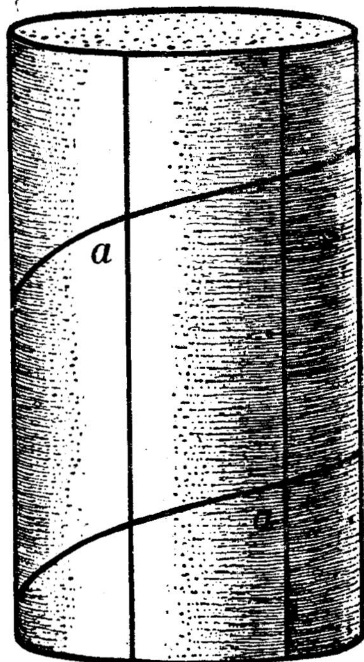
XXVI skyrius

Nuo kamščiatraukio iki DNR

Tiesus kardas glaudžiai, be tarpų įlenda į tiesias makštis. Tas pats yra ir su kardu, išlenktu apskritimo lanko forma: jį visuomet galima įkišti į tokio paties kreivumo makštis. Šią savybę ir turi galvoje matematikai, kartais tieses ir apskritimus vadindami „sau kongruenčiomis" kreivėmis: pagal sau kongruenčią kreivę slenkant bet kokiam jos lankui, pastarasis niekuomet „nenueina nuo bė-

gių“, t. y. bet kuriuo laiko momentu sutampa su atitinkamu kreivės intervalu.

Ar galima kardą ir makštis sugalvoti kokios nors kitokios formos, negu tiesės atkarpa arba apskritimo lankas? Daugelis, net ir gerai pagalvoję, atsako, kad jokios kitos formos sugalvoti negalima. Tačiau jie klysta. Galima ir trečioji sau kongruenti kreivė — ritininė spiralė. Tai kreivė, kuri, vyniodamasi išilgai ritinio paviršiaus, visas jo sudaromąsias kerta tuo pačiu kampu. Pasižiūrėkite į 144 paveikslą. Vertikalias tieses, lygiagrečias ritinio ašiai, vadinsime sudaromosiomis; raide α pažymėsime pastovų kampą, kurį sudaro spiralė su kiekviena sudaromąja. Visuose spiralės taškuose kreivumas vienodas, todėl spiralinį kardą be vargo galima įsukti į spiralines makštis ir taip pat lengvai išsukti jį atgal.



144 pav. Spiralė, apvyniota ant skritulinio ritinio (stora linija)

Iš tikrųjų tiesę ir apskritimą galima laikyti ritininės spiralės ribiniais atvejais. Tokios spiralės vijas glaudžiai prispaudus vieną prie kitos, susidarys spiralė, panaši į vadinamą „žingsniuojančią spyruoklę“ *. Padidinus kampą α iki 90°, spiralės susiglaudžia į apskritimą.

Antra vertus, tempdami spiralę tol, kol kampas α virs nuliu, ją paversite tiese. Lygiagrečių šviesos spindulių, krentančių ant sienos stačiu kampu, kelyje pastačius

* Žingsniuojanti spyruoklė (Slinky toy) — JAV paplitęs žaislas. Tai metalinė spyruoklė su labai glaudžiomis vijomis. Pastatyta ant nuožulnios plokštumos, ji pradeda „žingsniuoti“, vartaliodamasi ir pakaitomis pakeldama bei nuleisdama tai vieną, tai kitą galą. Sustojusi apačioje, spyruoklė dar kurį laiką svyruoja, lyg stengdamasi atsikvėpti po sunkaus nusileidimo. — *Vert. į rusų k. past.*

ritininę spiralę, kurios ašis taip pat statmena sienai, ant sienos susidaręs šešėlis bus apskritimo formos. O jeigu spiralės ašis bus statmena spinduliams, ant sienos atsiras sinusoidė.

Bet kuri spiralė, ritininė arba bet kokios kitos formos, — asimetriška erdvinė kreivė, besiskirianti nuo savo veidrodinio atspindžio. Spiralę pavadinkime „dešiniasraigte“, jeigu jos vijos, „žengiant į priekį“, sukasi laikrodžio rodyklės kryptimi kaip paprastas grąžtas arba kamščiatraukis. Palaikykite tokį kamščiatraukį prieš veidrodį ir pamatysite, kad jo atspindys, Alisos * žodžiais, „elgiasi visiškai priešingai“. Dešiniasraigtis kamščiatraukis veidrodyje atrodys kairiasraigtis. Gavę tokį kamščiatraukį, galėsite kuriam nors draugui iškrėsti linksmą pokštą. Mes taip neįpratę prie kairiojo sriegimo, kad jūsų draugas keletą minučių veltui grumsis su kamščiatraukiu, kol pagaliau supras, kad jį reikia įsukti prieš laikrodžio rodyklę.

Išskyrus sraigtus, varžtus ir veržles, kurie pagal standartą gaminami dešiniasraigčiai (kairiasraigčiai jie gaminami tik specialiems tikslams), visos kitos gaminamos spiralės paprastai būna ir dešiniasraigtės, ir kairiasraigtės — tai ilgi sukti saldainiai, sraigtiniai laiptai, lynai ir kabeliai, nuvyti iš suktų virvių ir laidų ir t. t. Dešiniasraigtės ir kairiasraigtės gali būti taip pat ir kūginės spiralės (spiralės, apvytos ant kūgio paviršiaus), pavyzdžiui, čiužinių spyruoklės arba spiraliniai koridoriai, panašūs į Hungencheimo muziejaus ** koridorius. Šio muziejaus pastatas yra apverstos, į viršų platėjančios kūginės spiralės formos.

Bet gamtoje viskas sutvarkyta visai ne taip! Spiraliniai dariniai, kurių gausu gyvuose organizmuose, pradedant paprasčiausiu virusu ir baigiant žmogaus kūno dalimis, genetiniu kodu beveik visuomet būna tiksliai informuojami, į kokią pusę jiems suktis. Be to, genetinio kodo nešėjos yra didžiulės nukleininės rūgšties molekulės, turinčios (daugelio biochemikų nuomone) dešiniasraigtės spiralės formą. Bet ir tai dar ne viskas. Nuo to laiko, kai pasirodė pirmieji L. Polingo darbai, kuriuose nagrinėjama spi-

---

* Luiso Kerolio knygų „Alisa stebuklų šalyje“ ir „Alisa Veidrodžio karalystėje“ herojė. Cituojamas išsireiškimas paimtas iš antrosios knygos. — *Vert. į rusų k. past.*

** XX amžiaus meno muziejus Niujorke. — *Vert. į rusų k. past.*

ralinė proteino molekulių sandara, vis daugiau faktų rodo, kad gamtoje egzistuojančios didžiulės proteino molekulės turi dešiniasraigtės spiralės formos „griaučius". Nukleininės rūgšties ir proteino molekulių „griaučiai" iš asimetriškų elementų — spiralės atkarpų, susisukusių į tą pačią pusę, sudaro grandinėlę. Praėjusi kiekvieną tokį elementą, visa grandinė pilnai apsisuka apie ašį. Kažką panašaus patiriame, kopdami sraigtiniais laiptais.

Gyvūnų, turinčių dvipusę (arba, kaip dar sakoma, bilateralinę) simetriją, kūnuose stambesnių spiralinių darinių paprastai randama poromis — po vieną abiejose gyvūno kūno pusėse. Kiekviena dviejų spiralių, sudarančių porą, yra viena kitos veidrodinis atspindys. Akivaizdūs pavyzdžiai — avinų, ožių, antilopių ir kitų žinduolių ragai (145 pav.). Žmogaus ausies sraigė yra kūginės spiralės formos: dešiniojoje ausyje — dešiniasraigtės, kairiojoje — kairiasraigtės. Įdomi išimtis yra narvalo — nedidelio banginio, gyvenančio šiaurinių jūrų vandenyse — dantis. Šis keistas gyvūnas gimsta su dviem viršutiniais dantimis. Patelės abu dantys glūdi žandikaulyje. Patino dešinysis dantis taip pat yra žandikaulyje, o kairysis dantis pradeda augti į priekį ir kyšo iš burnos lyg ietis. Jis siekia beveik tris metrus, t. y. viršija pusę gyvūno ilgio nuo nosies galiuko iki uodegos galiuko! Visas dantis išvagotas spiralinėmis vagutėmis, kurios sukasi prieš laikrodžio rodyklę nuo danties pagrindo į jo galą (146 pav.). Atrodytų, kad tais retais atvejais, kai abu dantys virsta iltimis, dešiniojo danties vagutės turėtų eiti laikrodžio rodyklės kryptimi. O iš tikrųjų spiralė ant dešiniojo danties, pasirodo, taip pat yra kairiasraigtė. Zoologų nuomonės dėl šio reiškinio priežasčių skiriasi. D'Arsi Tompsonas knygoje „Ūgis ir forma" („On Growth and Form") gina savo teoriją, pagal kurią banginis, plaukiodamas vandenyje, visą laiką daro vos pastebimą sraigtinį judesį dešinėn. Dėl didžiulės ilties masės jos apačioje turi susidaryti priešingas sukamasis momentas, kuris ir susuka iltį prieš laikrodžio rodyklę.

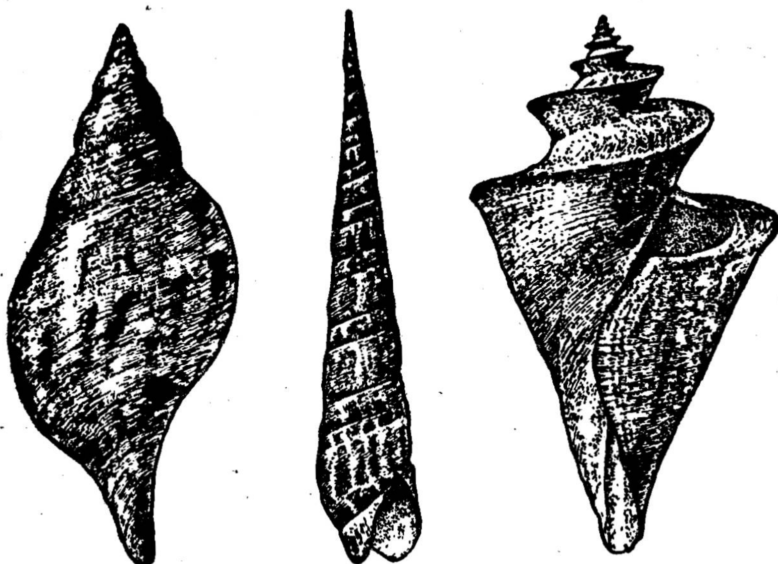
Jeigu bet kokių augalų ir gyvūnų sandaroje aptinkama neporinė spiralė, kiekvienai rūšiai ji paprastai būna tik vienos krypties, charakteringos tik tai rūšiai. Tai teisinga ir begalinei daugybei spiralės formos bakterijų, ir aukštesnių gyvūnų spermatozoidams. Žmogaus bambagyslė susideda iš vienos venos ir dviejų arterijų, sudarančių



145 pav. Pamyro avino ragai, susisukę į priešingas puses



146 pav. Narvalo iltys, visuomet turinčios kairiasraigtes įvijas



147 pav. Trys dešiniasraigčių kūginių spiralių formos

trigubą spiralę, visuomet susisukusios kairėn. Nuostabiausi pavyzdžiai — sraigių ir kitų moliuskų kriauklės, susisukusios kūgine spirale. Toli gražu ne visuomet galima pasakyti, į kurią pusę susisukusi kriauklė. Pavyzdžiui, plokščią nautilijaus kriauklę, kaip spiralinį ūką, galima perkirsti pusiau į dvi visiškai vienodas dalis: dešiniąją ir kairiąją. Tačiau yra tūkstančiai gražiausių kriauklių, sudarančių arba dešiniąją, arba kairiąją spiralę (147 pav.). Vienų moliuskų kriauklės būna susisukusios tik dešinėn, kitų — tik kairėn. Kai kurios moliuskų rūšys vienoje vietoje visuomet savo kriauklę susuka dešinėn, o kitoje — kairėn. Retkarčiais pasitaikančius „išsigimėlius", susisukusius į „priešingą" pusę, labai vertina kolekcionieriai.

Nebraskos ir Vajomingo valstijose randama labai keistų spiralinių suakmenėjimų, žinomų „velnio kamščiatraukio" pavadinimu (Daemonelix). Šios didžiulės spiralės, siekiančios beveik dviejų metrų aukštį, būna susisukusios ir dešinėn, ir kairėn. Dešimtmečius tęsėsi geologų ginčai apie jų kilmę. Vieni laikė, kad tai suakmenėję senovės augalai, kiti — kad tai spiraliniai urvai, kuriuos išrausė dabartinių bebrų protėviai. Galų gale nugalėjo „bebrų teorijos" šalininkai, nes kai kuriuose kamščiatraukių formos bebrų urvuose buvo aptiktos bebrų liekanos.

Augmenijos pasaulyje spiralių sutinkama kiekviename žingsnyje: kankorėžio žiedyno, lapų, gėlių, ūselių sandaroje ir net pačiame lapų bei šakų išsidėstyme aplink medžio kamieną. Spiralės vijų skaičius, kuris reikalingas, pereinant nuo apatinio lapo prie artimiausio viršutinio, lygus vienam iš plačiai žinomos Fibonačio * eilutės skaičių: 1, 2, 3, 5, 8, 13,... (kiekvienas šios eilutės narys lygus dviejų pirmesniųjų narių sumai). Šis reiškinys botanikoje vadinamas „filotaksiu" (filotaksis — lapų išsidėstymas); apie jo netikėtą ryšį su Fibonačio skaičiais yra daug literatūros.

Vijoklinių augalų stiebai paprastai sukasi pagal dešiniąją spiralę, tačiau dauguma vijoklinių augalų atmainų auga poromis, be to, augalų partnerių stiebai susisukę priešingomis kryptimis. Sausmedis, pavyzdžiui, visuomet sukasi pagal kairiąją spiralę, o vijoklis — pagal dešiniąją. Jų aistringas „apsikabinimas" daugelį metų žavėjo anglų poetus.

* Įdomu pastebėti, kad 1963 metais Amerikoje net buvo įsteigtas specialus žurnalas *The Fibonacci Quarterly*



148 pav. **Žaislas iš dviejų spiralės pavidalo vieliukių; į jį galima žiūrėti kaip į neutrino ir antineutrino atsiradimo modelį**

Spiralės kryptis — labai sąlyginė sąvoka ir visiškai priklauso nuo to, kokią spiralę laikysime dešiniąja, o kokią — kairiąja. Įsukdami grąžtą su dešiniaisiais sriegiais, pasižiūrėkite į jį iš kitos pusės ir pamatysite, kad sraigto taškai, artėdami į jus, juda prieš laikrodžio rodyklę, vadinasi, jo sriegimą lygiai taip pat galima pavadinti kairiasraigčiu.

Maždaug prieš keturiasdešimt metų Amerikoje pasirodė nepaprastas žaislas, pagrįstas optiniu efektu, atsirandančiu, susukant dvi priešingų krypčių spirales. Šį žaislą nesudėtinga padaryti iš dviejų priešingomis kryptimis susuktų vieliukių. Sukabinę vieliukes taip, kaip parodyta 148 paveiksle, prilituokite jas vieną prie kitos keliuose taškuose, kad konstrukcija būtų standi. Abiejų rankų nykščiais ir smiliais suimkite už jos galų (turima galvoje dvigubo tarpo galai). Dabar daug kartų iš eilės suglaudžiant ir išskečiant rankas, pirštai judės lygiagrečiai spyruoklės ašiai ir visa konstrukcija pradės suktis. Žiūrovams susidaro įspūdis, tartum spyruoklė kažkokiu nesuprantamu būdu visą laiką traukiama iš beviltiškai supainioto begalinio kamuolio. Kadangi neutrinas ir antineutrinas turi priešingą spirališkumą, man atrodo, kad tokiu žaislu galima vaizdžiai parodyti nenutrūkstamą neutrino ir jo veidrodinių dvynių atsiradimą.

Neutrino trajektorijos spiralinis pobūdis susijęs su tuo, kad ši dalelė turi sukinį ir todėl vienu metu juda pirmyn (šviesos greičiu) bei sukasi apie tam tikrą ašį. Spirale juda ir negyvosios, ir gyvosios gamtos daiktai: lėktuvo arba garlaivio bet kuris besisukančio sraigto taškas (išskyrus ašies); voveraitė, medžiu bėganti į viršų arba nusileidžianti žemyn; būriai šikšnosparnių, išskrendančių iš požeminių urvų. Kūginės spiralės pavyzdžiais galima laikyti verpetus, uraganų piltuvus, vandens, bėgančio grioveliu, taškų trajektoriją, ir tūkstančius kitų gamtos reiškinių.

Su spirale susijęs ir toks nesudėtingas galvosūkis.

Ant besisukančio ritinio šoninio paviršiaus nupieštos trys spiralės: raudona, balta ir mėlyna. Ritinio aukštis 120 cm. Raudona linija visas ritinio sudaromąsias (ritinio paviršiuje tieses, lygiagrečias jo ašiai) kerta pastoviu 60° kampu. Reikia rasti raudonos linijos ilgį.

Iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad pateiktoje sąlygoje per maža duomenų linijos ilgiui nustatyti. O iš tikrųjų, teisingai traktuojant, uždavinys išsprendžiamas labai paprastai,

ATSAKYMAI

Statųjį trikampį apvyniojus apie ritinį taip, kad jo pagrindas sutaptų su apskritimu, esančiu ritinio pagrinde, trikampio įžambinė sudarys spiralę. Tarkime, kad pateiktame uždavinyje raudona linija yra trikampio įžambinė „Išskleiskime" šį trikampį. Jo kampai bus lygūs 30° ir 60°, vadinasi, įžambinė dvigubai ilgesnė už statinį, esantį prieš 30° kampą. (Tai lengva matyti, sudarius iš dviejų tokių trikampių vieną lygiakraštį.) To statinio ilgis pagal sąlygą yra 120 cm, vadinasi, įžambinės (raudonosios linijos) ilgis lygus 240 cm.

Įdomu, kad šis dydis nepriklauso ne tik nuo ritinio skersmens, bet ir nuo jo pagrindo formos. Pagrindas gali būti apribotas bet kokia netaisyklinga uždara kreive; nuo to atsakymas nepasikeis.

XXVII skyrius

Topologiškos pramogos

Bangom pasiaust jūreiviai trys
Sumanė ne į lėkštę sėdę.
Juos Kleino butelis plukdys,
Per jūrą plaukt jame ne gėda.
Juk butelyje taip jauku,
Už stiklo seklumos ir bangos,
Bet kas gi čia — iš ties baisu:
Vanduo ir viduje jau rangos.

Frederikas Vinzoras

Topologo požiūriu, kvadratinis popieriaus lapas yra dvipusio paviršiaus su vienu kraštu modelis. Šios savybės pasirodo yra labai svarbios: net jei suglamžysite popieriaus lapą į rutuliuką, jis vis tiek liks dvipusis paviršius su vienu kraštu. Be to, įsivaizduokime, kad lapas iškirptas iš gumos. Ištempę galite iš jo gauti trikampį arba skritulį, bet jis kaip ir anksčiau bus dvipusis paviršius su vienu kraštu. „Dvipusiškumas" ir „vienakraštiškumas" — topologinės paviršiaus savybės, kurios nesikeičia, nors ir kaip jūs temptute, maigytute, suktute, lenktute šį paviršių.

Kiekvienas paviršius turi dar du ne mažiau svarbius topologinius invariantus: chromatinį skaičių ir Bečio skaičių. Chromatinis skaičius — maksimalus sričių, į kurias galima padalyti paviršių taip, kad kiekviena sritis turėtų bendrą sieną su bet kuria iš kitų sričių, skaičius. Jeigu kiekvieną sritį nuspalvinsime savo spalva, tai kokią spalvų porą beturėtume galvoje, visada rasime dvi viena prie kitos prigludusias sritis, nuspalvintas tomis dviem spalvomis. Kvadratinio lapo chromatinis skaičius lygus 4. Kitaip tariant, kvadrato negalima padalyti į tokias penkias sritis, kad kiekviena sričių pora turėtų bendrą sieną. (Šio tvirtinimo nereikia painioti su garsiąja keturių spalvų problema — joje kalbama apie žemėlapius, kuriuose gali būti pavaizduotas bet koks baigtinis skaičius.) Bečio skaičius (taip pavadintas praeito šimtmečio italų fiziko Enriko Bečio garbei) lygus pjūvių, kuriuos galima atlikti paviršiuje taip, kad jis nebūtų padalytas į dvi atskiras dalis, skaičiui. Jeigu paviršius turi kraštus, kiekvienas pjūvis turi būti „transkontinentinis", t. y. jis turi eiti nuo vieno kažkokio taško krašto iki kito taško (pastarasis gali priklausyti ir kitam kraštui). Jeigu paviršius uždaras, t. y. neturi krašto, kiekvienas pjūvis turi būti kokia nors paprasta uždara kreivė (tokį pjūvį vadinsime uždaru). Aišku, kad kvadratinio popieriaus lapo Bečio skaičius lygus nuliui: bet koks pjūvis „nuo krašto iki krašto", suprantama, dalija kvadratą į dvi atskiras dalis.

Suglaudę dvi priešingas kvadrato kraštines ir suklijavę iš jo vamzdelį, gausime modelį, kuris topologiškai skirsis nuo kvadrato. Šis naujasis paviršius tebėra dvipusis, bet jo kraštus sudaro jau tik dvi paprastos uždaros kreivės. Kaip ir kvadrato, tokio paviršiaus chromatinis skaičius lygus 4, o Bečio skaičius lygus 1: jeigu tokį pa-

viršių perpjausime „nuo krašto iki krašto“, jis nebebus vamzdis, bet neišsidalys į dvi atskiras dalis.

Trečią paviršiaus, topologiškai ekvivalentaus sferos arba kubo paviršiui, tipą galima gauti, perlenkus kvadratą per įstrižainę ir suklijavus kraštus. Paviršius šiuo atveju liks dvipusis, bet be kraštų. Vadinasi, paviršius uždaras, ir jo chromatinis skaičius lygus 4, o Bečio skaičius lygus 0: bet koks uždaras pjūvis dalija, suprantama, paviršių į dvi atskiras dalis.

Kur kas įdomesnį rezultatą gausime, jeigu, prieš suklijuodami kvadrato priešingas kraštines, jį persuksime pusiau. Jeigu kvadratas iškirptas iš popieriaus, iš pirmo žvilgsnio atrodo, jog jo persukti negalima; iš tikrųjų pakanka tik sulankstyti kvadratą per įstrižaines taip, kaip parodyta 149 paveiksle. Sujungę rodyklėmis pažymėtų kraštinių porą, gausite gerai žinomą Miobijaus lapą, kurį pirmą kartą išnagrinėjo praeito amžiaus vokiečių astronomas A. F. Miobijus; jis vienas pirmųjų susidomėjo geometrinių figūrų topologinėmis savybėmis. Suklijuoto modelio negalima išversti, todėl suprasti, kad tai iš tikrųjų Miobijaus lapas, toli gražu nelengva, tačiau, geriau įsižiūrėjus, vis dėlto tuo galima įsitikinti. Gautasis paviršius vienapusis, su vienu kraštu, jo Bečio skaičius lygus 1. Šio paviršiaus chromatinis skaičius staigiai šokteli, palyginti su anksčiau minėtais, ir lygus 6: sudarytame paviršiuje 6 sritis, nuspalvintas 6 spalvomis, galima taip išdėstyti, kad kiekviena sritis turės bendrą sieną su visomis kitomis penkiomis sritimis.

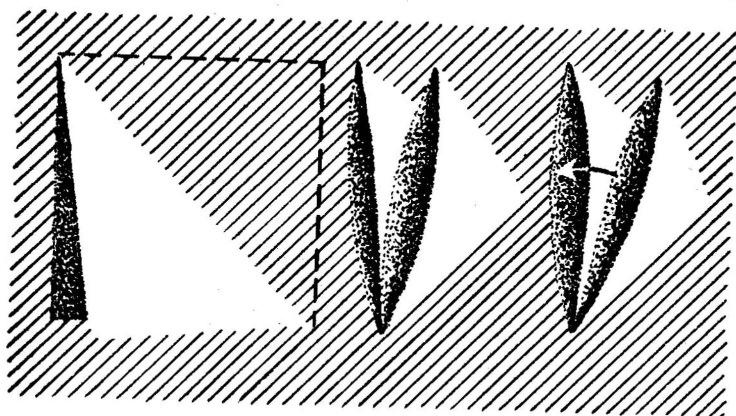
Nepersukę suklijuokime poromis priešingas kvadrato kraštines. Gausime paviršių, kuris vadinamas toru. Jis topologiškai ekvivalentus riestainio arba kubo, kuriame pragręžta skylė, paviršiui. Iš 150 paveikslo matyti, kaip paprasta padaryti plokščią kvadratinį toro modelį. Reikia per pusę sulenkti kvadratą ir suklijuoti išilgai juodos tiesės, pavaizduotos paveikslo dešinėje, viršuje, paskui susidariusio vamzdžio galus suklijuoti taip, kaip parodyta rodyklėmis paveikslo apačioje. Toras — uždaras (be kraštų) dvipusis paviršius, kurio chromatinis skaičius 7, o Bečio skaičius 2. Du pjūvius torui galima padaryti, pavyzdžiui, taip: iš pradžių išilgai meridiano, per kurį buvo suklijuota antroji kvadrato kraštinių pora (toras vėl virs vamzdžiu), padaryti uždarą pjūvį, paskui išvesti „transkontinentinį“ pjūvį išilgai tiesės, per kurią buvo suklijuo-

ta pirmoji kvadrato kraštinių pora. Griežtai tariant, jeigu, nesupjaustę toro, tiesiog pavaizduotume abu pjūvius jo paviršiuje, kiekvienas pjūvis būtų uždaras. Antras pjūvis tapo pjūviu „nuo krašto iki krašto“ tik dėl to, kad abu pjūvius atlikome ne tuo pačiu metu, o paeiliui.

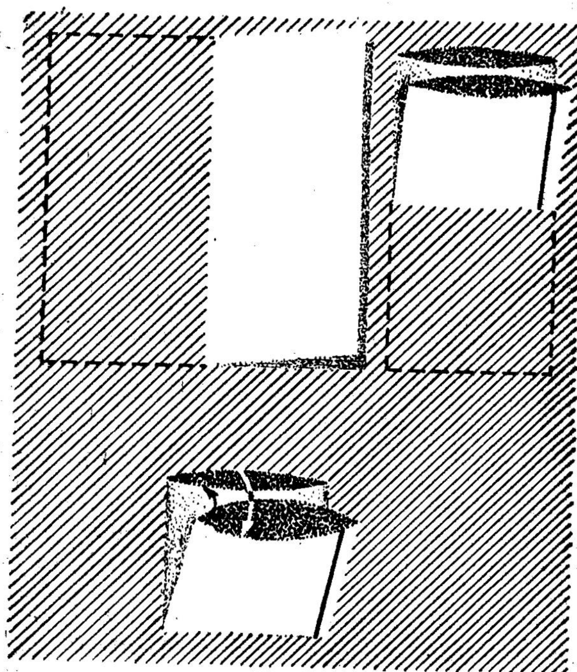
Pjaustant torą įvairiais būdais, sunku iš anksto atspėti rezultatą. Pjaukime, pavyzdžiui, mūsų nagrinėjamo toro modelį per pusę išilgai horizontalios arba vertikalios vidurinės linijos, lygiagrečios kvadrato kraštinėms. Abu pjūviai uždari, vienas jų toro paviršiuje sudaro „lygiagretę“, kitas — „meridianą“. Kiekvienas pjūvis paverčia torą vamzdeliu. Perpjovus toro modelį pagal bet kurią įstrižainę, kiekviena pusė, pasirodo, bus kvadratas. Pabandykite sugalvoti, kaip atlikti du tokius uždarus pjūvius, kurie paverstų torą dviem grandinės žiedais.

Yra daugybė paviršių, kurie yra uždari kaip sfera arba kubas ir vienpusiai kaip Miobijaus lapas. Paprasčiausias ir vaizdingas tokio paviršiaus pavyzdys žinomas Kleino butelio vardu. Jį 1882 metais sudarė vokiečių matematikas Feliksas Kleinas. Paprastas butelis turi išorinę ir vidinę pusę. Jeigu musė norės įrėplioti į vidų arba atvirkščiai, jai būtinai teks perkirsti kraštą, kurį sudaro butelio kakliukas. Skirtingai nuo paprasto butelio, Kleino butelis neturi krašto, ir jo paviršiaus negalima suskirstyti į vidinį ir išorinį. Paviršius, kuris atrodo išorinis, neišvengiamai pereina į paviršių, kuris atrodo tarytum vidinis, lygiai taip pat, kaip viena į kitą pereina dvi iš pirmo žvilgsnio skirtingos Miobijaus lapo „pusės“.

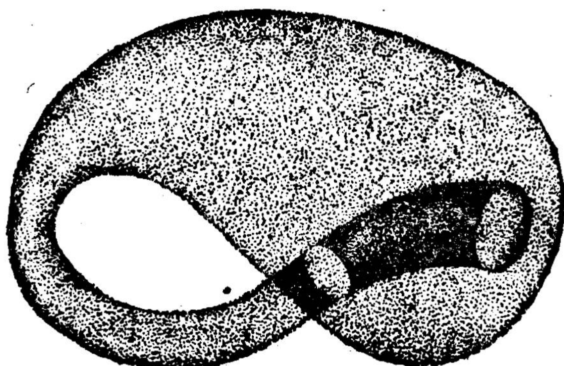
Gaila, bet trimatėje erdvėje negalima sukurti Kleino butelio, kurio paviršius nepersikirstų. Tradicinis būdas Kleino buteliui pavaizduoti parodytas 151 paveiksle. Įsivaizduokime, kad ištempėme apatinį vamzdelio galą ir užlenkėme jį į viršų, prakišdami pro vamzdelio paviršių, ir sujungėme su viršutiniu galu. Realiame modelyje, pagamintame, pavyzdžiui, iš stiklo, toje vietoje, kur vamzdelio galas praeina pro jo paties paviršių, turėtų būti skylė. Į tai nereikia kreipti dėmesio: laikoma, jog skylė uždengta butelio paviršiaus pratęsimu. Kitaip sakant, skylės nėra, susikerta tik paties butelio paviršius. Toks persikirtimas neišvengiamas, turint galvoje trimatį modelį. Jeigu įsivaizduosime, kad visas paviršius panardintas keturmatėje erdvėje, persikirtimus bus galima visiškai pa-



149 pav. Kaip iš kvadratinio popieriaus lapo padaryti Miobijaus lapą



150 pav. Kaip iš kvadratinio popieriaus lapo sukonstruoti torą



151 pav. Kleino butelis: uždaras paviršius, neturintis išorinės ir vidinės pusės

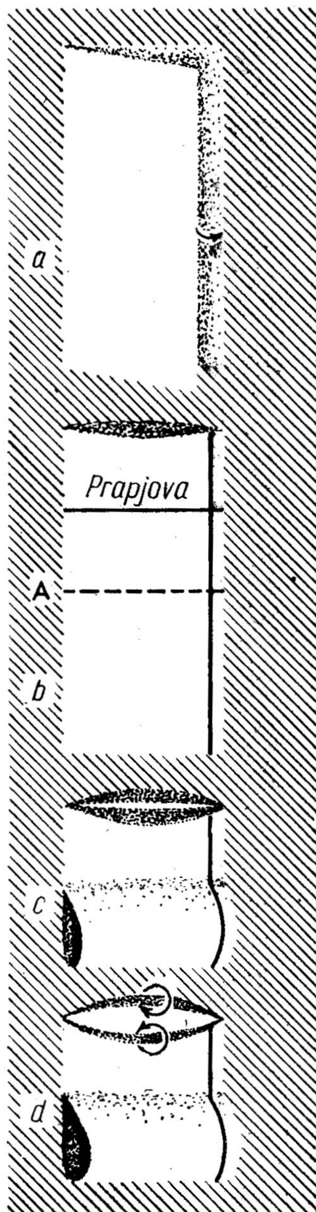
šalinti. Kleino butelis — vienpusis be kraštų paviršius. Bečio skaičius čia lygus 2, o chromatinis skaičius — 6.

Žinomas algebrinės geometrijos specialistas D. Pidas neseniai parašė knygą „Puikusis matematikos menas“. Tai nuostabi knyga, tačiau profesorius Pidas pagal nusistovėjusias tradicijas joje paskelbė neteisingą teiginį. Jis rašo, kad Kleino butelį gali pagaminti tik labai prityręs stiklapūtys, o pagaminti Kleino butelį „iš popieriaus visai negalima“. Iš tikrųjų tuo laiku, kai profesorius Pidas rašė savo knygą, niekas net ir nebandė suklijuoti popierinį Kleino butelio modelį. Bet taip tęsėsi tik tol, kol šiuo reikalu nesusidomėjo jau ne kartą minėtas Stifenas Baras, rašytojas fantastas, didelis įdomiosios matematikos mėgėjas. Baras gana greit sugalvojo daugybę būdų Kleino buteliams iš popieriaus suklijuoti ir net parašė knygą apie topologines pramogas. Baro knygoje minima daugybė naujų būdų, kaip iš paprasto popieriaus lapo išlankstyti grakščius topologinius modelius. Iš daugelio naujų būdų Kleino buteliui pagaminti, kuriuos pasiūlė Baras, pateiksiu tik vieną; taikydami jį, toliau manipuliuosime su kvadratu. Be to, šiuo būdu pagamintas modelis tiksliai atitiks tradicinį modelį, pagamintą iš stiklo.

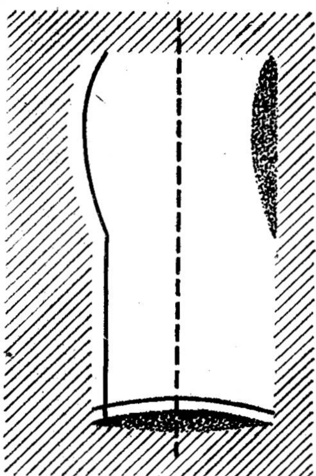
Veiksmų seka paaiškėja iš 152 paveikslo. Visų pirma perlenkite kvadratą pusiau ir lipnia juostele sujunkite kraštines, pažymėtas rodyklėmis (152 pav., *a*). Į mus atsuktoje kvadrato pusėje statmenai suklijuotoms krašti-

nėms įpjaukite popierių. Įpjovos atstumas nuo viršutinio vamzdelio krašto turi sudaryti apytiksliai kvadrato kraštinės ketvirtadalį (152 pav., *b*). Ši įpjova atitinka „skylę" Kleino butelio stiklinio modelio sienelėje. Sulenkę modelį per pusę išilgai punktyrinės linijos *A*, prakiškite apatinį vamzdelio kraštą per prapjovą (152 pav., *c*) ir suklijuokite popierinio vamzdelio viršutinį ir apatinį pagrindą taip, kaip rodyklėmis parodyta 152 paveiksle, *d*. Nesunku pastebėti, kad mūsų plokščias modelis, pagamintas iš kvadratinio popieriaus lapo, topologiškai ekvivalentus 151 paveiksle pavaizduotam stikliniam modeliui ir net, palyginti su juo, tam tikra prasme tobulesnis: popierinio modelio sienelėje mažiau pastebima skylė. Tiesa, ten, kur paviršius kerta pats save, popieriniame modelyje (tiksliau, Baro modelyje) yra įpjova, tačiau lengva įsivaizduoti, kad įpjovos kraštai sujungti taip, kad paviršius visuose taškuose tolydus ir neturi krašto.

Pjaustant popierinį modelį įvairiais būdais, galima lengvai pademonstruoti daugelį nuostabių Kleino butelio savybių. Bečio skaičius jam lygus 2. Tai nesunku įrodyti, du uždarus pjūvius atlikus išilgai suklijuo-



152 pav. Kaip iš kvadratinio popieriaus lapo sudaryti Kleino butelį



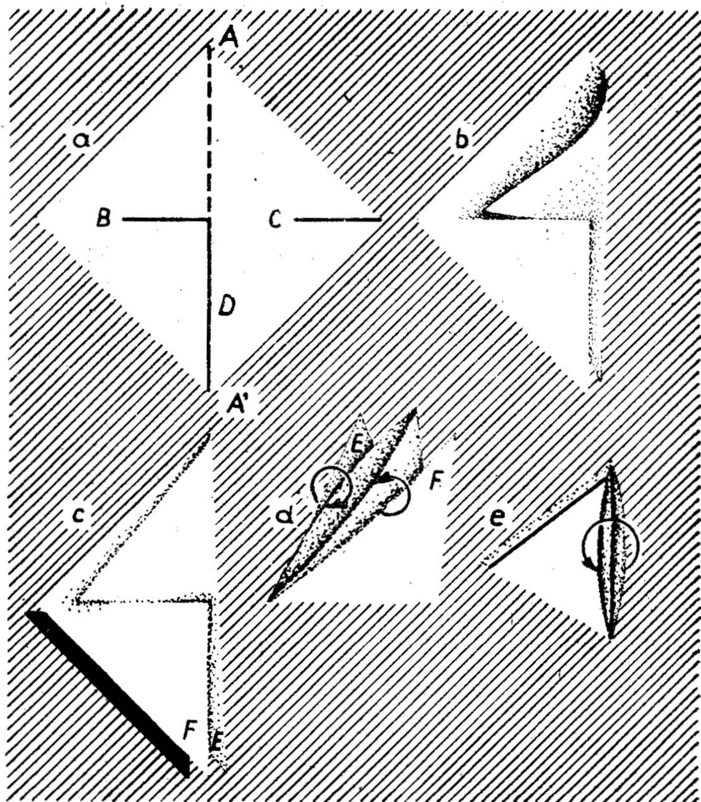
153 pav. Kleino butelį perpjovus pusiau, gaunami du Miobijaus lapai

tų kvadrato kraštinių. Perpjovę butelį per pusę vertikalia plokštuma, gausite du Miobijaus lapus, pereinančius vienas į kitą veidrodiniu atspindžiu. Tą Kleino butelio savybę patogu demonstruoti aukštu „lieknu" buteliu (153 pav.), suklijuotu ne iš kvadrato, o iš siauro ilgo stačiakampio. Perpjovę tokį butelį pusiau išilgai punktyru pažymėtos tiesės (iš esmės tai ne tiesė, o viena didelė kilpa aplink visą butelio paviršių), pastebėsite, kad kiekviena pusė yra Miobijaus lapas, turintis toje vietoje, kur pirmiau buvo įpjova, persikirtimą. Tačiau, išėmę kiekvieną lapą iš jam skirtos įpjovos pusės, galite visai užklijuoti ją, nes ji neturi įtakos Miobijaus lapo topologinėms savybėms.

Kleino butelį galima perpjauti taip, kad išeitų du Miobijaus lapai, vadinasi, galima ir atvirkštinė operacija, apie kurią užsimenama jumoristiniame nežinomo autoriaus eilėraštyje:

Didysis Feliksas,
Šlovingas Kleinas
Paskelbė aikštėj Getingeno,
Kad Miobijaus baltam lape
Keistokas talentas gyvena.
Sode bevaikščiodams,
Pagavęs mintį
Nedelsdamas karštai sušuko:
„Iš poros lapų jums kaip mat
Susuksiu puikų buteliuką".

Kaip bebūtų keista, bet pasirodo, kad vienu uždaru pjūviu iš Kleino butelio galima gauti ne du Miobijaus lapus, o tik vieną. Baro popieriniai modeliai labai vertingi todėl, kad su jais „galima eksperimentuoti", sprendžiant panašius uždavinius. Pabandykite suvokti, kaip iš Kleino butelio pjūviu galima padaryti vieną Miobijaus lapą.



154 pav. Kaip iš kvadratinio popieriaus lapo sudaryti kros-kepą ir projektyvinės plokštumos modelį

Kleino butelis ne vienintelis labai paprastas vienpusis ir be kraštų paviršius. Paviršius, kuris vadinamas projektyvine plokštuma (toks paviršiaus pavadinimas susijęs su tuo, kad jis topologiškai ekvivalentus plokštumai, nagrinėjamai projektyvinėje geometrijoje), turi daug savybių, būdingų Kleino buteliui: tai taip pat vienpusis be kraštų paviršius, kurio chromatinis skaičius lygus 6. Trimačio projektyvinės plokštumos modelio, kaip ir Kleino butelio modelio, negalima sudaryti be persikirtimo. Baro pasiūlytas tokio modelio paprastas sudarymo būdas, naudojantis kvadratiniu popieriaus lapu, pavaizduotas 154

Paviršius	Chromatinis skaičius	Eilučių skaičius	Kraštų skaičius	Bečio skaičius
Kvadratas (arba skritulys)	4	2	1	0
Vamzdelis	4	2	2	1
Sfera	4	2	0	0
Mobijaus lapas	6	1	1	1
Toras	7	2	0	2
Kleino butelis	6	1	0	2
Projektyvinė plokštuma	6	1	0	1

155 pav. Septynių pagrindinių paviršių topologiški invariantai

paveiksle. Iš pradžių kvadratą reikia perkirpti išilgai trijų ištisinių tiesių, kurios 154 paveiksle, *a,* pažymėtos raidėmis *B, C, D.* Sulenkę kvadratą per įstrižainę *AA,* įpjovą *C* įstatykite į įpjovą *B* taip, kaip parodyta 154 paveiksle, *b* ir *c.* Linija, išilgai kurios viena įpjova sutampa su kita, iš esmės bus būsimojo paviršiaus persikirtimo linija. Atlenkite į viršų trikampius vožtuvus *E* ir *F* (kiekvieną į savo pusę) ir suklijuokite kraštus, kaip parodyta rodyklėmis 154 paveiksle, *a.*

Gavome paviršiaus, kurį topologai vadina kros-kepu (sukryžiuota kepuraite), modelį. Tai persikertantis Miobijaus lapas, kurio kraštą galima ištempti ir gauti apskritimą, neįvedant jokių naujų persikirtimų. Kros-kepo kraštą sudaro pjūvio *D,* iš pradžių išvesto išilgai vienos kvadrato įstrižainės (154 pav., *a*), kraštai.

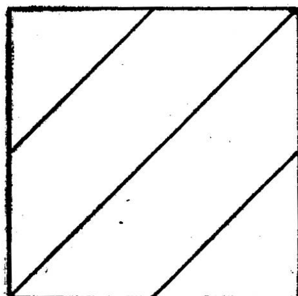
Pažymėsime, kad, skirtingai nuo paprasto Miobijaus lapo, gautoji figūra simetriška: joje negalima fiksuoti nei dešininės, nei kairinės orientacijos. Užlenkus sukryžiuotos kepuraitės kraštą ir suklijavus jį, kaip parodyta 154 paveiksle, *e,* išeitų projektyvinė plokštuma. Gali atrodyti, kad projektyvinei plokštumai, kaip ir Kleino buteliui, Bečio skaičius lygus 2, bet taip nėra. Šiuo atveju Bečio skaičius lygus 1: bet kuris uždaras pjūvis arba dalija projektyvinę plokštumą į dvi atskiras dalis, arba paverčia ją paviršiumi, ekvivalenčiu kvadratui, kuris, kaip žinoma, susiskaido į du gabalus, kokį uždarą pjūvį jame bepadarytume. Jeigu projektyvinės plokštumos modelyje išpjausite skrituliuką (kokioje vietoje — nesvarbu), ši plokštuma pavirs sukryžiuota kepuraite.

Visa įsigytų žinių iš topologijos visuma telpa 155 paveiksle pateiktoje lentelėje. Kairėje schemiškai parodyta, kaip kiekviename modelyje reikia suklijuoti kvadrato kraštines. Kraštinės, kurias reikia suklijuoti vieną su kita, pažymėtos vienodai, jų rodyklių kryptys suklijavus turi sutapti, be to, turi sutapti ir viršūnės, pažymėtos vienodomis raidėmis. Punktyru žymimos kraštinės, sudarančios suklijuoto paviršiaus kraštą. Antrame stulpelyje šalia duoto paviršiaus chromatinio skaičiaus parodyta viena tų kortelių, kurias galima nuspalvinti maksimaliu skaičiumi spalvų. Labai naudinga paviršių spalvinti iš abiejų pusių (tarytum dažytumėte ne popierių, o audeklą, per kurį dažai prasisunkia). Tai primintų jums, jog visų

paviršių storis lygus nuliui. Išnagrinėję gautąjį modelį, įsitikinsite, kad kiekviena sritis, kaip ir turi būti, turi bendras sienas su visomis kitomis.

ATSAKYMAI

Norint iš toro padaryti du susikabinusius žiedus, pirmiausia toro kvadrato išklotinėje, arba „kirpinyje", nubrėžiamos trys lygiagrečios tiesės (156 pav.). Sudarę iš kvadrato torą, pamatysite, kad jums reikalingi pjūviai eina kaip tik išilgai tų tiesių. Perpjautas paviršius susiskaldo į du susikabinusius žiedus. Kiekvienas žiedas yra pilnai persuktas, todėl jo paviršius yra dvipusis. Kaip reikia atlikti uždarą Kleino butelio pjūvį, kad iš jo išeitų vienas Miobijaus lapas? Išnagrinėję modelį, pavaizduotą 153 paveiksle, pamatysite, kad lenkimo linijos sudaro dvigubą aštuoniukės formos kilpą. Perpjovus Kleino butelį išilgai vienos bet kurios aštuoniukės kilpos, išeis Miobijaus lapas. Nuo aštuoniukės kilpos parinkimo priklauso, į kurią pusę bus „susukti" gautieji Miobijaus lapai.



156 pav. Uždavinio apie toro supjaustymą į du sukabintus persuktus žiedus sprendimas

Kyla klausimas: kas atsitiks paviršiui, perkirpus jį išilgai abiejų kilpų kartu (išilgai visos aštuoniukės)? Išeis dvipusis su dviem kraštais kaspinas, keturis kartus persuktas puse apsisukimo. Dėl įpjovos modelyje gautasis paviršius vienoje vietoje bus įplėštas, todėl jums teks įsivaizduoti, kad jokios įpjovos nėra. Šis persikertantis kaspinas yra veidrodiškai simetriškas, ir jam negalima priskirti jokios orientacijos. Persikirtimo taškus galima pašalinti, atsargiai ištraukus kaspiną iš plyšio, atsiradusio dėl įpjovos, o plyšį užklijuoti. Gautojo paviršiaus kraštas yra spiralė, kurios kryptis priklauso nuo to, į kurią pusę iš plyšio buvo ištrauktas kaspinas. Visi uždaviniai, ap-

rašyti šiame skyriuje, sudaryti, remiantis Stifeno Baro popieriniais modeliais, kuriuos jis nagrinėja knygoje apie topologines pramogas.

XXVIII skyrius

Kombinatorikos paradoksai

„Tokiame didžiuliame žmonių avilyje, — kartą pasakė Šerlokas Holmsas apie Londoną, — galimos bet kurios įvykių ir faktų kombinacijos, atsitinka daugybė nereikšmingų, bet mįslingų ir keistų dalykų..." * Tereikia „žmonių avilį" pakeisti „kokios nors prigimties elementų aibe", ir didžiojo seklio pareiškimas taps neblogu kombinatorinės matematikos aprašymu.

Tai, ką nagrinėja kombinatorinė analizė, galima pavadinti elementų (atskirų daiktų) pasiskirstymu grupėmis, atsižvelgiant į tam tikras iš anksto iškeltas sąlygas. Pavyzdžiui, žaisdami šachmatais, sprendžiate kombinatorinį uždavinį, kaip, laikantis žaidimo taisyklių, geriausiai išdėstyti tam tikrą elementų (šachmatų figūrų) skaičių 8×8 langelių dydžio lentoje, kad vienas išskirtas elementas (varžovo karalius) negalėtų išvengti mato. Kompozitorius, kurdamas naują melodiją, taip pat sprendžia kombinatorinį uždavinį: jam reikia paskirstyti tam tikros aibės (šiuo atveju gaidų aibės) elementus taip, kad melodija teiktų klausytojams estetinį pasitenkinimą. Kombinatorinių uždavinių pilna visame mūsų kasdieniniame gyvenime: sodindami svečius už stalo, spręsdami kryžiažodžius, lošdami kortomis, sudarydami kokius nors tvarkaraščius, atidarydami seifą su renkama spyna, rinkdami telefono numerį, sprendžiame kombinatorinius uždavinius. Kišdami raktą į spynos kiaurymę, mechaniniu įtaisu (raktu) sprendžiame kombinatorinį uždavinį, kaip rasti tą mažų dantelių ilgių santykį, kuriam esant, spynos ritinys pradės suktis.

---

* А. Конан-Дойль. Голубой карбункул. Собр. соч. в 8 т., 1966. Т. I, p. 402.

Skaičių kombinatoriniai uždaviniai seni, kaip ir patys skaičiai. Dar X amžiuje prieš mūsų erą kiniečių matematikai nagrinėjo skaitmenų kombinacijas ir kėlinius. Senovės kiniečių magiškasis Lo Šu kvadratas yra vienas elementarių kombinacijų sudarymo uždavinių. 3×3 kvadrate reikia taip išdėstyti devynis skaitmenis, kad trijų skaičių sumos bet kurioje horizontalioje, vertikalioje arba įstrižoje eilėje būtų tarp savęs lygios. Lo Šu kvadratas (157 pav.) yra vienintelis šio uždavinio sprendinys, neskaitant sprendinių, gaunamų, jį pasukant ir atspindint.

XIII amžiuje ispanų teologas Ramonas Lulijus kombinatoriką pavertė savotišku kultu. Lulijus buvo įsitikinęs, kad kiekviena pažinimo sritis turi keletą pagrindinių principų; tyrinėtojas, nagrinėdamas visas galimas jų kombinacijas, gali atrasti naujas tiesas. Siekdamas palengvinti sau darbą, Lulijus iš koncentrinių diskų, sumautų ant vienos bendros ašies, pagamino prietaisą (158 pav.). Palei kiekvieno disko apskritimą jis surašė raides, simbolizuojančias pagrindines jo tiriamo daikto savybes. Sukant diskus, buvo galima gauti visas šių savybių kombinacijas. Lulijaus metodo liekanų ir lig šiol galima pastebėti kai kuriuose įrenginiuose, sugebančiuose imituoti vieną ar kitą „kūrybinio mąstymo" pusę.

Ligi pat praėjusio amžiaus kombinatoriniai uždaviniai, kaip ir magiškieji kvadratai, buvo suvokiami arba kaip kažkas mistiška, arba kaip matematinis žaidimas, neturintis jokios rimtesnės reikšmės. Kombinatoriniai uždaviniai ir ligi šiol yra įvairios rūšies galvosūkių, kai kada gana trivialių, šaltinis. Išnagrinėkime, pavyzdžiui, tokį uždavinį. Dėžėje sudėtos puskojinės: dvi raudonos, dvi žalios ir dvi mėlynos. Kokį mažiausią puskojinių skaičių reikia ištraukti (užsimerkus) iš dėžės, kad tarp jų tikrai būtų dvi tos pačios spalvos puskojinės? Pasitaiko ir vidutinio sunkumo kombinatorinių uždavinių. Pavyzdžiui, keliais skirtingais būdais galima iškeisti dolerį, jeigu turite neribotą skaičių pusės dolerio, ketvirčio dolerio, dešimties centų, penkių centų ir vieno cento vertės monetų?

A	4	9	2
B	3	5	7
C	8	1	6

157 pav. Senovės kiniečių magiškasis Lo Šu kvadratas

Pagaliau yra tokių sudėtingų kombinatorinių uždavinių, kad iki šiol niekas nežino, kaip juos spręsti. Pamėginkite, pavyzdžiui, nustatyti, keliais skirtingais būdais galima sudėti juostelę iš *n* pašto ženklų? Laikoma, kad nei vienoje, nei kitoje ženklo pusėje niekas nepavaizduota. Du būdai nelaikomi skirtingais, jeigu juostelę, sudėtą vienu būdu, galima taip erdvėje pasukti, kad ji sutaptų su juostele, sudėta kitu būdu. Juostelę iš dviejų ženklų galima sudėti iš viso tik vienu būdu, iš trijų — dviem būdais, iš keturių ženklų — penkiais būdais (159 pav.). Keliais skirtingais būdais galima sudėti juostelę iš penkių ženklų?

Mūsų amžiaus pradžioje kombinatorinė analizė buvo pripažinta savarankiška matematinė disciplina, ir tik šeštajame dešimtmetyje jos metodai netikėtai buvo pradėti plačiai taikyti ir išgarsėjo.

Tokį nelauktą susidomėjimą nulėmė gilios priežastys. Šiuolaikinėje matematikoje labai svarbus vaidmuo skiriamas jos loginio pagrindimo klausimams, o didesnė formaliosios logikos dalis yra iš esmės kombinatorinio pobūdžio. Be to, dabartiniame moksle svarbią vietą užima tikimybių teorijos, kurios uždaviniams savo ruožtu reikia išankstinių kombinatorinių tyrimų, metodai. Visose mokslo srityse vietoj tolydumo aptinkamas diskretiškumas: molekulės, atomai, elementariosios dalelės, kvantiniai skaičiai, charakterizuoja krūvį, sukinį, lyginumą, — supančios aplinkos diskretinės struktūros pavyzdžiai. Gerai žinomas Paulio principas, pagal kurį pagaliau pavyko išaiškinti periodinės elementų sistemos struktūrą, buvo kombinatorinio mąstymo rezultatas.

Revoliuciją biologijoje sukėlė sensacingas atradimas: paaiškėjo, kad genetinę informaciją nukleininės rūgšties molekulės perduoda kodu, sudarytu iš keturių raidžių. Kiekvieną pranešimą sudaro tik trys raidės, atrinktos tais pačiais būdais, kuriuos jau daugiau kaip šimtmetis nagrinėja įdomioji matematika. Kombinatorinių uždavinių miriadai iškyla informacijos teorijoje su jos bitais ir „žodžiais“, parašytais abstrakčiose abėcėlėse, skaičiavimo mašinų, dirbančių principu „taip-ne“, teorijoje. Tuo pačiu metu išrastomis skaičiavimo mašinomis buvo galima išspręsti nemaža kombinatorinių uždavinių, kuriuos paprastai spręsti buvo per daug sudėtinga. Šie laimėjimai sužadino susidomėjimą kombinatorine matematika.

Du pagrindiniai kombinatorikos uždavinių tipai yra „egzistavimo" ir „išvardijimo" uždaviniai. Egzistavimo uždavinio sprendimu reikia tiesiog atsakyti, ar yra tam tikra nustatyta elementų aibė, ar ne. Atsakymą galima gauti, sudarant arba patvirtinantį, arba prieštaraujantį pavyzdį, arba įrodant, kad gali ar negali egzistuoti mus dominanti aibė. Jeigu ši aibė egzistuoja, atsiranda įvairių išvardijimo uždavinių. Kiek gali būti skirtingų tam tikro tipo aibių? Kaip jas geriausia klasifikuoti? Kurios jų paklūsta įvairioms maksimumo ir minimumo tipo sąlygoms? ir t. t.

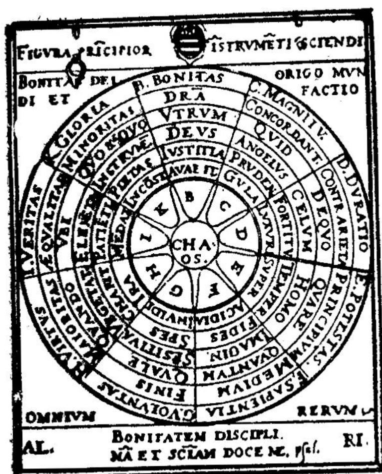
Abu uždavinių tipus pailiustruosime tokiu paprastu pavyzdžiu. Ar galima sveikuosius teigiamus skaičius nuo 1 iki *n* taip išdėstyti *n* lizdeliuose, esančiuose ant šešiakampio kraštinių, kad kiekvienos eilės visų skaitmenų sumos būtų tarp savęs lygios? Trumpiau sakant, ar galimas magiškas šešiakampis?

160 paveiksle parodytas visų paprasčiausias būdas, kaip išdėstyti šiam uždaviniui skaičius. Ar galima paveikslėlyje pavaizduotuose septyniuose lizdeliuose taip išdėstyti skaičius nuo 1 iki 7, kad skaitmenų suma kiekvienoje iš devynių eilių (trijose horizontaliose ir šešiose įstrižose) būtų ta pati?

Ši suma vadinama magiškąja konstanta, ir ją nustatyti labai lengva. Reikia sudėti visus skaičius nuo 1 iki 7, paskui rezultatą padalyti iš 3 — eilių, lygiagrečių bet kuriai galimų krypčių, skaičiaus. Skaičių nuo 1 iki 7 suma lygi 28 ir iš 3 be liekanos nesidalija. Kadangi magiškoji konstanta turi būti sveikas skaičius, įrodėme, kad magiškojo „antrosios eilės" (eilė lygi lizdelių, esančių prie šešiakampio kraštinės, skaičius) šešiakampio nėra.

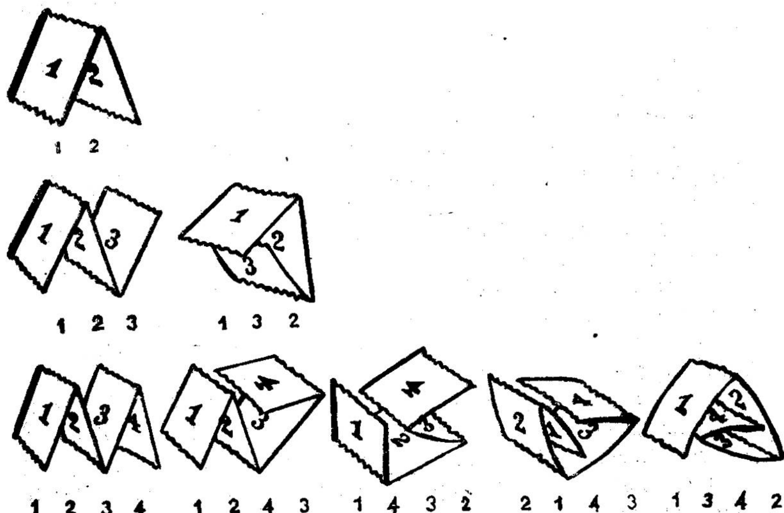
Įrodyti galima dar paprasčiau. Išnagrinėsim kampinį lizdelį *A*. Jis priklauso dviem eilutėms: *AB* ir *CA*. Jeigu šiose eilutėse skaičių sumos būtų lygios, lizdeliuose *B* ir *C* turėtų būti vienodi skaičiai, o tai prieštarauja uždavinio sąlygai.

Pereisime prie sekančio pavyzdžio — trečiosios eilės šešiakampio, kurį sudaro 19 lizdelių. Sudėję skaičius nuo 1 iki 19, gausime 190, t. y. skaičių, kuris be liekanos dalijasi iš 5 (eilių, lygiagrečių bet kuriai galimai krypčiai, skaičius). Vadinasi, magiškoji konstanta lygi 38. Ankstesnio įrodymo čia negalima pritaikyti, bet tai, aišku, dar





158 pav. Dvi Ramono Lulijaus ruletės



159 pav. Kaip iš dviejų, trijų ir keturių ženklų sudėti juostelę

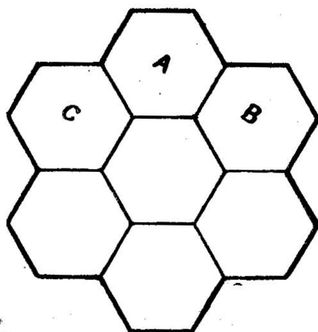
neleidžia teigti, kad magiškasis trečiosios eilės šešiakampis galimas.

1910 metais Klifordas U. Adamsas ėmėsi ieškoti magiškojo trečiosios eilės šešiakampio. Jis paėmė rinkinį šešiakampių keramikinių plytelių, ant jų užrašė skaičius nuo 1 iki 19 ir pradėjo iš jų sudarinėti įvairius šešiakampius. Šiam užsiėmimui jis pašventė visą savo keturiasdešimt septynerių metų laisvalaikį, kol pagaliau 1957 metais, sveikdamas po operacijos, rado sprendimą (161 pav.). Adamsas jį perpiešė ant popieriaus lapo, bet lapas kažkur pasimetė, ir po to penkerius metus jis veltui mėgino dar kartą atkurti sprendimą. 1962 metų gruodžio mėnesį Adamsas surado pamestą lapelį ir 1963 metų pradžioje savo sprendimą atsiuntė man. Skaičių suma kiekvienoje iš penkiolikos eilių (penkios vertikalios ir dešimt įstrižų) lygi 38. Siekiant atskleisti figūros abipusę simetriją, grupėse, sudarytose iš dviejų ir iš trijų lizdelių, iš eilės einantys skaičiai sujungti linijomis.

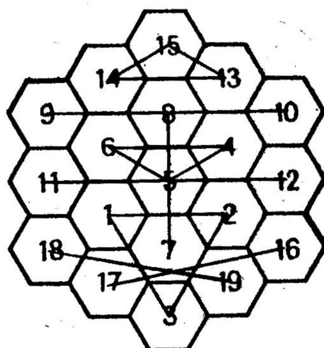
Adamso sprendimas man nepadarė didelio įspūdžio. Tuo metu aš maniau, kad apie magiškuosius šešiakampius tikrai yra daug literatūros, o Adamsas tiesiog rado vieną iš šimtų galimų uždavinio apie trečiosios eilės šešiakampį sprendimu. Tačiau, didelei mano nuostabai, aš neaptikau literatūroje net užsimenant apie magiškuosius šešiakampius. Žinojau, kad yra 880 įvairių magiškų ketvirtosios eilės kvadratų ir kad pilnas magiškų penktosios eilės kvadratų sąrašas nesudarytas todėl, kad jų gali būti keletas milijonų. Kaip nekeista, jokių nuorodų apie magiškųjų šešiakampių egzistavimą literatūroje nepavyko aptikti.

Adamso sprendimą nusiunčiau matematikui Čarlzui Trigui, pripažintam tokio tipo kombinatorinių uždavinių specialistui. Iš jo gautas atvirukas patvirtino, kad Adamso sprendimas iki šiol buvo nežinomas. O dar po mėnesio Trigas mane nustebino, atsiuntęs tikslų įrodymą, kad daugiau nė vieno magiškojo bet kokio dydžio šešiakampio nėra. Tarp daugybės būdų, kaip paskirstyti sveikuosius skaičius nuo 1 iki n šešiakampės figūros lizdeliuose, *tik vienas būdas* — Adamso — nurodo magiškąjį šešiakampį!

Įrodydamas, kad negali egzistuoti magiškieji šešiakampiai aukštesnės, negu trečioji, eilės, Trigas pritaikė skaičių teorijoje žinomus diofantinių lygčių sprendimo metodus. Iš pradžių jis išvedė formulę, siejančią magiškąją



160 pav. Kodėl nėra magiškojo antrosios eilės šešiakampio?



161 pav. Vienintelis magiškasis šešiakampis

konstantą k su šešiakampio eile n:

$$k = \frac{9(n^4 - 2n^3 + 2n^2 - n) + 2}{2(2n-1)}.$$

Po to gana sudėtingai parodė, kad šis reiškinys įgyja sveikas reikšmes tik tada, kai $n=1$ arba $n=3$. Magiškasis šešiakampis iš vieno langelio — trivialus. Vieną trečiosios eilės šešiakampį atrado Adamsas. Kilo klausimas, ar galimos kitos devyniolikos sveikųjų skaičių kombinacijos (neskaitant tų, kurios gaunamos iš Adamso sprendimo pasukant ir atspindint), kurios taip pat sudarytų magiškąjį šešiakampį. Trigas parodė, kad atsakymas į šį klausimą neigiamas. Jis uždavinį sprendė „kaktomuša“ (krūvą popieriaus išbraižęs įvairiomis skaičių išdėstymo schemomis po šešias schemas kiekviename lape), „grubią jėgą“ derindamas su subtiliais samprotavimais, įgalinančiais žymiai sumažinti galimų variantų skaičių. Kai kuriems skaitytojams nuostabų Adamso rezultatą pavyko patikrinti elektroninėmis skaičiavimo mašinomis. Vienas skaitytojas man pranešė, kad Adamso šešiakampį dar atrado Tomas Vikersas, nežinodamas, kad tas šešiakampis vienintelis, ir jį išspausdino be jokių komentarų. *

Aš galiu jums pasiūlyti, kaip paprastai pamėginti perstatyti devyniolika skaičių Adamso sprendinyje, kad išeitų šešiakampis, taip pat magiškasis, bet šiek tiek kitokia prasme: skaičių suma kiekvienoje eilėje, sudarytoje iš trijų lizdelių, būtų lygi 22, keturių lizdelių eilės suma būtų lygi 42 ir pagaliau penkių lizdelių eilės suma būtų lygi 62.

* *The Mathematical Gazette*, December 1958, p. 291.

Tokie magiškieji šešiakampiai jau buvo tyrinėjami, ir jų žinoma labai daug. (Išdėstytą uždavinį lengva spręsti, radus teisingą požiūrį. Galiu duoti vieną orientuojantį patarimą: norint tinkamai išdėstyti skaičius, visiems Adamso šešiakampio skaičiams reikia taikyti vienodo pobūdžio paprastą pertvarkymą.)

Kiekvieną kartą, kai sveikieji skaičiai išsidėsto kokia nors gražia vienintele galima schema, pasirodo, kad ji turi aibę netikėčiausių savybių. Net Lo Šu kvadratas pilnas netikėtumų. Šeštajame mūsų amžiaus dešimtmetyje Leo Mozeris aptiko nuostabų paradoksą, kuris gaunamas, nagrinėjant Lo Šu kvadratą kaip devynių šachmatininkų reliatyvaus meistriškumo (šachmatininkai sako „pajėgumo") lentelę (157 pav.). Sakykim, eilė *A* atstovauja komandai iš trijų žaidėjų, kurių pajėgumas vertinamas 4, 9 ir 2 balais. Eilės *B* ir *C* priklauso dviejų kitų komandų žaidėjams, kurių pajėgumas vertinamas balais, esančiais atitinkamuose langeliuose. Jeigu tarp komandų *A* ir *B* vyksta rato sistemos turnyras, kuriame kiekvienas vienos komandos narys žaidžia su kiekvienu antros komandos nariu, penkis kartus nugalės komanda *B* ir keturis kartus — komanda *A*. Aišku, kad komanda *B* stipresnė už komandą *A*. Jeigu varžosi komandos *B* ir *C*, pastaroji laimi penkis kartus, o keturiose partijose patiria pralaimėjimą, t. y. komanda *C*, be abejo, stipresnė už komandą *B*. Kas įvyks, jeigu stipriausia iš trijų komandų — komanda *C* — pradės turnyrą su silpniausia komanda *A*? Šį uždavinį išspręskite patys. Tik pasakysiu, kad komanda *A* laimi santykiu 5:4! Kyla klausimas: kuri komanda iš tikrųjų stipriausia? Jeigu turnyro tikslas yra išaiškinti komandų dalyvių jėgų santykį, šis paradoksas parodo visus rato sistemos žaidimo trūkumus. Iš daugelio paradoksų, kuriuos studijavo Mozeris, išdėstytas paradoksas yra vienas paprasčiausių. Paradoksas išlieka ir tuo atveju, kai kiekvieną komandą atitinka ne Lo Šu kvadrato eilutė, o stulpelis.

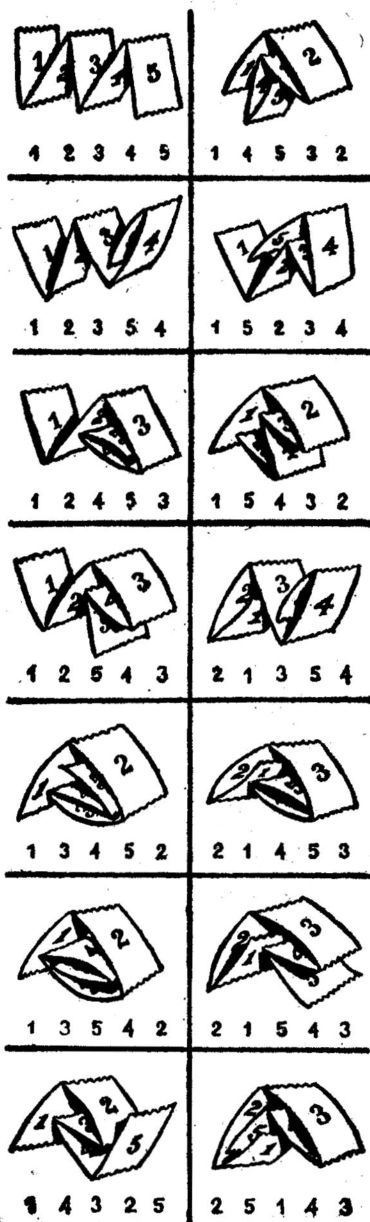
Elementų išdėstymo kvadrato arba stačiakampio lizdeliuose būdai labai glaudžiai susiję su šiuolaikiniais kombinatoriniais uždaviniais, kurių daugelis plačiai taikomi, planuojant eksperimentus. Vadinamuose lotyniškuose kvadratuose elementai išdėstyti taip, kad kiekviename stulpelyje ir kiekvienoje eilutėje kiekvienas elementas pasitaiko tik vieną kartą. Dėl to galiu pasiūlyti vieną gražų

kombinatorinį uždavinį, kuris nesudėtingas ir turi vieną įdomią, kartais nepastebimą, staigmeną.

Tarkime, kad turite be galo daug vieno, dviejų, trijų, keturių ir penkių centų vertės ženklų (turima galvoje, kad jūs turite be galo daug kiekvienos vertės ženklų). Jūs norite taip išdėstyti kvadrato 4×4 pavidalū šešiolika ženklų, kad nei viename stulpelyje, nei vienoje eilutėje ir nei vienoje įstrižainėje (tame skaičiuje ir dviejose pagrindinėse įstrižainėse) nebūtų dviejų vienos vertės ženklų. Kitaip sakant, jeigu pastatysite ant bet kurio ženklo šachmatų valdovę, joks jos ėjimas nesujungs dviejų tos pačios vertės ženklų. Uždavinys numato dar vieną, papildomą sąlygą: visų šešiolikos ženklų bendra vertė turi būti maksimaliai galima. Kokia ši vertė?

ATSAKYMAI

Uždavinys apie įvairiaspalves puskojines: iš keturių išimtų puskojinių dvi tikrai bus vienos spalvos.



162 pav. Uždavinio, kaip iš penkių ženklų sudėti juostelę, atsakymas

163 pav. Uždavinio apie 16 ženklų atsakymas

Uždavinys, kaip iškeisti vieną dolerį. Yra 292 skirtingi būdai, kaip iškeisti vieną dolerį. Visas šio uždavinio sprendimas pateikiamas D. Pojos knygoje „Kaip spręsti uždavinį".*

Uždavinys apie penkis ženklus: juostelę, sudarytą iš penkių ženklų, kurių abi pusės vienodos, galima sudėti keturiolika skirtingų būdų (162 pav.). (Gali atrodyti, kad jeigu viena ženklų pusė nuspalvinta, būdų skaičius turi padvigubėti, o iš tikrųjų jis padidėja iš viso tik iki dvidešimt penkių. Kodėl?) Sudėti juostelę iš šešių, septynių, aštuonių ir devynių ženklų galima atitinkamai 38, 120, 353 ir 1148 skirtingais būdais. Bendra formulė juostelei iš *n* ženklų kol kas nežinoma.

Skaitytojams buvo pasiūlytas dar vienas uždavinys, kuriame reikėjo pakeisti magiškąjį Adamso šešiakampį taip, kad bet kurioje trijų langelių eilėje skaičių suma būtų lygi 22, keturių langelių eilėje — 42 ir penkių langelių eilėje — 62. Dėl to kiekviename lizdelyje reikia parašyti skaičiaus 20 ir skaičiaus, esančio tame lizdelyje, skirtumą.

* Д. Пойа. Как решать задачу. М., Учпедгиз, 1959.

Uždavinyje apie vieno, dviejų, trijų, keturių ir penkių centų vertės šešiolikos ženklų išdėstymą kvadrate 4×4 (163 pav.) ieškomasis maksimumas lygus penkiasdešimčiai centų. Tai, matyt, dviem centais daugiau, negu galvoja daugelis skaitytojų. Paslaptis ta, kad tarp panaudotų ženklų keturių centų vertės ženklai turi būti tik trys. „Gali būti, kad skaitytojas, pamatęs sprendimą, prisipažins nugalėtu", — rašė Henris Djudenis, pirmą kartą spausdindamas šį galvosūkį.

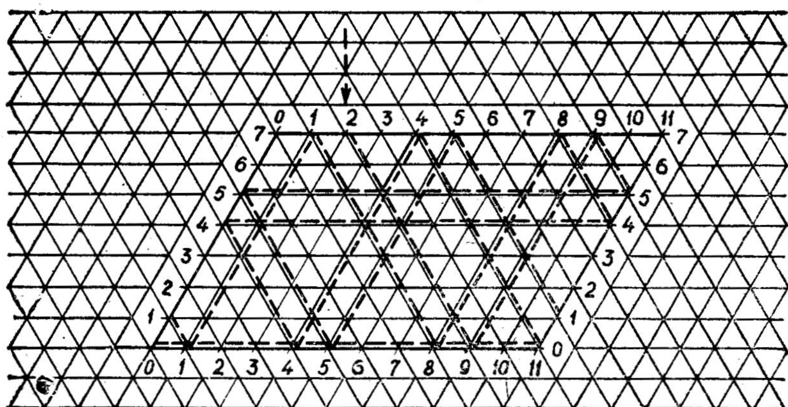
XXIX skyrius

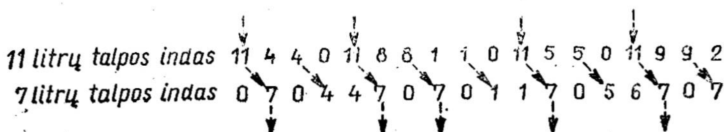
Uždavinį sprendžia... biliardo rutulys

Visais laikais visose tautose kamuolys buvo daugelio žaidimų tiek atvirame ore, tiek patalpose priemonė. Žaidimų kamuoliu įvairovė iš tiesų, beribė: tai ir vaikų žaidimas su apvaliu guminiu kamuoliuku, atšokančiu nuo žemės, ir tokie rimti sportiniai žaidimai, kaip tenisas, rankinis ir biliardas, kur žaidėjo meistriškumas labai priklauso nuo jo sugebėjimo apskaičiuoti kamuolio kritimo ir atsimušimo kampą.

Žinoma, jog matematikai ir fizikai su didžiausiu malonumu žaidžia biliardą. Nesunku suprasti priežastį: galima labai tiksliai apskaičiuoti rutulio, atšokusio nuo biliardo stalo bortų, trajektoriją. Luisas Kerolis, dėstęs matematiką Oksforde, taip pat mėgo žaisti biliardą, be to, labiausiai jam patiko žaisti prie apvalaus, jo paties užsakymu pagaminto stalo. Kolekcionieriai labai vertina 1890 metais Kerolio išleistas ir nuo to laiko daugiau nė karto spaudoje nepasirodžiusias to žaidimo taisykles, kurios buvo paskelbtos plonutėje (dviejų puslapių apimties) brošiūroje.

Šimtų įdomiausių uždavinių sąlygose figūruoja standus rutulys, esantis įvairiausių figūrų viduje ir daug kartų atšokantis nuo jų sienų. Išnagrinėsime, pavyzdžiui, vieną labai seną galvosūkį. Sakykime, turime du 7 ir 11 litrų talpos indus ir didelę statinę, pilną vandens. Kaip minėtais dviem indais pasemti lygiai 2 litrus vandens? (Bet





164 pav. Kaip, pilant 18 kartų, 7 ir 11 litrų talpos indais pripilti 2 litrus skysčio

kokios gudrybės draudžiamos, t. y. indų negalima pažymėti, jų negalima pakreipti, bandant atseikėti litro dalis ir t. t.)

Pateiktąjį uždavinį galima išspręsti ir algebriniu, ir bandymų bei klaidų metodu. Bet kuo čia dėti atšokstantys rutuliai? Kaip nekeista, bet skysčių perpylimo galvosūkius galima labai lengvai išspręsti, brėžiant rutulio, atšokančio nuo romboidinio stalo bortų, trajektoriją! (Šiame metode, kurį pirmasis išdėstė M. K. K. Tvidis *, taikomas terminas, kurį topologai vadina „kryptingu grafu".) Tokių stalų sienas patogiausia piešti popieriuje, kuris subraižytas lygiakraščiais trikampiais. Nagrinėjamame uždavinyje stalo kraštinės turi būti 7 ir 11 vienetų ilgio (164 pav.). Horizontalėje žymimas vandens lygis 11 litrų inde bet kuriuo momentu, vertikalėje — vandens lygis 7 litrų inde.

* *The Mathematical Gazette,* July 1939.

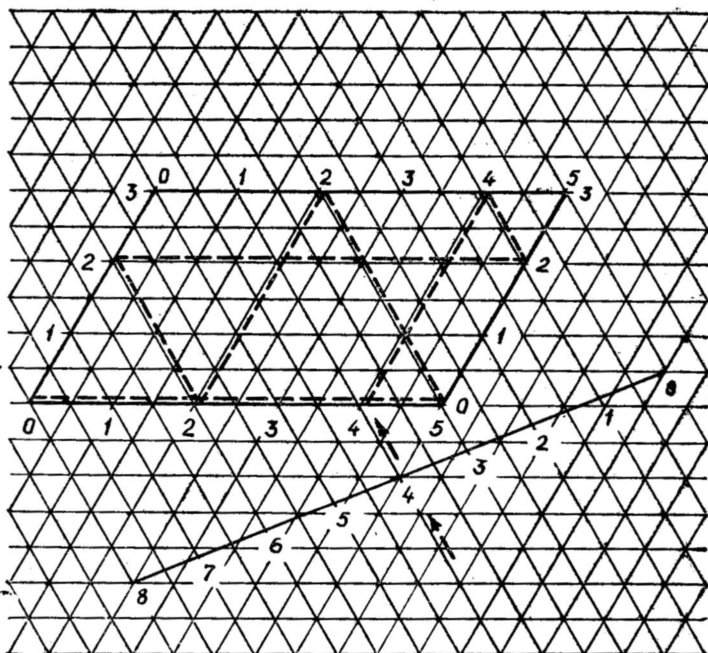
Kaip naudotis diagrama? Įsivaizduokite, kad rutulys yra kairėje apatinėje viršūnėje, taške O. Jis judės išilgai apatinio romboido pagrindo tol, kol pasieks dešinę šoninę kraštinę taške 11. Vadinasi, 11 litrų indas pripildytas iki kraštų, o 7 litrų — tuščias. Atšokęs nuo dešiniojo borto, rutulys riedės aukštyn į kairę ir atšoks nuo viršutinio borto taške, kurios horizontali koordinatė 4, o vertikali koordinatė— 7. Vadinasi, 11 litrų inde liko 4 litrai vandens, o 7 litrai iš jo perpilti į mažesnįjį indą.

Sekdami tolesnį rutulio kelią ir užsirašinėdami visus jo judėjimo etapus tol, kol jis pateks į viršutinio borto tašką 2, gausite atsakymą ir sužinosite, kokiu nuoseklumu reikia perpylinėti vandenį, norint gauti 2 litrus vandens. Visi 18 perpylimų schemiškai pavaizduoti 164 paveikslo diagramoje. Įstrižos rodyklės rodo, kad vanduo perpilamas iš vieno indo į kitą, vertikalios reiškia, kad vanduo arba visiškai išpilamas iš mažesniojo indo atgal į statinę, arba didesnįjį indą reikia prisemti pilną.

Ar šis sprendimas trumpiausias? Ne, yra antras kelias, kai vandens pirmiausia pasemiama 7 litrų indu. Diagramoje tai reiškia, jog rutulys iš taško 0 rieda aukštyn išilgai kairiojo borto, kol atsimuša į viršutinį bortą. Nupiešęs rutulio trajektoriją, skaitytojas įsitikina, jog taškas 2 šiuo atveju pasiekiamas po 13 (keturioliktuoju) atšokimų nuo bortų. Gautasis sprendimas (su 14 perpylimų) yra trumpiausias.

Nesunku suvokti, kad atšokančio rutulio metodą galima pritaikyti bet kokiam skysčių išpilstymo uždaviniui, kai pilstoma ne daugiau kaip trimis indais. Jis buvo sprendžiamas dar Nikolos Fontano, XVI amžiaus italų matematiko, vadinusio save Tartalija (tai reiškia mikčiumi) *, laikais. Aštuonių litrų indas iki kraštų prisemtas vandens. Naudojantis dviem 3 ir 5 litrų talpos indais reikia po lygiai vandens (iš tų aštuonių litrų) nupilti į du didesnius indus. Šio uždavinio sprendimo diagrama pavaizduota 165 paveiksle. Linija, lygiagreti pagrindinei romboido įstrižainei, vaizduoja 8 litrų indą.

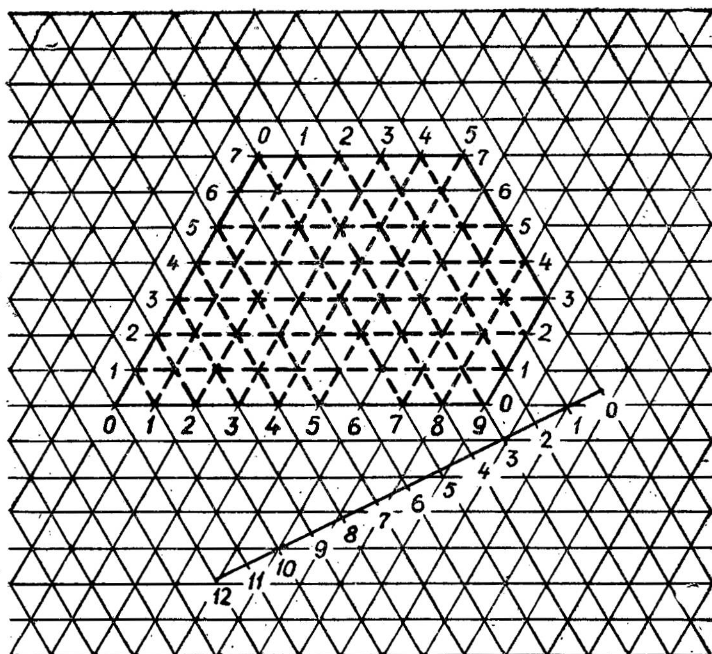
* Šioje vietoje Gardneris truputį neteisus. Tikroji Tartalijos pavardė nėra žinoma. Jis gimė 1500 metais Italijoje, Brekčijos mieste. 1512 metais, prancūzams užėmus miestą, Tartalijai buvo sužeista apatinė veido dalis, dėl to sutriko jo kalba; draugai jį praminė mikčium. — *Vert. į rusų k. past.*



165 pav. Grafinis Tartalijos uždavinio sprendimas

Kaip ir ankstesniame uždavinyje, rutulys pradeda judėti iš taško 0. Nubrėžti jo trajektoriją visai nesudėtinga. Ja remdamiesi, gausite sprendinį su mažiausiu (septynių) perpylimų skaičiumi.

Jeigu dviejų mažesnių indų tūriai neturi bendro daliklio, o trečiojo indo tūris didesnis arba lygus abiejų mažųjų tūrių sumai, tokiais trimis indais galima nupilti bet kokį sveiką litrų skaičių, pradedant vienu litru ir baigiant vidutiniojo indo tūriu. Turėdami, pavyzdžiui 15, 16 ir 31 litro indus, galite nupilti bet kokį kiekį vandens nuo 1 iki 16 litrų. Kai abiejų mažesniųjų indų tūriai turi bendrą daliklį, tokia procedūra neįmanoma. Diagramoje, kurioje pavaizduoti trys 4, 8 ir 10 litrų talpos indai, rutulys niekuomet nepataikys į tašką, kurio koordinatė nelyginis skaičius, o su 3, 9 ir 12 litrų talpos indais galėsite nupilti tik 3, 6 ir 9 litrus skysčio. (Abiem atvejais nupil-



166 pav. Kaip trimis 7, 9 ir 12 litrų indais nupilti bet kurį skysčio tūrį nuo 1 iki 12 litrų

to skysčio tūris būtinai turi būti bendro daliklio kartotinis.) Kai didesniojo indo tūris mažesnis už kitų dviejų indų tūrių sumą, atsiranda naujų apribojimų. Jeigu, pavyzdžiui, indų tūriai lygūs 7, 9 ir 12 litrų, romboidinėje diagramoje reikia nupjauti apatinį dešinįjį kampą (166 pav.). Tuomet rutulys gali patekti į bet kurį tašką nuo *1* iki *9*, išskyrus tašką *6*. Nors ir skaičiai 7 ir 9 neturi bendro daliklio, pasemti 6 litrus vandens pasirodo negalima dėl to, kad visų didžiausias indas yra per mažo tūrio.

Grafinis metodas taikomas ir tada, kai didesniojo indo tūris viršija kitų dviejų indų tūrių sumą. Pabandykite, remdamiesi diagrama, išspręsti vieną galvosūkį, kurį pasiūlė dar Tartalija ir šiek tiek Semas Loidas modifikavo. Šis uždavinys minimas jo „Galvosūkių enciklopedijoje“, tačiau uždavinio atsakymas joje nebuvo nurodytas. Tuo, matyt, ir galima paaiškinti, kodėl nuo Loido knygos

pasirodymo galvosūkis niekur daugiau nebuvo perspausdintas.

Kartą amerikiečių kareivių grupė gavo dešimties galonų statinaitę alaus. Kareiviai turėjo dar dvi tuščias 3 ir 5 galonų talpos gertuves. „Kareiviai, suprantama, apgulė statinaitę", — rašė Semas Loidas, o likusį alų atnešė į stovyklą, padalijię po lygiai trijuose induose: statinaitėje ir dviejose gertuvėse. Kiek alaus išgėrė kareiviai ir kaip jiems pavyko likusį alų padalyti į tris lygias dalis? Trumpiausias sprendimas, suprantama, yra ir pats geriausias. Kiekvieną kartą perpilant galima operuoti tik sveiku skaičiumi galonų (turimas galvoje ir išgertas alus); be to, laikoma, jog alaus nuostolių nėra.

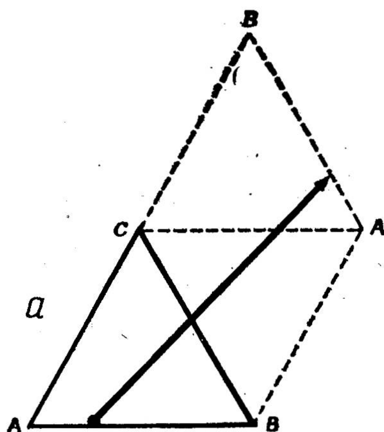
Įvairių galimybių, atsirandančių, naudojantis skirtingų tūrių indais, nagrinėjimas „biliardo rutulio" metodu ypatingai patrauklus, ir autorius tikisi, kad jis patiks skaitytojams. Tam, kas susidomės tuo metodu ir jo apibendrinimais keturių indų atveju, galima rekomenduoti du puikius O'Beirno * straipsnius, kuriuose uždavinys sprendžiamas, remiantis trimatėmis (tetraedrinėmis) diagramomis.

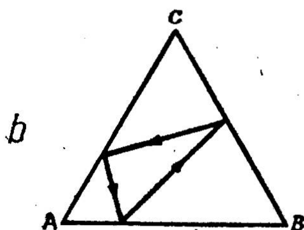
Galimas ir kitas uždavinių apie atsimušantį rutulį tipas. Juose reikalaujama rasti trajektoriją, kuria judės rutulys, esantis daugiakampio viduje ir be galo daug kartų atšokantis nuo jo kraštinių (kiekviename periode rutulys su kiekviena daugiakampio kraštine susiduria tik vieną kartą).

Tokiems uždaviniams spręsti tinka galingas veidrodinio atspindžio metodas. Pademonstruosime jį paprasčiausiu 167 paveiksle, *a,* lygiakraščio trikampio formos biliardo stalu. Sakykime, juodas taškas reiškia rutulio padėtį. Norime, kad rutulys, atsimušęs į kraštinę *BC,* atsimuštų į kraštinę *AC* ir grįžtų į pradinę padėtį. Nustatyti rutulio trajektoriją nesudėtinga. Atspindėkime trikampį du kartus: iš pradžių kraštinės *BC* atžvilgiu, paskui gautąjį trikampį naujos kraštinės *AC* atžvilgiu. Gautieji trikampiai 167 paveiksle pavaizduoti punktyru. Tiesė, jungianti tašką, kuriame rutulys buvo pradžioje, su tašku, kuriame jis atsirado po antrojo atspindžio, bus ieškomoji trajektorija. Belieka tik atspindėti punktyru nubrėžtus trikampius priešinga tvarka. Tam tikslui galima atlikti

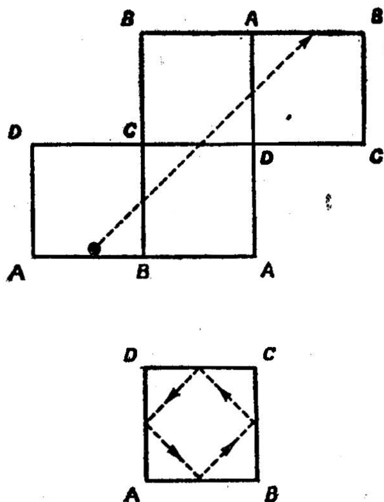
* *New Scientist,* 22 and 29 June, 1961.

brėžinį per kalkinį popierių ir sujungti visus tris taškus, kuriuose rutulys lietė trikampio kraštines. Iškirpę gautą figūrą, sulenkite ją taip, kad susidarytų vienas trikampis. Kiekvienas perlenkimas ekvivalentus veidrodiniam atspindžiui. Pažiūrėję prieš šviesą, pamatysite trajektoriją, pavaizduotą 167 paveiksle, *b*. Pritaikius dar vieną apribojimą ir pareikalavus, kad visos trys trajektorijos atkarpos būtų vienodo ilgio, lengva pastebėti, kad uždavinys turėtų vienintelį sprendinį: rutulio kelias eitų per visų trikampio kraštinių linijų vidurio taškus. Įdomu pažymėti, kad, taikant kitą sprendimo būdą, rutulys gali grįžti į pradinę padėtį, tačiau jo trajektorija nebus cikliška. O jeigu trajektorija sujungia trikampio kraštinių vidurius, ji cikliška: grįžęs į pradinį tašką, rutulys iš naujo pakartos visą savo maršrutą. Vienas skaitytojas susidomėjo, kokiais atvejais rutulys, atšokdamas nuo trikampio kraštinių po pirmo rato (t. y. po išėjimo iš taško x_1, esančio vienoje jo kraštinių, ir grįžimo į tą patį x), judės cikliška trajektorija. Jis įrodė, kad trajektorija bus cikliška tada ir tik tada, kai taškas x nutolęs nuo trikampio viršūnės per atstumą, išreikštą racionaliu skaičiumi (vienetu laikomas trikampio kraštinės ilgis; trikampio viršūnė, nuo kurios skaičiuojamas minėtas atstumas, yra toje pačioje kraštinėje, kaip ir taškas x). Lygiai taip pat randama rutulio trajektorija ir kitokiuose daugiakampiuose. 168 paveiksle pavaizduotas kvadratas, atspindėtas trijų





167 pav. Biliardo rutulio trajektorija lygiakraščiame trikampyje

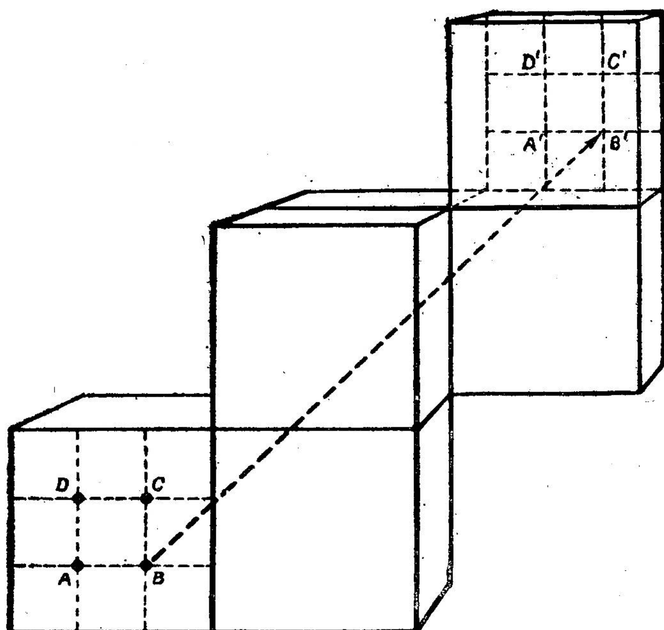


168 pav. Biliardo rutulio trajektorija kvadrate. Ji sudaryta iš keturių vienodo ilgio atkarpų

skirtingų kraštinių atžvilgiu. Punktyrine linija parodyta vienintelė cikliška trajektorija, sudaryta iš vienodo ilgio atkarpų.

Iš karto kyla du įdomūs klausimai. Ar galimos cikliškos trajektorijos, sudarytos iš lygių atkarpų, kube, kuris yra kvadrato erdvinis analogas, ir tetraedre, kuris yra lygiakraščio trikampio erdvinis analogas? Rutulys laikomas idealiai standžia besvore dalelyte, judančia tiesiai. Atšokdamas nuo sienų, rutulys paklūsta gerai žinomam dėsniui: kritimo kampas lygus atspindžio kampui (abu kampai yra plokštumoje, statmenoje atspindinčiai sienai). Vietoje rutulio galima nagrinėti šviesos spindulį, atspindintį nuo daugiasienio paviršiaus vidinių veidrodinių sienų. Per vieną ciklą rutulys turi atšokti nuo kiekvienos sienos tik vieną kartą, o atstumai, nueiti tarp dviejų vienas po kito nuosekliai einančių atspindžių, turi būti lygūs. (Jeigu rutulys pataikė į daugiasienio viršūnę arba į briauną, tai nereiškia, jog jis lietėsi su visomis sienomis, einančiomis per tą viršūnę arba briauną. Priešingu atveju uždavinio apie rutulio trajektoriją kube sprendiniu būtų galima laikyti bet kurią įstrižainę, išilgai kurios rutulys judėtų iš vieno galo į kitą.)

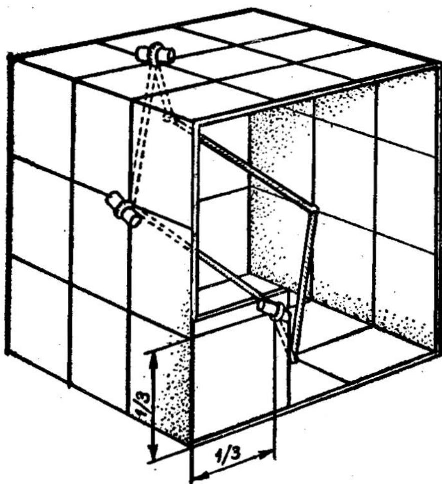
Uorenas Uiveris viename iš daugelio savo straipsnių apie Luisą Kerolį rašo, kad tarp nepaskelbtų Kerolio matematikos darbų rastas uždavinys apie rutulio judėjimą kube. Tai vienas iš tų uždavinių, kurie negalėjo neatkreipti apvalaus biliardo išradėjo dėmesio. Idėja apie biliardo lošimą, naudojantis kubiniu „stalu“, toli gražu nėra išlaužta iš piršto, kaip tai gali atrodyti iš pirmo žvilgsnio. Turint galvoje, kad, praėjus vos dviem dešimtmečiams, bus sukurtos gigantiškos kosminės stotys, nereikia būti



169 pav. Luiso Kerolio uždavinio apie biliardo rutulį, atsimušantį į kubo sienas, sprendimas

pranašu, skelbiant daugybę įvairių žaidimų ir pramogų, kurioms bus pritaikoma mūsų erdvės savybė būti trimate ir nesvarumas. „Trimatį“ biliardą galima puikiausiai žaisti stačiakampiame kambaryje, kurio visos sienos, grindys ir lubos atstos bortus, o viršūnės — lizdus. Iš rutulių, sunumeruotų nuo 1 iki 35, žaidimo pradžioje reikės sudėti ne trikampį, o tetraedrą. Suprantama, iškils ir savų sunkumų. Oro pasipriešinimas, pavyzdžiui, būtų gerokai mažesnis, negu trintis tarp rutulio ir biliardo stalo gelumbinio paviršiaus. Jeigu pradinis tetraedras būtų išardytas labai stipriu smūgiu, dėl staigios entropijos žaidėjui būtų nelengva laviruoti tarp rutulių, skraidančių apie jį visiškai atsitiktinėmis kryptimis, tarsi dujų, esančių šiluminės pusiausvyros būklėje, molekulės.

Bet grįžkime prie Kerolio uždavinio. Kubui galima pritaikyti tą patį metodą, kurį taikėme, spręsdami uždavinį su kvadratu. Penkis kartus atspindėję nuo kubo sienų,



170 pav. Modelis, vaizduojantis biliardo rutulio trajektoriją kube

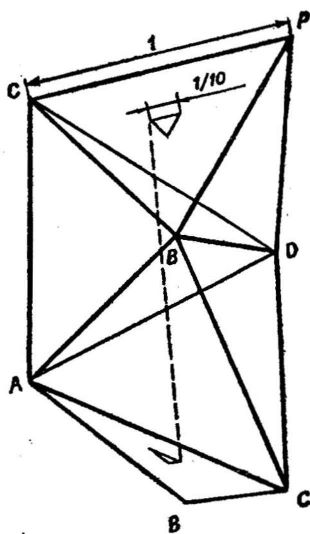
gausime ieškomą trajektoriją, pavaizduotą 169 paveiksle juoda punktyro linija. Tai bus viena iš keturių galimų visiškai vienodos formos trajektorijų, kurių kiekviena sudaro uždavinio sprendinį. (Jeigu kiekvieną kubo sieną padalysime į devynis kvadratinius langelius, tai, atsimušdamas į sieną, rutulys visada pataikys į vieną iš centrinio langelio viršūnių.) 170 paveiksle parodytas kartoninis modelis, kuriame įtemptas siūlas vaizdžiai parodo, kaip susiklosto trajektorija, sudaranti Luiso Kerolio uždavinio sprendinį. Visi penki kubai, gauti atspindžiais iš pradinio kubo, buvo nuosekliai „sukrauti" vienas į kitą. Siūlas reikiamoje padėtyje laikosi ant kilpų, kurios pro mažas skylutes perkištos per kubo sienas ir pritvirtintos mediniais kaištukais. Įsivaizduojant kubą, sudarytą iš dvidešimt septynių mažų vienetinių kubelių, nesunku suprasti, jog kiekviena trajektorijos atkarpa yra vieno tokio kubelio įstrižainė, t. y. kiekvienos atkarpos ilgis lygus $\frac{1}{\sqrt{3}}$, o visos trajektorijos ilgis sudaro $2\sqrt{3}$.

Kiek man žinoma, pirmasis šį sprendinį rado Rodžersas Heivardas, *Scientific American* žurnalo dailininkas *.

---

* Heivardo sprendinys paskelbtas 1962 metų birželio mėnesio *Scientific American* žurnalo numeryje.

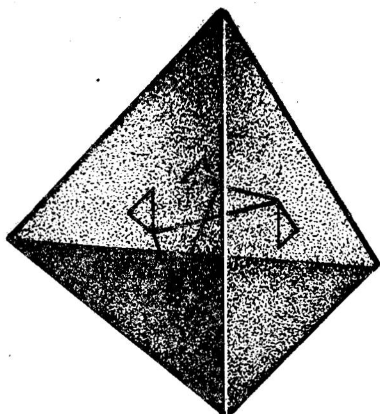
Jis rašo, kad jo rastoji trajektorija organinės chemijos specialistams žinoma kaip „kėdės formos šešiakampis". Ji dažnai randama anglies junginiuose, pavyzdžiui, cikloheksane, kur šeši anglies atomai vienvalenčiais ryšiais surišti į žiedą, o vandenilio atomai išsidėsto to žiedo išorėje. „Įdomu pastebėti,— rašo kitas skaitytojas,— kai standaus rutulio trajektorija kube, suprojektavus ją į bet kurią kubo sieną, sudaro 1×2 matmenų stačiakampį. Trajektorijos izometrinės projekcijos į tris plokštumas, lygiagretes trims įstrižainėms, yra rombai, o ketvirtoji izometrinė projekcija yra taisyklingas šešiakampis. Kaip būtų keista, bet sviedinys kažkodėl šokinėja būtent taip!"



171 pav. Uždavinio apie rutulį, atšokantį nuo vidinių tetraedro sienų, sprendimas

1962 metais tas pats Heivardas atrado ciklišką trajektoriją tetraedre. Atspindėję tetraedrą nuo trijų jo sienų (171 pav.), gausime ciklišką trajektoriją, kuri po vieną kartą liečia kiekvieną sieną. Ciklišką trajektoriją, sudarytą iš lygių atkarpų, rasti gana sunku. Viena tokia trajektorija 171 paveiksle pavaizduota punktyrine linija, o jos yra trys ir visos vienodos. Kiekviena jų liečia tetraedro sieną vienoje mažo lygiakraščio trikampio, esančio sienos centre, viršūnių. To mažo trikampio kraštinės lygios vienetinio (t. y. tetraedro, kurio briaunos ilgis lygus 1) tetraedro kraštinės dešimtadaliui, o kiekviena trajektorijos atkarpa yra $\sqrt{10}/10$ ilgio, tai lygu 0,31622777... Iš čia matome, kad visas tetraedro viduje rutulio nueitas kelias sudaro 1,2649...

172 paveiksle pavaizduotas puikus modelis, kurį Heivardas pagamino iš permatomos plėvelės. Neiloninis siūlas vaizduoja rutulio (arba šviesos spindulio) trajektoriją, kuri gaunama, visus keturis tetraedrus „sudėjus" vieną į kitą (172 pav.). Heivardas iškirpo iš plėvelės keturis lygiakraščius trikampius ir suklijavo jų kraštus, iš anksto



172 pav. Permatomas modelis, kuriame ryškiai matyti cikliška rutulio trajektorija tetraedruose

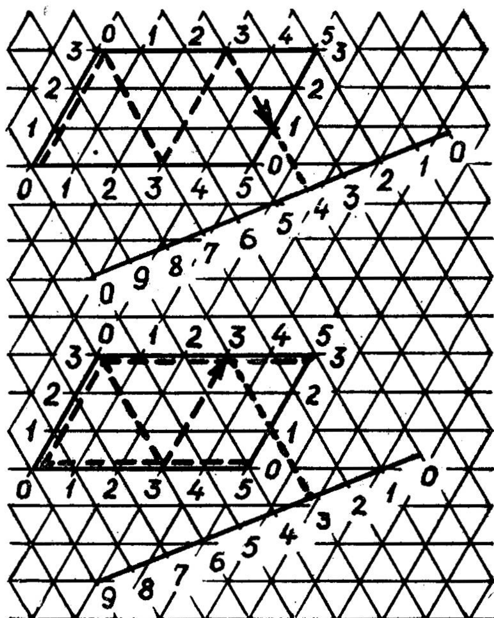
reikiamose vietose pradūręs nedideles skylutes. Prieš priklijuodamas paskutinį trikampį, jis sumezgė ant siūlo nedideles kilputes, prakišo jas pro skylutes trijose kitose sienose ir laikinai pritvirtino iš viršaus lipnios juostelės gabaliukais. Du laisvus galus Heivardas prakišo pro paskutinę, ketvirtos sienos skylutę, ir paskui priklijavo ją prie trijų kitų sienų. Įtempęs siūlą taip, kad jis niekur modelio viduje nebūtų nutįsęs, Heivardas visas keturias skylutes užliejo klijais *, o paskui kai klijai išdžiūvo, rūpestingai nupjaustė visus išlindusius siūlo galiukus.

Lygiai taip pat gaminamas ir kubo modelis. Naudojant kelių skirtingų spalvų siūlus, galima abiejuose modeliuose sudaryti visas galimas rutulio trajektorijas.

ATSAKYMAI

Turime dešimties galonų statinaitę, pripildytą alaus, ir dvi tuščias 3 ir 5 galonų talpos gertuves. Kaip mažiausiu skaičiumi operacijų, iš pradžių nugėrus kažkiek alaus iš statinaitės, likusį alų išpilstyti po lygiai į visus tris indus? Kadangi turimais indais galime nupilti tik sveikais skaičiais išreiškiamą tūrį, likusio alaus tūris turi dalytis iš trijų, t. y. jis gali būti lygus trims, šešiems arba devyniems litrams. Pirmieji du skaičiai netinka, nes, padaliję juos iš trijų, gausime dydžius, mažesnius už bet kurio indo tūrį. (Po kiekvienos operacijos bent vienas indas turi likti tuščias arba būti pripildytas iki kraštų. Ši sąlyga nebūtų patenkinta, jeigu kiekviename inde skysčio būtų mažiau,

* Modelio gamybai naudojant fotojuostelę, klijuoti galima tos pačios juostelės gabaliukais, išmirkytais acetone



10 galonų talpos statinaitė	10	7	7	4	4
5 galonų talpos gertuvė	0	0	3	3	5
3 galonų talpos gertuvė	0	3	0	3	1

(išgeriama)

10 galonų talpos statinaitė	4	1	6	6	3
5 galonų talpos gertuvė	5	5	0	3	3
3 galonų talpos gertuvė	0	3	3	0	3

(arba)

10 galonų talpos statinaitė	4	9	6	6	3
5 galonų talpos gertuvė	5	0	0	3	3
3 galonų talpos gertuvė	0	0	3	0	3

173 pav. Uždavinio apie alaus išpilstymą sprendimas

negu leidžia tūris.) Iš to matome, kad vieną galoną alaus reikia išgerti, o kitus devynis po lygiai išpilstyti į gertuves ir statinaitę.

Toliau spręsime, taikydami rutulio atšokimų metodą. Trumpiausias rutulio kelias remiasi į tašką *1*. (173 pav., viršutinė diagrama). Tai reiškia, jog 3 galonų talpos inde yra 1 galonas alaus. Kai šis galonas bus išgertas, 10 galonų statinaitėje liks 4 galonai, o 5 galonų gertuvėje — penki. Ši nauja situacija pavaizduota 173 paveiksle, apatinėje diagramoje. Mažiausioje gertuvėje alaus visai nėra. Dabar rutulys turi pataikyti į tašką, kuris reiškia, jog kiekviename inde yra po 3 galonus alaus. Trumpiausias jo kelias pavaizduotas stora linija, be to, dvi galimos trajektorijos nesutampa trijose vietose; ten jos skiriasi. Jeigu vieno galono išgėrimą laikytume vienu iš perpylimų, sprendinį sudarytų devyni perpylimai, atlikti tokia tvarka, kaip parodyta 173 paveikslo apatinėje dalyje.

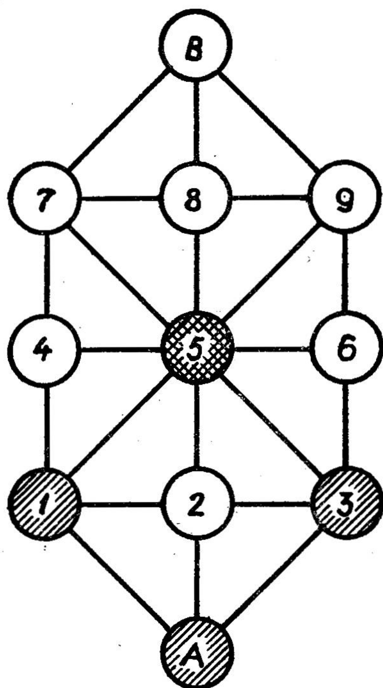
XXX skyrius

Matematiniai žaidimai specialiose lentose

Per pastarąjį dešimtmetį pastebimai pradėta domėtis matematiniais žaidimais, kurie žaidžiami specialiose lentose. Niekuomet dar tiek žmonių nežaidė nei tradiciniais šachmatais, nei nuolat pasirodančių naujų žaidimų. Daugėja matematikų, tyrinėjančių šių žaidimų strategiją, ir skaičius ESM, „mokančių" juos žaisti. Šiame skyriuje papasakosime apie tris puikius, bet mažai žinomus tokio tipo žaidimus. Du jų — nauji, o vienas — senas. Visų žaidimų taisyklės labai paprastos, lentas jiems nesudėtinga nupiešti ant popieriaus arba kartono; žaidimai tikrai patiks visiems nuo mažo iki didelio.

Karinis žaidimas (taip jis vadinamas Prancūzijoje) yra puikus žaidimo vienas prieš vieną pavyzdys; jame labai paprastos taisyklės derinamos su labai įmantria strategija. Eduardas Liuka savo garsios knygos „Matematinės pramogos" trečiame tome rašo, kad žaidimas

buvo populiarus prancūzų kariniuose sluoksniuose per visą 1870—1871 metų prancūzų-prūsų karą ir po jo. Deja, nuo to laiko šis žaidimas visai pamirštas: nė viename solidžiame žaidimų istorijos vadovėlyje apie jį net neužsimenama.



174 pav. Prancūzų karinis žaidimas

Šio žaidimo laukas pavaizduotas 174 paveiksle. Siekiant suprastinti taisyklių aiškinimą, skrituliukai sunumeruoti. Vienas žaidėjas (susitarsime jo ėjimus vadinti „baltųjų" ėjimais) turi tris kauliukus, kuriuos jis žaidimo pradžioje stato ant trijų šviesių skrituliukų: *A, 1* ir *3*. Antrasis žaidėjas („juodieji") turi iš viso vieną kauliuką, kuris prieš žaidimo pradžią užima 5 skrituliuką. (Vietoje kauliukų galima naudoti šachmatų pėstininkus arba tris penkiakapeikius ir vieną dvidešimties kapeikų monetą.) Žaidėjai daro ėjimus iš eilės; pradeda baltieji. Juodasis kauliukas gali pereiti ant bet kurio gretimo lizdelio. Baltasis kauliukas eina taip pat, bet jam draudžiama judėti atgal, t. y. jis gali pereiti ant bet kurio gretimo lizdelio, esančio kairėje, dešinėje arba priekyje nuo to skrituliuko, ant kurio jis yra. Kauliukai vienas kito „nenumuša". Baltieji laimi tuo atveju, jeigu jiems pavyksta uždaryti juodąjį kauliuką, t. y. įvaryti jį į skrituliuką, iš kurio šis negalės padaryti nė vieno ėjimo. Paprastai juodasis kauliukas tuo atveju papuola į skrituliuką *B,* bet kartais tokia pati situacija susidaro, juodiesiems užėmus *4* arba *6* skrituliuką. Visais kitais atvejais laimi juodieji. Juodieji, siekdami pergalės, turi visą laiką savo vienintelį kauliuką laikyti už varžovo kauliukų,

neduodami progos varžovui užeiti iš užnugario. Juodieji laimi ir tuo atveju, kai tie patys ėjimai pradeda kartotis be galo daug kartų.

Išmokti žaisti šį žaidimą ne sudėtingiau, negu žaisti kryžiukais ir nuliukais, bet jis žymiai azartiškesnis, ir jo analizė sudėtingesnė. Liuka sugebėjo parodyti, kad baltieji, racionaliai žaisdami, gali kiekvieną partiją laimėti, tačiau paprastos laimėjimo strategijos nėra ir žaidime visuomet gausu žabangų ir staigmenų. Geriausias iš pirmo žvilgsnio ėjimas neretai pasirodo esąs blogiausias. Jeigu juodieji pakankamai patyrę, jie lengvai laimi prieš mažiau įgudusį varžovą.

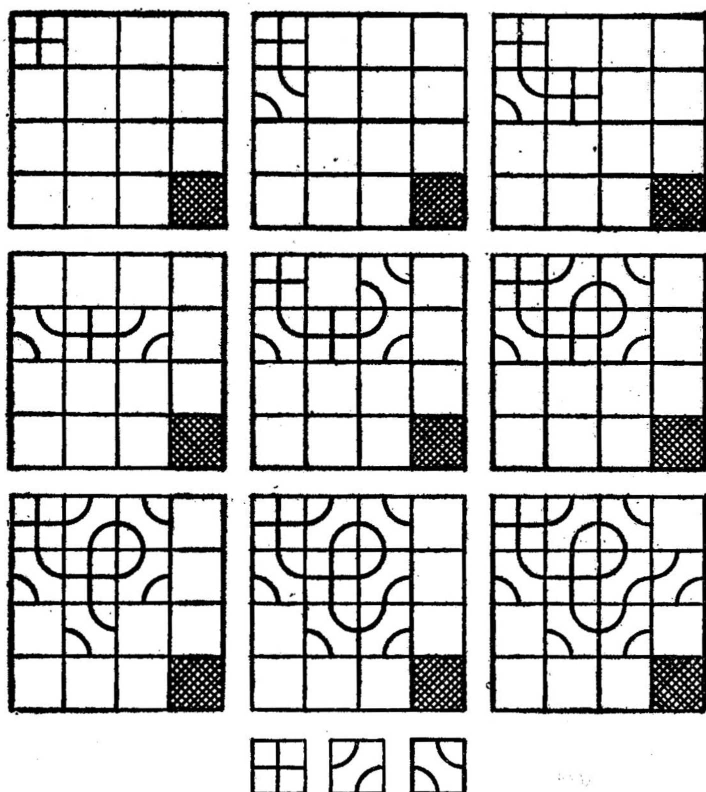
Sakykime, kad juodiesiems suteikiama dar didesnė laisvė: juodiesiems žaidimo pradžioje leisime savo kauliuką statyti į bet kurį skrituliuką. Kas šiuo atveju laimi, jeigu abi pusės žaidžia racionaliai?

Pastaruoju metu pasirodė topologiniai žaidimai, kuriuos žaisdami varžovai piešia kreives, vingiuojančias per visą lentą. Heksas, bridž-itas, Heilo žaidimas * — tai tik keli tokio pobūdžio žaidimai, pasirodę ant amerikiečių parduotuvių prekystalių per pastaruosius trisdešimt metų. 1960 metais Viljamas L. Blekas, būdamas Masačiuseto technologinio instituto studentu, ėmėsi tyrinėti heksą ir bridž-itą, dėl to atsirado naujas topologinis žaidimas, kurį išradėjo garbei draugai pavadino „bleku".

Šiam žaidimui, aišku, galima paruošti nupieštų kvadratėlių rinkinį, tačiau jam gali praversti ir languotas popierius. Lentos matmenys bet kokie; geriausia turbūt standartinė lenta 8×8, bet, aiškinant taisykles, patogiau imti 4×4 dydžio žaidimo lauką. Kai laukas bus paruoštas, vienas varžovas pradeda žaidimą: langelyje, esančiame kairiajame viršutiniame kampe (175 paveiksle), pastato kryžių. Antras žaidėjas turi šiam kryžiui pritaikyti tęsinį, nupiešęs bet kuriame gretimame langelyje vieną iš trijų figūrų, parodytų apatinėje 175 paveikslo dalyje. Kiekvieną jų sudaro dvi linijos. Viena linija jau ant lentos nupieštos figūros tęsinys, antroji sujungia tas kvadratėlio kraštines, kurios nesusikerta su pirmąja linija.

Žaidėjai daro ėjimus paeiliui. Kiekvienu ėjimu reikia pratęsti kreivę į vieną gretimų langelių, stengiantis, kad kreivė nesusikirstų su žaidimo lauko riba. Tas, kuris per-

* Žr. knygos «Математические головоломки и развлечения» 8 ir 22 skyrių.



175 pav. Topologinis žaidimas blekas

kirs ribą, patirs pralaimėjimą. Žaidėjas laimės tuo atveju, jeigu jam pavyks nubrėžti kreivę iki subrūkšniuoto langelio dešiniajame apatiniame kampe. 175 paveiksle parodyta tipinė žaidimo ant sumažintos lentos schema. Įvaręs varžovą į dešinįjį viršutinį kampą, pirmasis žaidėjas laimi, nes nepriklausomai nuo pasirinkto tęsinio kreivė turi susikirsti su lentos riba. (Įsidėmėkite, kad kreivės tęsinys yra tik viena kryžių sudarančių atkarpų, tačiau kituose ėjimuose antra atkarpa taip pat gali būti kreivės dalis.)

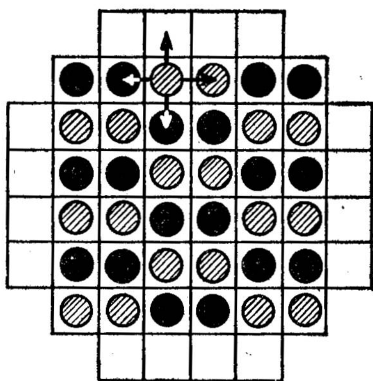
Bleko žaidimas itin įdomus dėl to, kad netrukus po jo pasirodymo Bleko bičiulis ir mokslo draugas Elvinas

R. Berlkempas surado strategiją, garantuojančią pergalę vienam žaidėjų. Ši strategija taikoma bet kokių matmenų su bet kokiu kraštinių santykiu stačiakampiams laukams. Sužinoję teisingą strategiją, jūs tuoj pat nustosite domėtis žaidimu, todėl aš neaiškinsiu, o šiek tiek palūkėsiu. Pamėginkite savarankiškai rasti puikų Berlkempo atradimą.

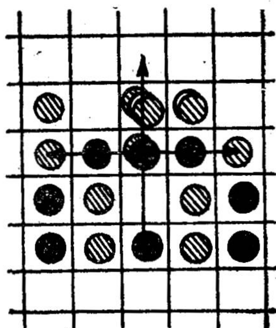
Inžinierius Sidnėjus Seksonas — ne tik didelis žaidimų specialiose lentose mėgėjas (jo kolekcijoje suskaičiuojama apie 500 žaidimų, o kartotekoje yra žinių dar apie šimtus kitų žaidimų), bet ir daugelio neįprastų žaidimų išradėjas. Vienas geriausių jo išradimų — fokuso žaidimas. Jį dabar ir aprašysime. Fokusui žaisti reikia trisdešimt šešių kauliukų: aštuoniolikos — vienos spalvos ir aštuoniolikos — kitos.

Iš pradžių visi kauliukai sustatomi ant 8×8 lentos, kurios kiekviename kampe išpjauta po tris langelius. Kauliukų (šiuo atveju juodų ir baltų) išdėstymas parodytas 176 paveiksle.

Pradėti žaidimą gali bet kuris varžovas. Vienu ėjimu kauliukų „stulpelis" (žaidimo pradžioje kiekviename stulpelyje iš viso yra vienas kauliukas) pasislenka per tiek langelių, kiek jame yra kauliukų. Eiti galima arba vertikaliai, arba horizontaliai; kauliukus perkelti įstrižai draudžiama. Rodyklės (176 pav.) nurodo keturis ėjimus, kuriuos gali padaryti baltasis kauliukas, pradėdamas žaidi-



176 pav. Žaidimas fokusas



177 pav. Ėjimai, žaidžiant fokusą

mą. Padaręs ėjimą vertikaliai aukštyn, jis atsidurs laisvame langelyje. Ėjimas dešinėn reiškia, kad kauliuką reikia padėti ant kito tos pačios spalvos kauliuko, o ėjimas kairėn arba vertikaliai žemyn kauliuką perkelia ant kitos spalvos kauliuko. Padarius tris paskutiniuosius ėjimus, ant lentos susidaro dviejų kauliukų stulpeliai. Toks stulpelis gali persikelti per du langelius bet kuria iš keturių krypčių. Stulpeliai, kuriuos sudaro trys, keturi arba penki kauliukai, persikelia atitinkamai per tris, keturis arba penkis langelius. Stulpelį perkelia tas žaidėjas, kurio kauliukas yra pačiame viršuje. Visiškai nesvarbu, ar langeliai, kuriuose stulpelis eidamas nesustoja, yra laisvi ar užimti. Kauliukų išsidėstymas šiuose langeliuose nė kiek nepasikeičia. Ėjimą galima užbaigti arba ant tuščio langelio, arba pastačius stulpelį ant kito stulpelio viršaus. 177 paveiksle pavaizduoti dviejų kauliukų stulpelio galimi ėjimai.

Negalima sudaryti stulpelių daugiau negu iš penkių kauliukų. Jeigu, atlikus kurį nors ėjimą, ant lentos atsiranda toks stulpelis, iš jo apačios tuojau pat išimami visi nereikalingi kauliukai. Jeigu kauliukai yra varžovo, jie imami į nelaisvę ir nuimami nuo lentos. Jeigu kauliukai yra žaidėjo, padariusio ėjimą, jie atidedami į šalį ir sudaro rezervą. Bet kuriuo momentu žaidėjas, turintis rezervą, gali paimti iš jo vieną kauliuką ir jį pastatyti ant bet kurio lentos laukelio, nesvarbu, užimtas jis ar laisvas. Be to, laikoma, kad rezervinis kauliukas padarė paprasčiausią ėjimą, t. y. jeigu jis padedamas stulpelio viršuje, kauliuko savininkui atitenka stulpelis. Rezervinio kauliuko įvedimas į žaidimą laikomas ėjimu: sekantis ėjimas priklauso varžovui.

Žaidėjas turi teisę eiti per mažesnį langelių skaičių, negu leidžiama kauliukų skaičiumi stulpelyje. Tuo atveju jis turi nuo stulpelio viršūnės nuimti tiek kauliukų, per kiek langelių nori persikelti. Visi kiti kauliukai lieka savo vietoje. Galima, pavyzdžiui, nuo stulpelio, kurį sudaro penki kauliukai, nuimti tris viršutinius kauliukus ir juos perkelti per tris langelius. Likęs dviejų kauliukų stulpelis priklauso viršutinio kauliuko šeimininkui.

Jeigu vienas žaidėjų negali daugiau padaryti nė vieno ėjimo (jis nebeturi nei stulpelio, nei rezervo), žaidimą laimi varžovas.

ATSAKYMAI

Kuris dalyvių laimės prancūzų karinį žaidimą, jeigu pradeda juodieji ir jiems leidžiama savo kauliuką pastatyti į bet kurį laisvą lizdelį? Į šį klausimą pirmasis atsakė olandų matematikas Frederikas Šu knygoje „Nepaprasti uždaviniai“ („Wonderlijke Problemen“), išleistoje Olandijoje 1943 metais. Racionaliai žaisdami, baltieji visuomet gali juoduosius įvilioti į spąstus. Mes negalime čia pateikti pilnos žaidimo analizės, bet žemiau parodyta, ką turi daryti baltieji, atsakydami į šešis įvairius pradinius juodųjų ėjimus:

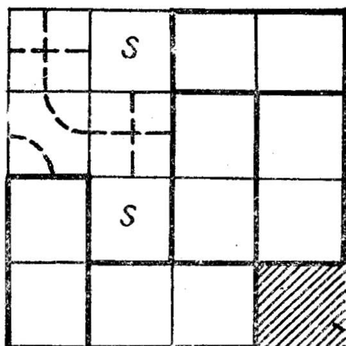
Juodieji	Baltieji
2	A35
4 (arba 6)	A15 (arba A35)
5	123
7 (arba 9)	A15 (arba A35)
8	A15
B	123

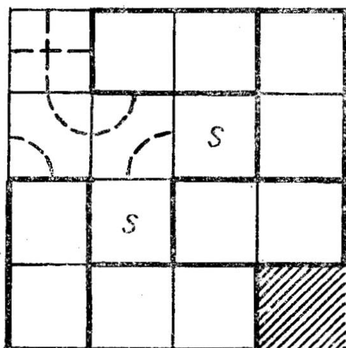
Topologinis žaidimas blekas, kuriam aš jus prašiau sugalvoti laimėjimo strategiją, baigiasi pirmojo žaidėjo pergale, kai bendras lentos langelių skaičius nelyginis, ir antrojo žaidėjo pergale, kai langelių skaičius lyginis.

Iš pradžių išnagrinėsime, kaip žaidžiama lentoje su nelyginiu langelių skaičiumi, pavyzdžiui, lentoje 5×5. Tuomet pirmojo žaidėjo strategijos esmė yra įsivaizduoti, kad visa lenta, išskyrus vieną langelį dešiniajame apatiniame kampe, padengta domino kauliukais (178 pav.). Iš tikrųjų jokių domino, aišku, nėra. Antrasis žaidėjas kiekvienu ėjimu pratęsia kelią nauju domino kauliuku, o pirmasis žaidėjas turi veikti taip, kad kelias liktų ant to paties kauliuko, ant kurio jis baigėsi prieš tai buvusiu ėjimu. Tuomet antrajam žaidėjui teks vėl žaisti nauju kauliuku. Aišku, kad galų gale jis arba bus priverstas perkirsti ribą, arba atsidurs ant ribos langelio, esančio dešiniajame apatiniame kampe.

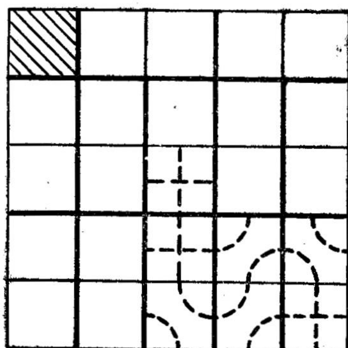
Pereisime prie lentų, turinčių lyginį langelių skaičių. Šiuo atveju antrojo žaidėjo laimėjimo strategija šiek tiek sudėtingesnė. Jis turi įsivaizduoti, kad domino kauliukais padengta visa lenta, išskyrus viršutinį kairįjį ir apatinį dešinįjį kampinį langelį.

Kadangi šie du langeliai yra vienos spalvos (tarkime, kad lenta nuspalvinta taip pat, kaip šachmatų), visų kitų langelių, aišku, negalima ištisai padengti domino kauliukais, nes du vienos spalvos langeliai visuomet liks atidengti. Elvinas R. Berlkempas, nuodugniai ištyręs bleko žaidimą, šiuos du langelius vadina „perskeltu domino" ir, atsižvelgdamas į tai, siūlo tokį sąmojingą manevrą.

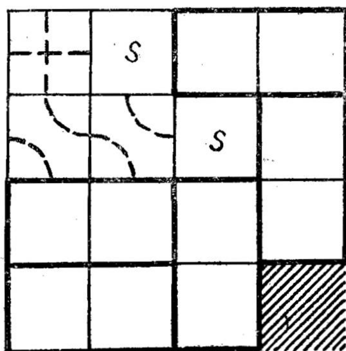




Pirmasis antrojo žaidėjo ėjimas pavaizduotas 179 paveikslo viršuje. Tuomet pirmasis žaidėjas priverstas eiti į antrą pagrindinės įstrižainės langelį. Tuomet trys atsirandančios galimybės parodytos 179 paveiksle. Visais trimis atvejais linija, nepriklausanti tolydžiai kreivei, jungia du vienos spalvos langelius. Tie du lange-



178 pav. Optimali strategija, žaidžiant bleko žaidimą 5×5 dydžio lentoje



179 pav. Optimali strategija, žaidžiant bleko žaidimą lentoje su lyginiu langelių skaičiumi

liai, 179 paveiksle pažymėti raidėmis S, laikomi „perskeltu domino“, o visus kitus langelius (išskyrus vieną kvadratėlį dešiniajame apatiniame kampe) dabar galima padengti paprastais domino kauliukais. Padengimo būdas, kaip ir anksčiau, gali būti bet koks. Lentoje su nelyginiu langelių skaičiumi taikydamas domino metodą, antrasis žaidėjas laimi.

XXXI skyrius

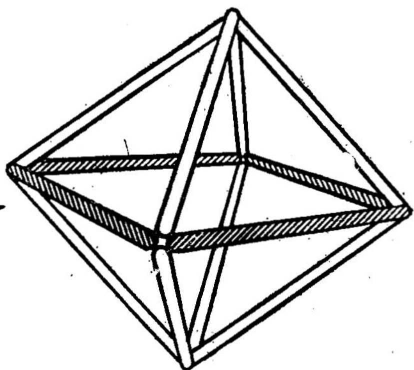
Dar aštuoni uždaviniai

Bet kuriam šio skyriaus uždaviniui išspręsti visai nereikia mokėti aukštąją matematiką.

1. Standus kvadratas. Rafaelis M. Robinsonas, Kalifornijos Berklio universiteto matematikas, išsprendęs vieną garsųjį aibių teorijos uždavinį — minimumo radimo uždavinį, išgarsėjo visame pasaulyje. 1924 metais Stefanas Banachas ir Alfredas Tarskis apstulbino kolegas, įrodę, kad standų rutulį galima supjaustyti į baigtinį skaičių tokių taškinių aibių, kurias perstačius (ir nepakeitus jų formos) bus gauti du standūs rutuliai, kurių kiekvienas tokių pat matmenų, kaip ir pradinis. Praėjus dvidešimčiai metų po šio atradimo, minimalus skaičius aibių, apie kurias kalbama „Banacho-Tarskio paradokse“, nebuvo žinomas, kol galų gale pasirodė grakštus Robinsono įrodymas. Minimalus aibių skaičius pasirodė esąs lygus penkiems. (Jeigu nekreiptume dėmesio tik į vieną tašką, esantį rutulio centre, minimalus aibių skaičius sumažėtų iki keturių!)

Skaitytojams siūlome išspręsti vieną neįprastą minimumo uždavinį, kuris ne toks sudėtingas, kaip anksčiau minėtas, ir priskirtinas greičiau įdomiajai matematikai. Šį uždavinį sugalvojo Robinsonas, ir minimumas jam iki šiol nerastas. Įsivaizduokite begalinę krūvą vienodo ilgio strypų, kuriuos galima sujungti vieną su kitu tik galais. Sudarę iš trijų strypų trikampį, gausime

standžią konstrukciją, o kvadratas, sudarytas iš keturių strypų, nebus standus: jį lengva perdirbti į kitas figūras, neištempiant, nelaužant ir neatskiriant strypų. Kad kvadrato nebūtų galima deformuoti, jį reikia kokiu nors būdu sutvirtinti. Tam tikslui paprasčiausia pritaisyti prie jo dar aštuonis strypus (180 pav.), gaunant taisyklingo oktaedro karkasą.



180 pav. Kaip sutvirtinti kvadratą trimatėje erdvėje

Tarkime, kad konstruojamą karkasą išimti iš plokštumos draudžiama. Ar galima šiuo atveju sukonstruoti absoliučiai standų kvadratą, panaudojant kelis papildomus strypus? Suprantama, nė vienas strypas neturi išeiti iš plokštumos, o sujungti juos vieną su kitu galima tik galais. Strypų negalima krauti vieno ant kito, negalima nei ištempti, nei laužyti. Pasirodo, jog standų kvadratą plokštumoje vis dėlto galima sudaryti. Klausimas tik tas, koks minimalus strypų skaičius tam reikalingas.

2. Neįprastas lošimas moneta. Studentas matematikas Bilis ir jo bičiulis — filologijos fakulteto absolventas Džonas, norėdami nuspręsti, kas turi mokėti už išgertą alų, paprastai meta monetą. Kartą vakare Bilis tarė:

— Kadangi paskutinius tris kartus išlošiau aš, šį kartą tu turėsi pranašumą: tu mesi dvi monetas, o aš — vieną. Jeigu tau iškris daugiau herbų negu man, išloši tu. Jeigu mažiau — aš.

— Gerai, — sutiko Džonas.

Tol, kol mėtė tik vieną monetą, Džono išlošimo tikimybė sudarė $\frac{1}{2}$. Kokia jo išlošimo tikimybė, galiojant naujam susitarimui?

3. Labirintas kube. Erdvinių labirintų pasitaiko nedažnai. Juos kai kada naudoja psichologai gyvulių dresiravimo procesui tirti, kartkarčiais pardavinėjami galvosū-

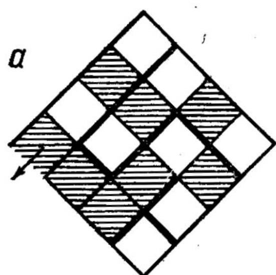
kiai, susiję su labirintais. Praeito amžiaus devintajame dešimtmetyje Londone buvo pardavinėjamas dviaukštis labirintas, per kurį reikėjo pravesti stiklinį rutuliuką. Šio žaislo aprašymas pateiktas profesoriaus Andželo Hofmano knygoje „Seni ir nauji galvosūkiai“ *. Dabar Amerikoje pardavinėjamas keturių aukštų to paties tipo kubo formos labirintas. Jį sudaro permatomas plastmasinis kubas, padalytas permatomomis pertvaromis į 64 mažus kubelius. Išėmus kai kurias pertvaras, iš kubo galima padaryti labirintą, per kurį paskui reikia pravesti rutuliuką. Tai paprastas galvosūkis, ir spręsti jį gana lengva.

Kartą Robertas Ebotas iškėlė sau uždavinį: sudaryti kuo sudėtingesnį 4×4×4 matmenų kubinį labirintą. 181 paveiksle pavaizduotas painiausias iš visų Eboto sugalvotų labirintų. Skaitytojui siūloma, negaminant labirinto, mintinai pervesti rutuliuką per jį. 181 paveiksle, *a — d,* parodytos to labirinto keturių aukštų schemos. Juodomis linijomis pažymėtos vertikalios pertvaros. Užtušuoti langeliai reiškia, kad toje vietoje yra horizontali pertvara. Jeigu langelis neužtušuotas, horizontalios pertvaros nėra. Taigi neužtušuotas kvadratinis langelis, apibrėžtas keturiomis juodomis tiesėmis, reiškia kubą, atvirą iš apačios, bet uždarą iš šonų. Norint nustatyti, ar toks kubas uždaras ar atviras iš viršaus, užtenka žvilgtelėti į langelį, esantį virš jo vienu aukštu aukščiau. Aišku, kad visą viršutinį aukštą (181 pav., *a*) visiškai dengia „lubos“.

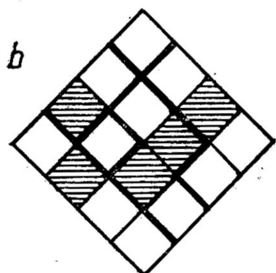
Įsivaizduokite, kad kiekviena 181 paveikslo schema (*a, b, c, d*) sudaro kubo, vaizduojamo tame pačiame paveiksle, keturių aukštų planą. Iš pradžių pabandykite rasti bet kokį kelią, kuriuo būtų galima pravesti rutuliuką nuo apatinio įėjimo iki viršutinio išėjimo, o paskui nustatyti trumpiausią maršrutą.

4. Uždavinys apie auksinę grandinėlę. Lenoksas R. Loras, Čikagos mokslo ir pramonės muziejaus direktorius, maloniai pranešė man apie kitą, iš pirmo žvilgsnio paprastą žinomo kombinatorikos uždavinio, kuris pasitaiko, daugelyje taikomosios matematikos sričių, variantą. Vienas keliautojas atsidūrė nepažįstamame mieste be pinigų. Po kelių savaičių jam turėjo atsiųsti čekį stambiai sumai. Iš visų jo daiktų brangiausia buvo auksinė dvidešimt trijų

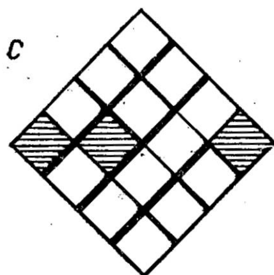
* A. Hoffman. Puzzles Old and New. London, 1893.



grandžių laikrodžio grandinėlė. Keliautojas susitarė su viešbučio savininke, jog kaip užstatą dvidešimt tris dienas jis kiekvieną dieną duos po vieną grandį.

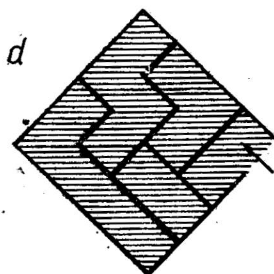


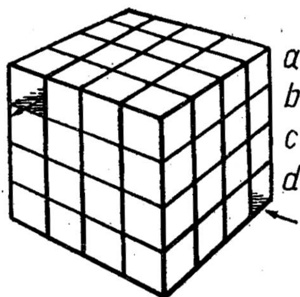
Keliautojui, suprantama, norėjosi kuo mažiau gadinti grandinėlę. Užuot kiekvieną dieną atpjovęs po vieną grandį, jis gali pirmą dieną duoti šeimininkei vieną grandį, antrą dieną šią grandį atsiimti ir duoti trumpą grandinėlę iš dviejų grandžių. Trečią dieną jis gali vėl duoti vieną grandį, ketvirtą dieną iškeisti visas tris grandis į grandinėlę iš keturių grandžių. Visos šios kombinacijos turi tenkinti vieną vienintelę sąlygą: kiekvieną dieną šeimininkė turi turėti tiek grandžių, kiek dienų praėjo nuo keliautojo atvykimo.



Netrukus keliautojas suprato, kad grandinėlę galima supjaustyti daugeliu įvairių būdų, nepažeidžiant sutarties su šeimininke. Čia ir kyla uždavi-

181 pav. Trimatis labirintas





nys nustatyti, kokį minimalų grandžių skaičių turi perpjauti keliautojas, kad, išmokėdamas kasdien po grandį, atsilygintų už visas dvidešimt tris dienas. Labiau kvalifikuotiems matematikams siūlau gauti bendrą formulę maksimaliam grandinės, kurios minimalus pjūvių skaičius lygus *n*, ilgiui nustatyti.

5. Kada sutampa laikrodžio rodyklės? Įsivaizduokite idealiai tikslų laikrodį su ilga sekundine rodykle.* Vidurdienį visos trys rodyklės nukreiptos į vieną ir tą patį ciferblato tašką. Kada dar visos trys rodyklės bus vienoje tiesėje? Atsakymas akivaizdus: pusiaunaktį.

Pirmoji ir paprasčiausia užduotis tokia: įrodyti, kad rodyklės gali sutapti tik tokiu atveju, jeigu jos nukreiptos į viršų. Atsakymas į antrąjį klausimą reikalauja didelio išradingumo: tiksliai nustatyti momentą (arba momentus), kada tarp dvyliktos valandos dienos ir dvyliktos valandos nakties visos trys rodyklės bus maksimaliai arti to, kad susieitų į vieną tiesę. Tai reikia suprasti taip: dvi rodyklės nukreiptos į tą patį ciferblato tašką, o trečioji rodyklė su pirmosiomis dviem sudaro kaip galima mažiausią kampą. Kada gali taip išsidėstyti rodyklės? Kurioje vietoje tuo metu bus trečioji rodyklė?

Tokio tipo uždaviniuose priimta laikyti, jog visos rodyklės juda pastoviu greičiu, todėl laikas gali būti nustatytas bet kokiu pageidaujamu tikslumu.

6. Trys kriptoritmai. 182 paveiksle parodyti trys nuostabūs kriptoritmai. Viršutinis visų paprasčiausias, antrasis sunkesnis, o apatinis toks sudėtingas, kad vargu ar kas nors iš skaitytojų sugebės jį įminti be skaičiavimo mašinos pagalbos.

1 uždavinys. Kiekvienas taškas reiškia vieną iš dešimties skaitmenų nuo 0 iki 9 imtinai. Vieni skaitmenys gali pasikartoti keletą kartų, o kiti gali likti visai nepanaudoti. Viršutinėje schemoje dviejų dviženklių skaičių sandauga duoda keturženklį skaičių, prie kurio paskui pridedamas vienetu prasidedantis triženklis skaičius. Vietoje kiekvieno taško parašykite reikiamą skaitmenį. Uždavinys turi vienintelį sprendinį.

* Turima galvoje, jog visos trys rodyklės (valandinė, minutinė ir sekundinė) sukasi ant vienos ašies.

2 Uždavinys. Kaip ir pirmajame kriptoritme, iš pradžių du skaičiai sudauginami, paskui prie rezultato pridedamas dar vienas skaičius. Bet šį kartą kiekvienas taškas reiškia vieną skaitmenų nuo 1 iki 9 imtinai (nulio nėra), be to, skaitmenys nesikartoja. Uždavinys turi vienintelį sprendinį.

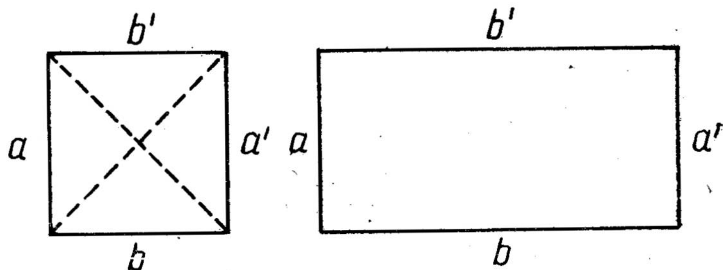
3 uždavinys. Kiekvienas taškas apatiniame pavyzdyje reiškia skaitmenis nuo 0 iki 9 imtinai. Kiekvienas skaitmuo panaudojamas du kartus. Sprendinys, kaip ir pirmų uždavinių, vienintelis.

182 pav. Trys kriptoritmai

7. Uždavinys su šachmatų figūromis. Išdėstę šachmatų lentoje standartinėje pradinėje pozicijoje aštuonias vienos spalvos figūras (be pėstininkų), galite jomis padaryti 51 ėjimą: po septynis skirtingus ėjimus kiekvienu rikiu ir kiekvienu bokštu, po tris ėjimus karalium ir žirgu ir pagaliau keturiolika ėjimų valdove. Keičiant figūrų išdėstymą, galimų ėjimų skaičių galima lengvai padidinti. Kokį maksimalų įvairių ėjimų skaičių taip galima pasiekti? Kitaip sakant: kaip reikia išdėstyti lentoje aštuonias vienos spalvos figūras, kad jos galėtų daryti maksimalų skaičių skirtingų ėjimų?

Pagal priimtas taisykles abu rikiai turi stovėti skirtingos spalvos langeliuose; rokiruoti negalima. Iš tikrųjų šie apribojimai nereikalingi, nes, juos pažeidus, ėjimų skaičius tik sumažės.

8. Kaip iš stačiakampio suklijuoti Miobijaus lapą?
24 skyriuje jau pasakojome, kaip Stifeno Baro metodu



183 pav. Kaip iš stačiakampio popieriaus lakšto suklijuoti Miobijaus lapą

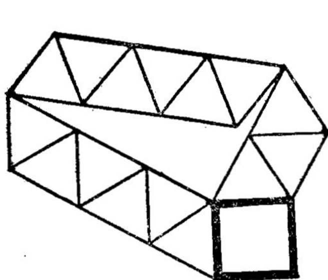
galima suklijuoti Miobijaus lapą iš kvadratinio popieriaus lakšto. Kvadratą, pavaizduotą 183 paveikslo kairėje, reikia perlenkti išilgai punktyrinių linijų, o kraštines *b* ir *b*' suklijuoti. Gausime vienpusį su vienu kraštu puse apsisukimo susuktą kaspiną. Nors ir gautasis paviršius ne Miobijaus lapas, jis vis dėlto bus visiškai tikslus jo modelis.

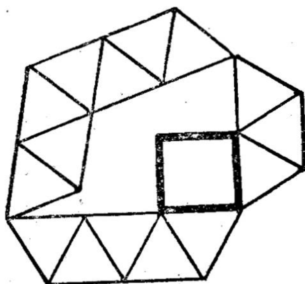
Sakykime, turime reikalo ne su kvadratu, o su iš popieriaus iškirptu stačiakampiu, kurio viena kraštinė dvigubai ilgesnė už kitą (183 pav. dešinėje). Ar galima jį sulankstyti taip, kad, suklijavę kraštines *b* ir *b*′, vėl gautume Miobijaus lapą? Popierių leidžiama bet kaip lankstyti ir susukti, bet negalima plėšti. Jį galima laikyti kiek norime plonu. Norint gauti Miobijaus lapą, stačiakampį reikia susukti puse apsisukimo ir kraštinę *b* ištisai priklijuoti prie kraštinės *b*′. Sudėtinga tai, kad reikia suklijuoti didžiąsias kraštines, nes, suklijuojant kraštines *a* ir *a*′, Miobijaus lapą gauti labai lengva.

Jeigu jums pasiseks rasti sprendinį arba įrodyti, kad jo nėra, pabandykite atsakyti į vieną dar įdomesnį klausimą: kam lygi minimali santykio $\frac{a}{b}$ reikšmė, su kuria dar galima suklijuoti Miobijaus lapą, sujungiant vieną su kita kraštines *b* ir *b*′?

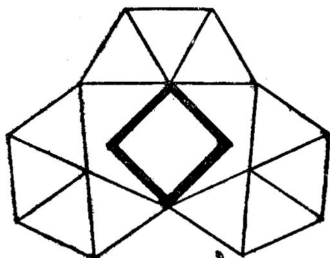
ATSAKYMAI

1. Vienas skaitytojų sugebėjo 31 strypu įtvirtinti plokštumoje kvadratą. Du iš jo gautų sprendinių (abu iš 31 strypo) parodyti 184 paveiksle. Tačiau pasirodė, kad šį uždavinį galima išspręsti ir su mažesniu strypų skaičiu-

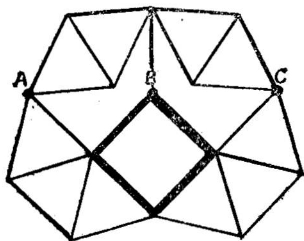




184 pav. Plokšti karkasai iš 31 strypo, suteikiantys kvadratui standumą

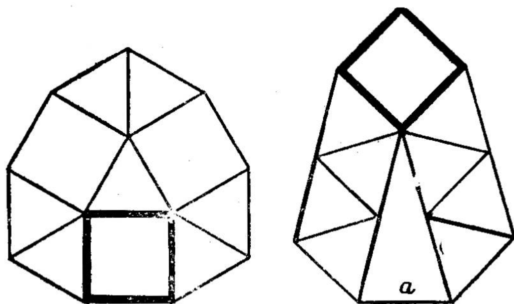


185 pav. Plokščias karkasas iš 25 strypų, suteikiantis kvadratui standumą



186 pav. Plokščias karkasas iš 23 strypų, suteikiantis kvadratui standumą

mi. Keturiasdešimt keturi skaitytojai man atsiuntė sprendinį, kuriam iš viso reikia tik dvidešimt penkių strypų (185 pav.), ir, nespėjus man atsitokėti iš nustebimo, dar septyni skaitytojai apstulbino mane kitu sprendiniu, kuriame panaudoti tik dvidešimt trys strypai (186 pav.). Plokščios konstrukcijos, pavaizduotos 186 paveiksle, standumas išplaukia iš to fakto, kad taškai *A, B* ir *C* turi būti vienoje tiesėje. Visi atsiųsti sprendiniai, kuriuose panaudojami mažiau kaip dvidešimt trys strypai, pasirodė neteisingi: juose nurodytos konstrukcijos arba nebuvo standžios arba pačiuose sprendiniuose pasitaikė kokių nors geometrinių klaidų. Du tipiški neteisingų sprendinių pavyzdžiai pavaizduoti 187 paveiksle. Viršutinė figūra nėra standi, o apatinėje, kuri yra reikiamo standumo, liniją *a,* deja, šiek tiek trumpesnė už kvadrato kraštinę.



187 pav. Du neteisingi uždavinio apie plokščią karkasą sprendiniai

2. Bilis meta vieną monetą, o Džonas — iš karto dvi. Džonas išlošia, jeigu jam iškrenta daugiau herbų, negu Biliui. Sudarę aštuonis galimus monetų iškritimo variantus, pamatysite, jog keturiais atvejais Džonas išlošia, o keturiais pralošia, todėl tikimybė jam išlošti lygi $1/2$, t. y. tokia pat, kaip ir metant vieną monetą. Ši tikimybė nesikeičia tol, kol Džonas mes viena moneta daugiau, negu Bilis. Jeigu, pavyzdžiui, Džonas turėtų penkiasdešimt vieną monetą, o Bilis — penkiasdešimt, bičiulių šansai išlošti vis tiek būtų vienodi.

3. Paprasčiausio būdo uždaviniui apie trimatį labirintą popieriuje spręsti esmė tokia: jūs dedate tašką kiekviename langelyje, paskui pieštuku sujungiate visus taškus, kurie yra langeliuose, tarpusavyje sujungtuose koridoriais. Kadangi labirinto struktūrai esminės įtakos turi tik topologinės gauto linijų tinklo savybės, tos linijos gali bet kaip išsivingiuoti ir susisukti, svarbu tik, kad jos sujungtų taškus reikiamu nuoseklumu.

Po to reikia nutrinti visas aklavietes, o visas uždaras kreives, kurios iš esmės yra ne kas kita, kaip klaidžiojantys („aplinkiniai") keliai tarp dviejų taškų, paversti neuždaromis, iš dviejų kreivę sudarančių kelių atkarpų nutrynus ilgąją. Taip jūs gausite trumpiausią kelią per labirintą. Atkreipkite dėmesį į tai, kad viršutinėje labirinto dalyje esanti uždara kreivė sudaryta iš dviejų įvairių vienodo ilgio kelių (188 pav.). Aišku, kad tikrame labirinte kiekvienos kreivės, jungiančios bet kuriuos du taškus (tarp

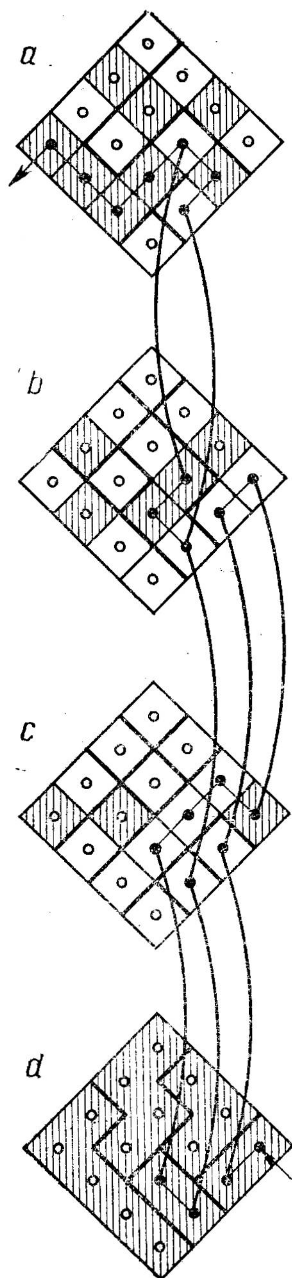
jų ir taškus, priklausančius skirtingiems aukštams), ilgis lygus vienetui, nes visas kelias per labirintą sudaro 19 vienetų.

Yra ir antras metodas trumpiausiam keliui per labirintą rasti. Pirmiausia iš virvės padaroma labirinto schema. Kiekvieno virvelinio modelio ruožo ilgis turi būti proporcingas labirinto atitinkamo ruožo ilgiui. Visas atkarpas reikia kaip nors sužymėti, kad būtų žinoma, kurį labirinto ruožą jos reiškia. Padarę modelį, paimkite viena ranka jo „pradžią“, o kita „galą“ ir stipriai ištempkite virvę. Visi klaidžiojantys keliai ir aklavietės karos, o įtemptoji virvės dalis ir bus trumpiausias kelias per labirintą!

4. Kad keliautojas galėtų mokėti viešbučio šeimininkei po vieną grandį į dieną, jam pakanka savo auksinę dvidešimt trijų grandžių grandinėlę perpjauti tik dviejose vietose. Perpjovus ketvirtąją ir vienuoliktąją grandį, grandinėlė išsidalija į dvi atskiras grandis ir tris grandinėles, sudarytas atitinkamai iš trijų, šešių ir dvylikos grandžių. Iš šio rinkinio galima sudaryti bet kokią kombinaciją nuo 1 iki 23.

Jeigu grandinėje padaryta n pjūvių, maksimalus jos ilgis išreiškiamas formule

$$[(n+1)2^{n+1}]-1.$$



188 pav. Uždavinio apie trimatį labirintą sprendimas

```
      9 9
 ×    9 9
---------
    8 9 1
  8 9 1
---------
  9 8 0 1
+   1 9 9
---------
1 0 0 0 0
```

```
  1 7
×   4
-----
  6 8
+ 2 5
-----
  9 3
```

```
    1 7 9
×   2 2 4
---------
    7 1 6
  3 5 8
3 5 8
---------
4 0 0 9 6
```

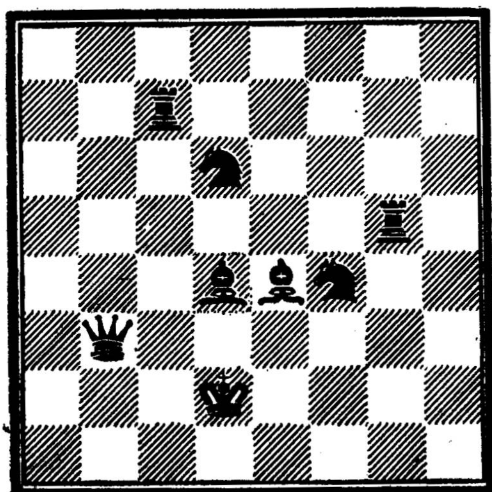
189 pav. Uždavinio apie tris kriptoritmus sprendimas

Taigi grandinę iš septynių žiedų pakanka perpjauti vienoje vietoje (trečią grandį), grandinę iš šešiasdešimt trijų grandžių — trijose vietose (penktą, keturioliktą ir trisdešimt pirmą grandį) ir t. t.

5. Visos trys laikrodžio rodyklės, uždėtos ant vienos ašies, vienoje tiesėje yra tik tuo atveju, kai jos visos rodo tašką su atžyma 12. Trumpiausias įrodymas pagrįstas elementaria diofantine analize. Kai valandinė rodyklė sutampa su minutine arba sekundine rodykle, tuomet atstumų, kuriuos nuėjo dvi sutampančios rodyklės, skirtumas turi būti lygus sveikam valandų skaičiui. Per dvyliką valandų valandinė rodyklė aprašo pilną apskritimą.

Tarkime, jog visos trys rodyklės sutapo, ir atstumas x, kurį iki to momento nuėjo valandinė rodyklė, mažesnis už pilną apskritimą. Jeigu valandinė rodyklė nuėjo atstumą x, minutinė rodyklė per tą patį laiką nuėjo atstumą $12x$, t. y. jų kelių skirtumas yra $11x$. Per tą patį laiką sekundinė rodyklė nuėjo atstumą $720x$; iš to skaičiaus atėmę valandinės rodyklės nueitą atstumą, gauname $719x$. Visos trys rodyklės gali sutapti tik tokiam x, su kuriuo abu skaičiai — $719x$ ir $11x$ yra sveikieji. Kadangi 719 ir 11 — pirminiai skaičiai, x gali įgyti tik dvi reikšmes — 0 ir 1, o tai atitinka dviem laikrodžio parodymams — 0 ir 12.

Be to atvejo, kai visos trys rodyklės nukreiptos į viršų, jos būna arčiausiai viena kitos (sąvoka „arčiausiai“ reiškia, jog dvi rodyklės sutampa, o trečioji yra arčiausiai jų) 3 h 16 min $16\frac{256}{719}$ s ir 8 h 43 min $43\frac{463}{719}$ s.

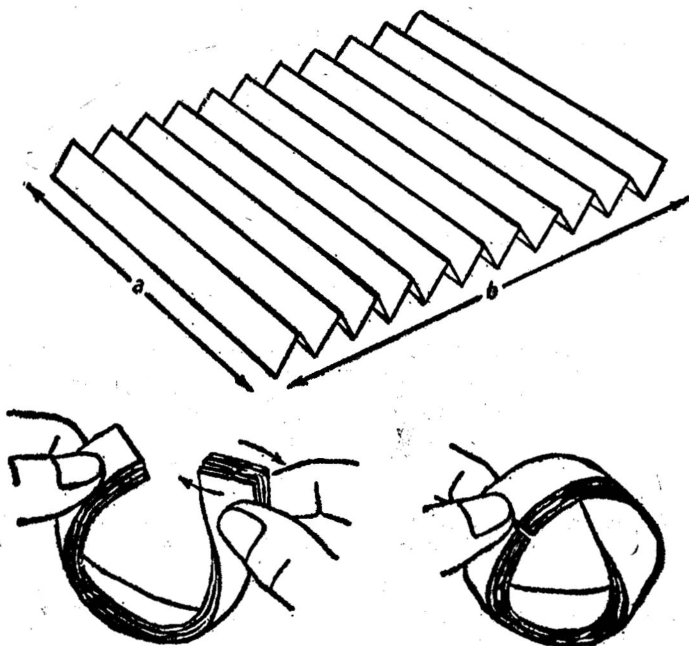


190 pav. Kaip išdėstyti šachmatų lentoje aštuonias figūras, kad jos grasintų maksimaliam skaičiui laukelių

Tie du laiko momentai yra veidrodiniai vienas kito atspindžiai ta prasme, kad jeigu prikištume prie veidrodžio laikrodį, rodantį 3 h 16 min $16\frac{256}{719}$ s, ir tą, ką rodytų veidrodis, skaičiuotume taip, tarsi ciferblatas būtų įprastas (ne atspindėtas), gautume 8 h 43 min $43\frac{463}{719}$ s. Šių dviejų skaičių suma lygi 12h. Abiem atvejais sekundinė rodyklė sutampa su valandine rodykle, o minutinė rodyklė sudaro su jomis $\frac{360^\circ}{719}$ (arba $5\frac{5''}{719}$) kampą. Pirmuoju atveju minutinė rodyklė atsilieka nuo kitų dviejų $\frac{30}{719}$ laipsnio, o antruoju — tiek pat užskuba.

6. Kiekvienas iš trijų kriptoritmų turi vienintelį sprendinį, nurodytą 189 paveiksle. Viršutinis sprendinys priklauso Stifenui Barui, vidurinis — Henriui E. Djudeniui, o apatinis paimtas iš Frederiko Šu knygos „Įdomieji uždaviniai" („Wonderlijke Problemen").

7. Išdėsčius aštuonias vienos spalvos šachmatų figūras lentoje taip, kaip parodyta 190 paveiksle, bendras įvairių



191 pav. Kaip suklijuoti Miobijaus lapą iš stačiakampio popieriaus lakšto

ėjimų skaičius tiksliai lygus 100. Anglų šachmatų uždavinių specialistas G. R. Dausonas tvirtina, kad pirmasis tą uždavinį 1848 metais iškėlė vokiečių šachmatininkas M. Becelis. Jo sprendinys, vaizduojamas 190 paveiksle, buvo paskelbtas sekančiais metais, o 1899 metais E. Landau viename vokiečių matematikos žurnale pranešė, kad jam pasisekė įrodyti, jog Becelio sprendinys vienintelis ir kad 100 tikrai yra maksimalus galimų ėjimų skaičius. Vienintelumo klausimu Landau padarė vieną trivialų pareiškimą apie tai, kad bokštas, kuris stovi ketvirtos iš viršaus eilutės septintame langelyje, lygiai taip pat gali užimti tos pačios eilutės pirmąjį kvadratą.

8. Prieš jus popierinis stačiakampis, kurio aukštis lygus a, o plotis — b. Koks minimalus $\frac{a}{b}$ santykis, kuriam esant, iš stačiakampio dar galima sudaryti Miobijaus la-

pą, suklijavus vieną su kita *b* ilgio kraštines? Atsakymas visiškai nelauktas: tokio minimumo nėra. Trupmena gali būti kiek norima maža. Įrodymas gaunamas „konstruktyviai“. Iš stačiakampio reikia sudaryti gofruotą juostelę (191 pav.), be to, taip, kad viena iš kraštinių *a* būtų viršuje, o kita — apačioje. Po to juostelė pasukama puse apsisukimo, o galai suklijuojami. Viskas!

XXXII skyrius

Tikrinimas lyginumu

Žinomoje Džono Kitso poemoje „Puikioji dama, nežinanti gailestingumo“ pasakojama apie išblyškusį riterį, užmerkusį savo puikios damos akis keturiais bučiniais.

„Kodėl būtent keturiais bučiniais, paklausite jūs,— rašė Džonas Kitsas viename laiške. — Nenorėdamas vieną akį labiau vertinti už kitą, aš turėjau pasirinkti lyginį skaičių. Manau, kad dviejų bučinių vienai akiai visiškai pakanka. Įsivaizduokite, kad aš pasirinkau septynis bučinius. Tuomet kiekvienai akiai tektų po tris su puse bučinio, ir išblyškęs riteris atsidurtų labai keblioje padėtyje.“

Jeigu poemoje būtų pasakojama, kad išblyškęs riteris savo puikiosios damos akis pabučiavo 37 kartus, ar reikėtų tuomet eksperimentais patikrinti, jog kiekvienai akiai tenka po lygiai bučinių? Ne, nes skaičius 37 yra nelyginis ir nesidalija iš 2, vadinasi, kažkuriai akiai tikrai teko bent vienu bučiniu daugiau, negu kitai. Analogiška situacija susidaro viename sename anekdote, kuriame pasakojama, kaip kartą pavasarį matematikos fakulteto studentas išėjo pasivaikščioti su pažįstama mergaite. Mergaitė nuskynė ramunę ir, tardama „myli-nemyli...“, pradėjo skabyti lapelius. „Be reikalo tu taip vargsti,— nusijuokė studentas. — Reikia tik suskaičiuoti visus lapelius; jeigu jų skaičius lyginis, tu gausi neigiamą atsakymą, o jeigu nelyginis — teigiamą.“

Ir ištraukoje iš Kitso laiško, ir anekdote kalbama apie du (tiesa, labai trivialius) pavyzdžius, kaip panaudoja-

mas vadinamasis tikrinimas lyginumu — labai paprastas būdas, kurį taikant, galima spręsti gana sudėtingus matematinius uždavinius. Tais atvejais, kai uždavinyje yra lyginių ir nelyginių skaičių arba dvi kokių nors elementų nesusikertančios aibės kurias tie skaičiai gali atitikti, patikrinus lyginumu, galima rasti greitą puikų sprendimą.

Išnagrinėsime skaičiaus $\sqrt{2}$ iracionalumo įrodymą (skaičius yra iracionalus, jeigu jo negalima išreikšti trupmena, kurios skaitiklis ir vardiklis yra sveikieji skaičiai), kaip klasikinį skaičių teorijos pavyzdį, suformuluotą Euklido ir minimą, matyt, dar Pitagoro laikais. Kadangi vietinio kvadrato įstrižainės ilgis lygus, $\sqrt{2}$ skaičiaus $\sqrt{2}$ iracionalumas reiškia, kad ilgio vienetu pasirinkę kvadrato kraštinę, niekada negalėsime tiksliai išmatuoti jo įstrižainės ilgio liniuote, kad ir kaip tankiai būtų išdėstytos jos padalos, jeigu atstumas tarp jų sudaro $\frac{1}{k}$; čia k — sveikasis skaičius.

Įrodymas labai paprastas: įrodoma priešingybės būdu. *Sakykime, kad yra* tokia trupmena $\frac{n}{m}$ su sveikuoju skaitikliu ir vardikliu, kuriai galioja lygybė $\frac{n}{m}=\sqrt{2}$. Neapribodami bendrumo, laikysime, kad skaičiai n ir m reliatyviai pirminiai (jeigu n ir m turėtų bendrų daugiklių, juos būtų galima suprastinti). Kadangi šios trupmenos kvadratas lygus 2, teisinga lygybė

$$\frac{n^2}{m^2}=2. \qquad (1)$$

Abi jos puses padauginę iš m^2, gausime

$$n^2=2m^2. \qquad (2)$$

Dešinioji (2) lygybės pusė lyginė (nes skaičius $2m^2$ turi daugiklį 2). Vadinasi, kairioji pusė (skaičius n^2) taip pat lyginė. Bet kokio skaičiaus kvadratas lyginis tik tada, kai pats tas skaičius yra lyginis. Vadinasi, skaičius n lyginis. Dabar grįšime prie skaičiaus m. Jis lyginis ar nelyginis? Skaičius m negali būti lyginis, nes tuomet skaičiai m ir n būtų lyginiai ir trupmeną $\frac{n}{m}$ suprastintume iš 2. Tai prieštarautų mūsų prielaidai, kad $\frac{n}{m}$ — nesuprastinama trupmena. Vadinasi, skaičius m turi būti nelyginis.

Kadangi n lyginis, jį galime išreikšti $n=2a$; čia a — kuris nors kitas sveikasis skaičius. Įrašę $n=2a$ į (2) lygybę, gausime:

$$4a^2=2m^2, \quad (3)$$

iš čia

$$2a^2=m^2. \quad (4)$$

Analogiškais samprotavimais parodysime, kad m negali būti nelyginis skaičius, nes jo kvadratas turi būti lyginis skaičius lygus (4) lygties kairiajai pusei. Kiekvienas sveikasis skaičius yra arba lyginis, arba nelyginis, todėl skaičius m negali būti sveikasis. Taigi mūsų priimta prielaida pasirodė neteisinga: nėra trupmenos $\frac{n}{m}$, kurios skaitiklis ir vardiklis yra sveikieji skaičiai ir kuri lygi $\sqrt{2}$. Skaičius $\sqrt{2}$ iracionalus, ir iš pavadinimo matyti, kaip buvo apstulbę senovės graikai, aptikę tokius skaičius. Drauge įrodėme, kad (2) lygtis neišsprendžiama sveikaisiais skaičiais. Kitaip tariant, nėra tokio sveikojo skaičiaus, kurio kvadratas būtų du kartus didesnis už kito skaičiaus kvadratą. Tai irgi labai svarbi teorema, kurią labai sunku įrodyti, netikrinant lyginumu, t. y., nesinaudojant paprastu būdu, turinčiu tokią nuostabią jėgą.

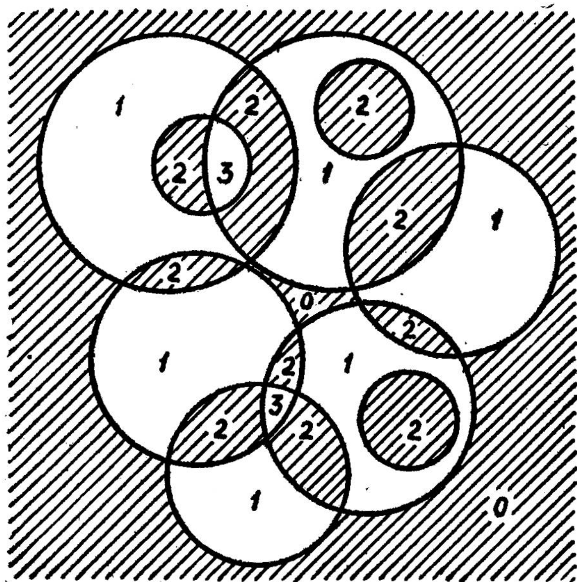
Kokią matematikos sritį bepaimtume, joje visuomet atsiras uždavinių, lengvai ir paprastai išsprendžiamų, tikrinant lyginumu. Išnagrinėsime, pavyzdžiui, tokį topologinį uždavinį. Ant popieriaus lapo nubraižysime keletą bet kokio dydžio apskritimų (apskritimų skaičius taip pat visiškai nesvarbu). Ar visuomet panašų „žemėlapį" galima nuspalvinti dviem spalvomis taip, kad jokios dvi sritys, turinčios bendras ribas, nebūtų vienos spalvos? Pasirodo, visuomet. Vienas galimų įrodymo variantų yra toks. Paimsime bet kurią viena su kita besiribojančių sričių A ir B porą. Apskritimą, kurio lankas atskiria sritį A nuo srities B, pažymėsime raide X. Viena šių sričių bus apskritimo X viduje, kita — išorėje. Kitų apskritimų atžvilgiu sritys A ir B išsidėsčiusios taip pat: arba jos yra to paties skaičiaus apskritimų viduje, arba visi apskritimai išdėstyti už abiejų sričių. Vadinasi, apskritimų, kurių viduje yra viena sričių, skaičius vienetu didesnis už skaičių apskritimų, kurių viduje yra antroji sritis. Ant kiekvienos srities parašę skaičių apskritimų, kurių viduje ji yra, pamatėme, kad iš bet kurių dviejų gretimų sričių viena bus

visuomet pažymėta lyginiu skaičiumi, o antra — nelyginiu (192 pav.). Lygines sritis nuspalvinkite viena spalva, o nelygines — kita, ir uždavinys išspręstas.

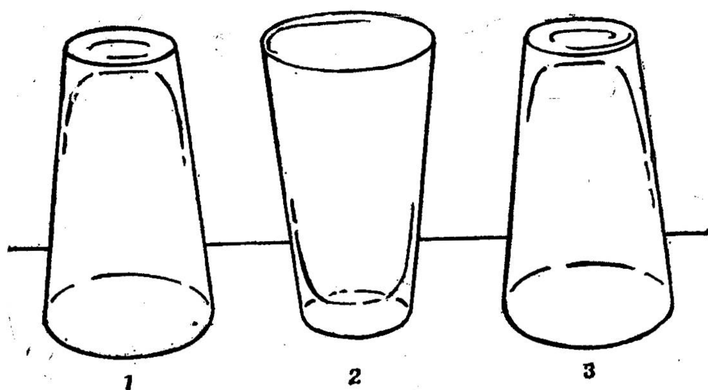
Daugeliui fizikinių reiškinių neretai randama tokia matematinė formuluotė, kurioje panaudojamos visiems gerai žinomos lyginių ir nelyginių skaičių savybės. Kaip pavyzdį išnagrinėsime vieną įdomų saloninį fokusą su trimis tuščiomis stiklinėmis. Stiklines pastatę taip, kaip parodyta 193 paveiksle, žiūrovams paaiškinkite užduotį: vienu metu apverčiant po dvi stiklines (po vieną kiekviena ranka), reikia trimis veiksmais visas stiklines pastatyti dugneliais žemyn. Pademonstruokite, kaip tai daroma: iš pradžių apverskite *1* ir *2* stiklinę, po to *1* ir *3*, pagaliau *1* ir *2*. Paskui visos stiklinės atsidurs reikiamoje padėtyje. Šioje vietoje reikia nepastebimai pasukčiauti. Apvertę vidurinę stiklinę dugnu į viršų, pasiūlykite kam nors iš žiūrovų pačiam išspręsti galvosūkį. Paprastai mažai kas pastebi, kad nauja stiklinių padėtis skiriasi nuo pirmosios. Paprastas patikrinimas lyginumu parodo, kad, kiek kartų beapverstute stiklines, šiuokart susidoroti su užduotimi jums nepavyks.

Įrodoma taip. Kai normaliai stovi lyginis stiklinių skaičius (nulis arba dvi), sakome, kad sistema turi teigiamą lyginumą. O jeigu lyginis stiklinių skaičius stovi dugnu į viršų, tokios sistemos lyginumas neigiamas. Lengva suprasti, kad, apvertus bet kurią stiklinių porą, sistemos lyginumas nesikeičia, todėl, apversdami stiklines poromis bet kokį skaičių kartų, padėties su teigiamu lyginumu (viena stiklinė dugnu į viršų) negalėsite pakeisti padėtimi su neigiamu lyginumu (kai visos stiklinės stovi normaliai). Jeigu žiūrovas pakankamai atidžiai sekė jūsų veiksmus, visa, ką jis sugebės,— apversti visas tris stiklines dugnu į viršų. Jeigu jis, mėgindamas kitą kartą, atsitiktinai stiklines pastatys teisingai, jūs turite nedelsdami įsikišti ir, dar kartą pademonstravę, kaip sprendžiamas galvosūkis, pastatyti stiklines reikiamoje padėtyje.

Sakykim, prieš jus stovi dešimt stiklinių (arba bet koks kitas lyginis skaičius, kuris nesidalija iš keturių), kas antra apversta dugnu į viršų. Ar galima, apverčiant po dvi, pasiekti, kad visos stiklinės stovėtų vienodai, t. y. arba visos dugnu žemyn, arba visos dugnu į viršų? Ne, negalima, nes abiem atvejais teks pakeisti sistemos lyginumą (neigiamą penkioms stiklinėms į teigiamą de-



192 pav. Dviejų spalvų problema



193 pav. Kaip reikia sustatyti stiklines fokusui

šimčiai), o tai neįmanoma. Iki tol, kol susiduriame su paprastomis stiklinėmis, kurios atitinka mūsų vaizdinius apie jų sandarą,— visiškai neįmanoma pažeisti lyginumo tvermės dėsnio. Tačiau gamta, ypač subatominiame lygyje, nebūtinai turi paklusti mūsų vaizdiniams apie jos sandarą.

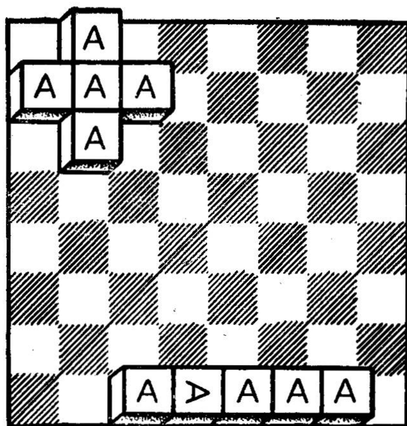
1956 metais paaiškėjo, kad lyginumo tvermės dėsnis, kuris trisdešimt metų buvo laikomas nepajudinamu, pažeidžiamas, elementarioms dalelėms silpnai viena kitą veikiant. Fizikai iki šiol negali atsipeikėti nuo staigmenos. Šį atradimą galima palyginti su atveju, kai kas nors, priėjęs prie dešimties stiklinių, apverstų kas antra dugnu į viršų, vertė jas poromis ir jam pavyko visas stiklines pastatyti teisingai!

Tuo pačiu metodu pagrįstas vienas įdomus fokusas su monetomis. Fokusas priklauso „viršjutiminio suvokimo" sričiai. Jūs kam nors pasiūlote išimti iš kišenės saują monetų ir paberti ant stalo. Nusigręžęs prašote bet kaip apversti bet kurias monetas, bet apversti jas reikia po dvi. Žiūrovai tai gali daryti kiek nori ilgai, stengdamiesi nebarbenti į stalą, kad jums nepavyktų suskaičiuoti, kiek kartų monetos apverstos. Po to, vieną monetą uždengę ranka, atsigręžiate į stalą. Skubiai žvilgtelėję į kitas monetas, jūs akimirksniu pasakote, kaip guli paslėptoji moneta: herbu ar skaičiumi į viršų.

Fokusas paaiškinamas be galo paprastai. Jeigu pabaigoje herbų skaičius lyginis, nelyginumas teigiamas, o jeigu nelyginis — neigiamas. Apverčiant monetas poromis, lyginumas išlieka. Išnagrinėsime, pavyzdžiui, situaciją, kai iš pradžių herbu į viršų guli penkios monetos. Tuomet pabaigoje visos sistemos lyginumas turi likti neigiamas, todėl, pamatę lyginį herbų skaičių, iš karto atspėjate, kad ant paslėptos monetos yra taip pat herbas. O jeigu atverstų herbų skaičius nelyginis, ant paslėptos monetos turi būti skaičius. Fokusą galima pakeisti, paprašius ranka uždengti iš karto dvi monetas; atspėkite, ar jos vienodai guli, ar ne.

Kartais lyginumas toks užslėptas, kad jį aptikti pavyksta tik įžvalgiausiems matematikams. Labai įtikinantis pavyzdys yra toks neįprastas uždavinys, paimtas šiek tiek pakeistas iš puikaus Rolando Sprego galvosūkių rinkinio. Vienoje penkių vienodų kubelių sienoje įrašyta raidė *A*; visos kitos sienos tuščios. Iš šių kubelių kairiajame

viršutiniame šachmatų lentos kampe sudėtas kryžius (194 pav.), be to, visi kubeliai pasukti siena su raide *A* į viršų. Pradedate juos po vieną perstatinėti į apatinį lentos kraštą, kiekvieną pasiekdami aplink vieną briauną, tartum ridentute iš vietos į vietą didžiulį sunkų kubą. Kitaip tariant, kubelis perkeliamas, pasukant jį 90°; kiekvienas pasukimas jį perkelia ant gretimo langelio. Veikiant pagal šią schemą, jums nepavyks kubelių sudėti horizontalioje eilėje sienomis *A* į viršų taip, kad raidės *A* orientacija visur būtų vienoda. Realus yra išsidėstymas, pavaizduotas 194 paveikslo lentos apačioje. Nustatykite, kuris horizontaliosios eilės kubelis iš pradžių stovėjo kryžiaus centre? Galima, aišku, paimti penkis kubelius ir, juos „kantuojant" iš langelio į langelį, išaiškinti, kur pereis centrinis kubelis, tačiau jeigu sugebėsite atspėti, kur čia slypi lyginumo tvermės dėsnis, uždaviniui išspręsti pakaks tik atidžiai išnagrinėti 194 paveikslą. Be to, tikrinant lyginumu, kartu įrodoma ir tai, kad sprendinys vienintelis; to negalima pasakyti apie eksperimentinį patikrinimą. Spręsdami uždavinį eksperimentiškai, tik parodysite, kad vienas eilės kubelis galėjo būti centrinis, bet tai visai neįrodo, kad centrinis negali būti joks kitas kubelis.



194 pav. Uždavinys sprendžiamas, tikrinant lyginumu (viršuje — kubelių išsidėstymas uždavinio pradžioje, apačioje — uždavinio pabaigoje)

Galbūt kitas lyginumo uždavinys jums atrodys paprastesnis. Jo atsiradimas susijęs su ekscentriško amerikiečių architekto Frenko Loido Rongo darbais. Norėdamas įpykinti vieną turtingą klientą, Rongas jam suprojektavo didžiulės avalynės spintos formos namą. Namą sudarė trys aukštai, atskirti grindimis ir lubomis, o kiekvienas aukštas vertikaliomis sienomis buvo suskirstytas į septynis stačiakampius kambarius. Name nebuvo numatyti nei koridoriai, nei laiptai, nei sanitariniai mazgai; nebuvo nei

pamatų, nei aukšto; jis visas buvo sudarytas iš dvidešimt vieno kambario-dėžutės.

Šiame name durys dalijosi į dvi kategorijas:

1) paprastos durys, jungiančios vieną su kitu gretimus kambarius arba vedančios iš pirmo aukšto kambarių į lauką;

2) angos, per kurias pristatomais laiptais buvo galima patekti iš vieno kambario į kitą, esantį toje pačioje vertikalėje aukštu žemiau ar aukščiau.

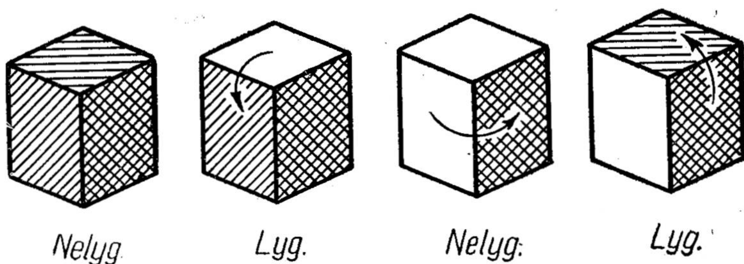
Visos durys išdėstytos bet kaip. Bet kuriame kambaryje galėjo būti visas tuzinas ar net daugiau durų, arba visai nė vienų durų. Tačiau Rongas rūpestingai sekė, kad kiekvienas kambarys turėtų lyginį durų skaičių (nulis laikomas lyginiu). Reikia įrodyti, kad išorinių durų, vedančių iš pirmo aukšto kambarių į gatvę, skaičius yra lyginis.

ATSAKYMAI

Uždavinyje su kubeliais reikėjo nustatyti, kuris horizontaliosios eilės kubelis iš pradžių buvo kryžiaus centre, jeigu, perkeliant nuo langelio ant langelio, kubeliai kiekvieną kartą pasukami 90° aplink atitinkamą apatinės sienos briauną. Aišku, kad kubelis, pasuktas lyginį skaičių kartų, atsidurs ant tos pačios, kaip ir pradinis langelis, nuo kurio jis pradėjo judėti, spalvos langelio. O jeigu pasukimų skaičius nelyginis, paskutinis langelis bus kitos spalvos. Patikrinimas lyginumu, nustatant kubelių orientaciją, ne toks akivaizdus.

Įsivaizduokite, kad trys sienos, sueinančios į vieną kubelio viršūnę, nuspalvintos raudonais dažais, o pats kubelis pasuktas taip, kad jūs matote kažkurias tris jo sienas (195 pav.). Susidaro keturios galimybės: jūs matote tris raudonas sienas, dvi raudonas sienas, vieną raudoną sieną ir pagaliau apskritai nematote nė vienos raudonos sienos*. Sakysime, kad kubelis turi teigiamą lyginumą, jeigu iš matomų sienų viena arba trys — raudonos; priešingu atveju kubelio lyginumas laikomas neigiamu. Visiškai aišku, kad, pasukdami kubelį ant bet kurios gretimos sienos, keičiame jo lyginumą. (Tai išplaukia iš to, kad priešingos kubelio sienos yra skirtingų spalvų ir,

* 195 paveiksle raudonos sienos užštrichuotos. — *Vert. past.*



195 pav. Kubelio lyginumo keitimasis, pasukant 90° aplink skirtingas briaunas

pasukus kubelį 90°, vienos sienos nematyti, o vietoj jos pasirodo jai priešinga kitos spalvos siena. Taigi bet kuris pasukimas 90° reiškia, kad pasikeičia vienos matomos sienos spalva.) Įsivaizduokite, kad kubelį pakeitėte žaidimų kauliuku, kurio lyginumas nustatomas lygine ar nelygine akių trijose matomose sienose suma.

Kiekvienu ėjimu kubelis pasukamas 90°, todėl jo lyginumas kiekvieną kartą keičiasi. Po lyginio skaičiaus ėjimų kubelis atsiduria padėtyje su tuo pačiu lyginumu tokios pačios spalvos langelyje, kaip ir žaidimo pradžioje. Nelyginis ėjimų skaičius keičia ir padėties lyginumą, ir langelio spalvą. Centrinis kubelis iš pradžių užėmė baltą langelį. Patekęs į apatinę eilę po nelyginio skaičiaus ėjimų, jis turėtų atsidurti ant juodo langelio, t. y. padėtyje su priešingu lyginumu. Tačiau visi kubeliai, stovintys apatinėje eilėje ant juodų langelių, turi tą patį lyginumą, todėl centrinio kubelio tarp jų nėra. Vadinasi, centrinio kubelio ėjimų skaičius turi būti lyginis, todėl jo reikia ieškoti ant balto langelio pradinio lyginumo padėtyje. Iš dviejų kubelių, esančių ant baltų langelių, nepasikeitė tik antrojo kubelio iš dešinės lyginumas, vadinasi, jis ir yra ieškomasis.

Įrodinėdami, kad namas, kurį suprojektavo Rongas, turi lyginį durų, išeinančių į gatvę, skaičių, iš pradžių priminsime, kad kiekvienos durys turi dvi puses, vadinasi, n durų turės $2n$ puses, t. y. lyginį skaičių. Žinoma, kad durų skaičius kiekviename kambaryje yra lyginis. Sakykime, visos durys uždarytos. Tuomet kiekvieno kambario vidun bus atgręžtas lyginis jų pusių skaičius, todėl

bendras pusių, atgręžtų visuose kambariuose, skaičius taip pat lyginis. Atėmę jį iš bendro visų namo durų pusių skaičiaus, kuris taip pat lyginis, gausime dar vieną lyginį skaičių, reiškiantį skaičių pusių, neatgręžtų kambario vidun. Aišku, kad tos pusės turi priklausyti durims, vedančioms į gatvę.

Taigi įrodėme, kad skaičius durų, vedančių į lauką, lyginis.

XXXIII skyrius

Žaidimas 15 ir kiti galvosūkiai

„Seni galvosūkių šalies gyventojai tikriausiai prisimena,— rašė Semas Loidas savo plačiai žinomoje knygoje „Galvosūkių enciklopedija",— kaip septintojo dešimtmečio * pradžioje aš išjudinau visą pasaulį maža nedidelių kubelių prikrauta dėžute, kurią pavadinau žaidimu 15."

Penkiolika sunumeruotų kubelių gulėjo kvadratinėje dėžutėje taip, kaip vaizduojama 196 paveiksle. Perkeliant iš eilės po vieną kubelį, reikėdavo pasiekti, kad 14 ir 15 numeriai pasikeistų vietomis ir kad visi kubeliai gulėtų iš eilės, be to, viską perstačius, apatinis dešinysis kampas turi būti laisvas, kaip ir žaidimo pradžioje.

Visuotinis susidomėjimas šiuo žaidimu greit apėmė ir Angliją, ir Europą. „Žmonės tiesiog pamišo per tą galvosūkį,— tęsė Loidas. — Iš lūpų į lūpas keliavo pasakojimai apie krautuvininką, pamiršusį atidaryti savo parduotuvę, apie šventiką, kuris po gatvės žibintu prastovėjo ilgą žiemos naktį, vildamasis prisiminti, kaip jam pavyko išspręsti uždavinį...

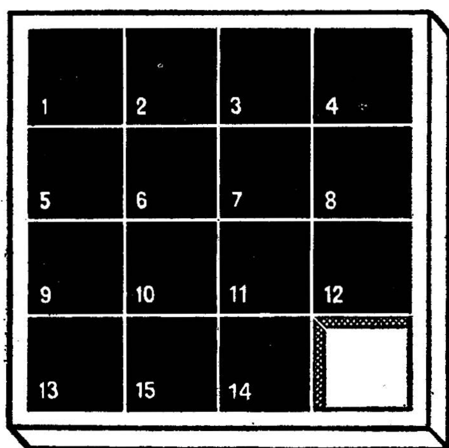
Vienas žinomas redaktorius iš Baltimorės pasakojo, kad kartą vidudienį jis išėjo užkąsti ir tik vėlai naktį galų gale viltį praradę laikraščio bendradarbiai rado jį,

* Kalbama apie septintąjį XIX amžiaus dešimtmetį.— *Vert. į rusų k. past.*

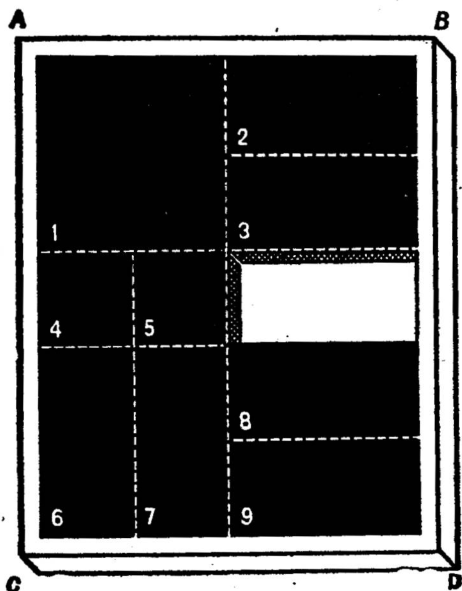
sėdintį už stalo ir stumdantį lėkštėje tai pirmyn, tai atgal smulkius pyrago gabaliukus!“

Keletui matematikų paskelbus, kad šio galvosūkio išspręsti negalima, juo pradėta mažiau domėtis. Šiuo metu juo kai kada remiasi specialistai kaip miniatiūriniu vadinamos nuosekliai veikiančios mašinos modeliu. Kiekvienas kubelio perstatymas reiškia įvedamąjį signalą, o kiekvienas kubelių išsidėstymas, arba „būvis“,— išvedamąjį. Pasirodo, kad galimų išvedamųjų signalų skaičius tiksliai lygus $\frac{1}{2}(15!)$; tai sudaro 1 307 674 368 000. Matematinė žaidimo 15 teorija gali būti taikoma visiems galvosūkiams, kuriuose vienodi kvadratukai stumdomi stačiakampiame lauke.

Jeigu stumdomi ne kvadratukai, o įvairios figūros, žaidimo 15 teorijos, pasirodo, pritaikyti negalima. Loido galvosūkio pasisekimas padėjo atsirasti daugybei analogiškų galvosūkių, kuriuose naudojamos įvairiausių formų figūros. Visų tų žaidimų teorija dar mažai nagrinėjama. Be bandymų ir klaidų metodo, nėra jokio kito metodo, kuriuo būtų galima nustatyti, ar galima iš vieno duoto būvio gauti kitą duotą būvį, ir jeigu galima, tai kaip tai padaryti minimaliu skaičiumi ėjimų. Šie patrauklūs galvosūkiai tarytum specialiai sudaryti programuoto-



196 pav. Žaidimas 15

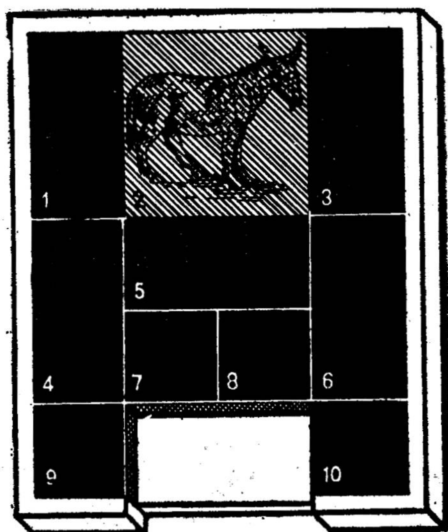


197 pav. „Tėvuko galvosūkis"

jams, o visiems kitiems jie tik patrauklūs žaidimai, kuriuos galima žaisti vienam, be partnerio. Specialiai tam pasiruošti nereikia: turint žirkles ir gabalą kartono, visa, ko reikia, galima paruošti tiesiog per keletą minučių.

Vienas tų galvosūkių (galimas dalykas, pirmasis) vaizduojamas 197 paveiksle. Atsitraukite kuriam laikui nuo knygos ir iškirpkite iš plono kartono devynias reikalingas figūras. Tam tikslui nubrėžkite 4×5 matmenų stačiakampį, subrūkšniuokite jį plonomis linijomis vienetiniais langeliais, paskui tiesiog apibrėžkite juos ir sunumeruokite taip, kaip parodyta 197 paveiksle. Iškirpkite figūras ir išdėstykite 4×5 matmenų stačiakampyje, nubrėžtame kitos spalvos popieriaus arba kartono lape. Užduotis tokia: reikia, pastumiant po vieną figūrą, neperkeliant vienos per kitą ir neišeinant už didžiojo stačiakampio ribų, perstumti kvadratą *1* iš kampo *A* į kampą *D*.

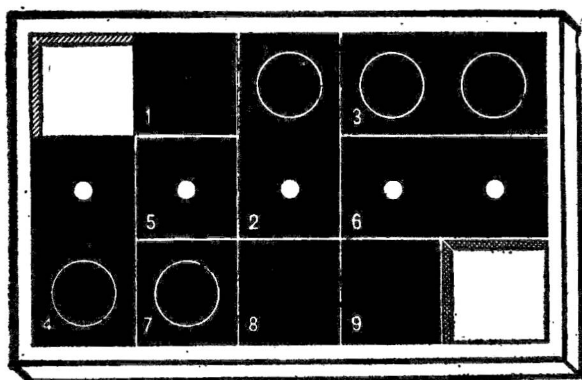
Perstumti kvadratą į kampą *B* nesudėtinga. Tam tikslui figūros pastumiamos tokia tvarka: *5, 4, 1, 2, 3, 4* (aukštyn ir dešinėn), *1, 6, 7, 8, 9; 5, 4, 1, 6; 7, 8, 9, 4*

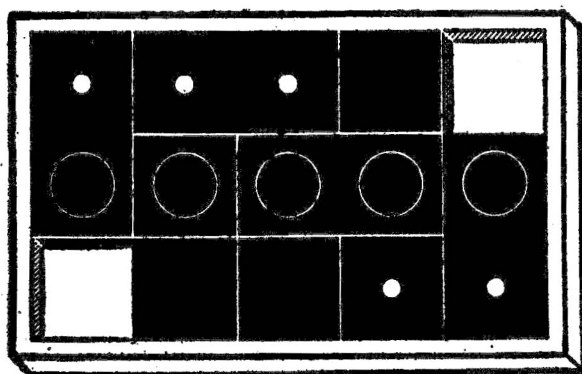


198 pav. Galvosūkis „Rudas asilas"

(kairėn ir žemyn), *8; 7, 6, 2, 3, 1*. Pateiktasis sprendinys sudarytas iš minimalaus skaičiaus, lygaus 25, ėjimų. (Figūros pastūmimas išilgai stataus kampo dviejų sienų laikomas vienu ėjimu.) Dideliam kvadratui iš kampo *A* į kampą *C* perstumti reikės 29 ėjimų. Pirmieji 19 ėjimų abiejuose sprendiniuose sutampa, o kiti ėjimai atrodo taip: *1, 3, 2, 6, 7; 8, 9, 4, 5, 1*. Matyt., kvadrato *1* neįmanoma perstumti iš kampo *A* į kampą *C* mažiau kaip 59 ėjimais. Pabandykite patys tai padaryti, nepažiūrėję į atsakymą. Visiškai pakanka iškirpti figūrą iš kartono; tiesa, kur kas gražesni ir patvaresni bus stačiakampiai iš faneros, plastmasės, linoleumo ir t. t. Priklijuokite prie faneros lapo keturias kartonines juosteles. Gausite ribas, kuriose turi būti perstumiamos figūros. Fanerą reikia gerai nušlifuoti, kad stačiakampiukai lengvai ja slankiotų; pravartu nušlifuoti ir stačiakampiukų kraštus, o kampus truputį suapvalinti.

Niekas nežino, kaip atsirado šis nuostabus galvosūkis. 1926 metais Amerikoje jis buvo pardavinėjamas kaip „Tėvuko galvosūkis"; jis taip tebevadinamas ir iki šiol. Vieną 1×2 matmenų stačiakampį supjausčius į du vienetinius

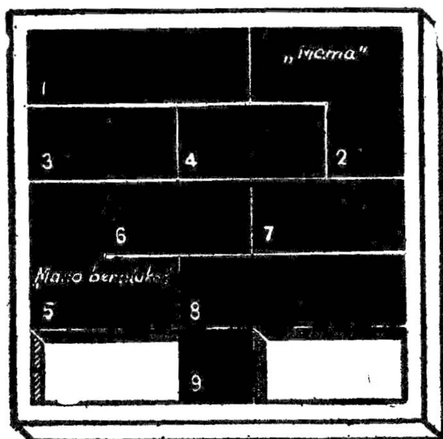




199 pav. Galvosūkis „Penketukas vienoje eilėje.“
Kairėje — pradinė, dešinėje — galinė padėtis

kvadratus, išeina sudėtingesnis dešimties figūrų galvosūkis (198 pav.). Prancūzijoje ilgą laiką jis buvo žinomas „Rudo asilo“ vardu. Žaidžiantysis turi stumdyti figūras tol, kol didelis kvadratas su nupieštu jame rudu asilu bus išstumtas iš dėžutės pro apačioje esančią borto išpjovą. Dar niekas nerado sprendinio, sudaryto iš minimalaus ėjimų skaičiaus. Pabandykite pakartoti vieno skaitytojų sprendimą, kuriam prireikė tik 81 ėjimo.

1934 metais Londone gimė penketukas. Tam įvykiui pažymėti buvo išleistas 199 paveiksle vaizduojamas galvosūkis „Penketukas vienoje eilėje“ (jį sudarė Ričar-



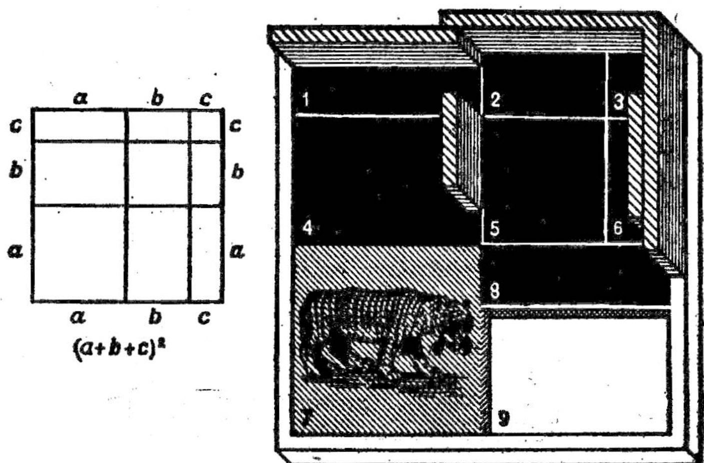
200 pav. „Močiutės galvosūkis"

das U. Fatiganas.) Penki rutuliukai vaizduoja penkių vaikų galvutes. Užduotis tokia: 199 paveikslo viršutiniame kadre vaizduojamą poziciją reikia pertvarkyti į kitą poziciją, vaizduojamą to paties paveikslo apatiniame kadre. Geriausias iš visų man žinomų sprendinys sudarytas iš 30 ėjimų.

Reikėtų tikėtis, jog kas nors norės šį uždavinį padaryti sudėtingesnį, įvesdamas kitokias figūras. 1927 metais Čarlzas L. A. Dajemendas 1633397 numeriu užpatentavo galvosūkį, vaizduojamą 200 paveiksle. Matyt, priešingai „Tėvuko galvosūkiui", Dajemendo galvosūkis buvo pavadintas „Močiutės galvosūkiu". Figūra Nr. 2 vadinosi „Mama", figūra Nr. 5 — „Mano berniukas". (Kitos septynios figūros reiškė įvairias negandas kelyje tarp motinos ir sūnaus.) Uždavinio tikslas toks: sujungus 2 ir 5 figūras, dešiniajame viršutiniame kampe sudaryti 3×2 matmenų stačiakampį (jis gali būti bet kaip orientuotas). Pabandykite šį uždavinį išspręsti 32 ėjimais.

Šie neįprasti žaidimai, kurių istorijos kol kas niekas nenagrinėjo, paskutinį kartą buvo patobulinti galvosūkiu, kurį išrado Šarlis E. Stotsas.

Stotsas, būdamas septynerių metų, apako. Pastaraisiais metais jis sugalvojo daugybę nuostabių galvosūkių ir pats juos pagamino iš medžio, vielos ir plastmasės.



201 pav. Galvosūkis „Tigras“

Šeštajame dešimtmetyje buvo svarstomas klausimas apie patento išdavimą Stotsui dėl 15 tipo serijos galvosūkių, kuriuos jis pavadino „Tigru“.

Kiekvienas tos serijos galvosūkis pagrįstas diagrama, kurią dažnai naudoja algebros dėstytojai, norėdami vaizdžiai išvesti sumos kvadrato formulę. Pateiksiu tik vieną visų paprasčiausią „tigrinį“ galvosūkį, kuriam bus reikalinga diagrama, naudojama trinario $(a+b+c)$ kvadrato formulei išvesti. Ji vaizduojama 201 paveikslo kairėje. Dydžiai a, b ir c atidėti kvadrato kraštinėje. Daugindami reiškinį $(a+b+c)$ iš jo paties, gauname tokį rezultatą:

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

Kiekvienas šios sumos narys lygus kurios nors brėžinio figūros plotui: čia yra trys kvadratai su kraštinėmis a, b ir c; du stačiakampiai su kraštinėmis a ir b, du stačiakampiai su kraštinėmis a ir c bei du stačiakampiai su kraštinėmis b ir c. Šia schema Stotsas pagrindė nuostabų galvosūkį, vaizduojamą 201 paveikslo dešinėje. Prie didžiojo kvadrato viršutinės kraštinės jis priklijavo paveiksliuką su tigru. Viršutiniame dešiniajame dėžutės kampe Stotsas pritvirtino du kartono gabaliukus, reiškiančius dalį aptvaro (paveiksle jie užtušuoti). Tris kitas dalis jis

priklijavo prie stačiakampių, pažymėtų skaitmenimis *1*, *4* ir *6* (jeigu patys gaminsite tą galvosūkį, aptvarą galėsite prie figūrų ne klijuoti, o tiesiog nupiešti ant jų).

Žaidimo pradžioje visos figūros išdėstomos taip, kaip parodyta 201 paveiksle, o *9* figūra išimama iš dėžutės. Stumdant figūras dėžutėje, reikia pasiekti, kad tigras atsidurtų dešiniajame viršutiniame kampe ir kad iš visų pusių jis būtų aklinai apsuptas kvadratiniu aptvaru.

Šitame galvosūkyje, kitaip nei anksčiau minėtuose, dėžutėje pakankamai daug tuščios vietos, todėl kvadratinę figūrą kai kada galima pasukti 90° kampu. Tokį pasukimą, suprantama, galima daryti tik tada, kai jis įmanomas geometriškai, t. y. kai nė vienos figūros nereikės pakelti nuo plokštumos. Geriausią Stotso sprendinį sudaro keturiasdešimt devyni ėjimai. Didelės apimties galvosūkiai paprastai žymiai sudėtingesni: kaip ten bebūtų, nežinau sudėtingesnių tokio tipo uždavinių už Stotso „tigrinius“ galvosūkius.

Dabar praktiniai galvosūkiai su stačiakampėje dėžutėje stumdomomis įvairiomis plokščiomis figūromis niekur nepritaikomi. Tačiau būtų naivu galvoti, kad jie niekada taip ir nebus naudingi praktikoje. Vystantis automatizacijai, kyla sudėtingi uždaviniai, kaip efektyviausiu būdu racionaliai sandėliuoti, o vėliau ir rasti prekes. Ateis diena, kai kiekviena namų šeimininkė galės perduoti telefonu į universalinę parduotuvę visus savo pageidavimus, o mašinos suras jai reikalingas prekes ir išsiųs jas arba paštu, arba bagažu. Jeigu prekės bus supakuotos stačiakampėse dėžėse, tai visiškai įtikėtina, kad jas teks kažkiek kartų perstumdyti kokioje nors apréžtoje erdvėje. Su tokio paties pobūdžio uždaviniais dabar nuolatos susiduriama automobilių stovėjimo aikštelėse ir didelių miestų garažuose, kur turimo ploto ribose reikia pastatyti kuo daugiau mašinų ir kiekvienai iš jų sugalvoti trumpiausią kelią iš stovėjimo vietos į gatvę. Galvosūkiai su stumdomomis dėžutėje figūromis Anglijoje neretai vadinami „garažiniais“, nes kai kuriuose angliškuose to žaidimo variantuose stačiakampiukai buvo laikomi mašinomis, stovinčiomis garaže. Uždavinio esmė, suprantama, tokia: pristumti prie vartų pasirinktą automobilį taip, kad nė vienos kitos mašinos nereikėtų išstumti iš garažo.

Pradėję spręsti bet kurį iš tų galvosūkių, iš karto įsitikinsite, kad jie daro hipnotizuojantį poveikį. Neturė-

dami jėgų atsitraukti, be paliovos stumdysite dėžutėje figūras, ieškodami minimalaus skaičiaus ėjimų, reikalingų užsibrėžtai padėčiai pasiekti.

Visi tie uždaviniai sprendžiami toli gražu ne tik bandymų ir klaidų metodu. Greitai suprasite, kad, darydami vienus ėjimus, pateksite į aklavietę, o kiti padės pasiekti pageidaujamų rezultatų.

ATSAKYMAI

„Tėvuko galvosūkis“ išsprendžiamas 59 ėjimais: *5, 4, 1, 2, 3, 4* (aukštyn ir dešinėn); *1, 6, 7, 8, 9, 5; 4, 1, 6, 7, 8, 9; 5* (kairėn ir aukštyn), *9, 8, 5, 4, 1; 3, 2, 7, 6, 4* (aukštyn ir kairėn), *6; 7, 4, 5, 6, 7, 5* (dešinėn ir aukštyn); *3, 2, 5, 4, 3, 2; 4* (žemyn ir dešinėn) *2, 3, 6, 7, 1; 4, 5, 2, 3, 6, 7; 1, 4* (kairėn ir aukštyn), *9, 8, 1.*

Galvosūkiui „Rudas asilas“ išspręsti pakanka 81 ėjimo: *9* (iki vidurio, t. y. iki linijos, dalijančios laisvą akutę pusiau), *4, 5, 8* (žemyn), *6; 10* (iki vidurio), *8, 6, 5, 7* (aukštyn ir kairėn); *9, 6, 10* (kairėn ir žemyn), *5, 9; 7, 4, 6, 10, 8; 5, 7* (žemyn ir kairėn), *6, 4, 1; 2, 3, 9, 7, 6; 3, 2, 1, 4, 8; 10* (dešinėn ir aukštyn), *5, 3, 6, 8; 2, 9, 7* (aukštyn ir kairėn), *8, 6; 3, 10* (dešinėn ir žemyn), *9* (žemyn ir kairėn), *1; 4, 2, 9, 7* (iki vidurio), *8, 6, 3, 10, 9* (žemyn), *2; 4, 1, 8, 7, 6; 3, 2, 7, 8, 1; 4, 7* (kairėn ir aukštyn), *5, 9, 10; 2, 8, 7, 5, 10* (aukštyn ir kairėn), *2.*

Penketuką galima, išrikiuoti į vieną eilę 30 ėjimų: *9, 8, 1, 2, 3; 6, 8* (aukštyn ir kairėn), *2, 5* (dešinėn ir žemyn), *3; 6, 8* (aukštyn ir kairėn), *9, 2, 8; 6, 3, 1* (dešinėn ir žemyn), *6, 3; 5* (aukštyn ir dešinėn), *1* (dešinėn ir žemyn), *7, 1* (kairėn), *8; 5* (žemyn), *3, 6* (iki vidurio), *4, 9.*

„Močiutės galvosūkis“ išsprendžiamas 32 ėjimais: *9* (kairėn), *8, 7, 6, 5; 9* (aukštyn), *8, 7, 6, 4; 2, 1, 3* (aukštyn), *9* (aukštyn), *5; 4* (kairėn ir aukštyn), *6* (kairėn, aukštyn, kairėn), *2, 4, 6; 5, 9* (vertikaliai žemyn), *6* (kairėn ir žemyn), *4, 2; 5* (dešinėn), *6* (dešinėn ir žemyn); *4* (žemyn), *3, 1; 2, 5.*

„Galvosūkio „Tigras“ sprendimą sudaro 49 tokie ėjimai: *8, 5, 6, 2, 3; 1, 4, 2* (kairėn), *3* (kairėn), *1; 4, 2, 3* (aukštyn), *7, 8* (kairėn ir aukštyn); *5, 6, 1, 4, 3; 2, 7, 8* (aukštyn), *5, 6; 1, 8* (dešinėn ir žemyn), *5, 6, 1; 8* (žemyn), *4, 2* (pasukti 90° kampu ir mažąją kraštinę suta-

patinti su *3* kvadrato kraštine taip, kad *3* kvadratas atsidurtų virš *2* stačiakampio), *7, 5; 6* (pasukti 90° kampu ir padėti horizontaliai po *5* kvadratu aptvaru žemyn), *4, 2* (pasukti 90° kampu ir padėti horizontaliai po *7* figūra), *3* (pastumti dešinėn iki *2* stačiakampio galo), *7; 8, 1, 4, 6* (pasukti 90° kampu ir įstumti į viršutinį tarpą tarp *5* ir *7* figūros; aptvaras turi būti iš dešinės), *4; 8* (kairėn ir žemyn), *2* (žemyn ir kairėn), *3* (žemyn ir kairėn), *1*.

XXXIV skyrius

Pirminiai skaičiai

Joks kitas skaičių teorijos skyrius neturi tiek mįslingumo ir grožio, kaip pirminių skaičių skyrius. Pirminiai skaičiai — nepaklusnūs užsispyrėliai, atkaliai nenorintys dalytis iš jokio sveiko skaičiaus, išskyrus vienetą ir juos pačius. Kai kurie pirminių skaičių pasiskirstymo teorijos uždaviniai formuojami taip paprastai, kad juos suprasti gali ir vaikas. Tačiau jie tokie gilūs ir sunkiai išsprendžiami, kad daugelis matematikų laiko juos iš viso neišsprendžiamais. Galbūt skaičių teorijoje taip pat, kaip ir kvantinėje mechanikoje, galioja savas neapibrėžtumo santykis ir kai kuriuose jos skyriuose pravartu kalbėti tik apie vieno ar kito rezultato tikimybę?

Didžiausias sunkumas tas, kad pirminiai skaičiai pasiskirstę tarp visų sveikųjų skaičių pagal dėsnį, turintį aiškiai netikimybinį charakterį, bet vis dėlto atkakliai nepasiduodantį visiems mėginimams jį nustatyti. Kam lygus šimtasis pirminis skaičius? Vienintelis būdas matematikui atsakyti į šį klausimą — sudaryti pirminių skaičių sąrašą ir pažiūrėti, kuris jų yra šimtasis. O kaip sudaryti tokį sąrašą? Paprasčiausias metodas — peržiūrėti vieną po kito iš eilės visus sveikuosius skaičius, išbraukiant visus sudėtinius (nepirminius). Suprantama, elektroninėmis skaičiavimo mašinomis taip peržiūrėti galima nepaprastai

greitai, tačiau iš esmės toks sprendimas niekuo nesiskiria nuo procedūros, kurią maždaug prieš 2000 metų pasiūlė astronomas ir geografas Eratostenas iš Aleksandrijos.

Susipažinti su pirminiais skaičiais paprasčiausia, praleidus visus skaičius, mažesnius už 100, per Eratosteno rėtį (taip vadinamas senovės mokslininko pasiūlytas metodas pirminiams skaičiams atrinkti). Vienas mūsų skaitytojas pasiūlė tokią Eratosteno rėčio „konstrukciją". Visus sveikuosius skaičius nuo 1 iki 100 surašome stačiakampėje lentelėje, pavaizduotoje 202 paveiksle. Išbraukiame visus skaičius, *2* kartotinius, išskyrus patį dvejetą, nubrėždami vertikalius brūkšnius antroje, ketvirtoje ir šeštoje skiltyje. Išbraukiame visus skaičius, 3 kartotinius (pats trejetas lieka), nubrėždami vertikalų brūkšnį trečioje skiltyje. Sekantis po 3 neišbrauktas skaičius lygus 5. Norėdami išbraukti skaičius, 5 kartotinius, nubrėžiame įstrižaines, einančias žemyn ir kairėn. Likusius lentelėje skaičius, 7 kartotinius, išbraukiame, nubrėždami įstrižaines dešinėn ir žemyn. Skaičiai 8, 9 ir 10 — sudėtiniai, jų kartotiniai jau buvo išbraukti anksčiau. Tai ir visas mūsų darbas, sudarant pirminių skaičių, neviršijančių skaičiaus 100, sąrašą, nes sekantis pirminis skaičius 11 didesnis už 10 — skaičių, lygų kvadratinei šakniai iš didžiausio skaičiaus lentelėje. Jeigu lentelė būtų didesnė, tektų išbraukti 11 kartotinius, brėžiant labiau pasvirusias įstrižaines.

Taigi visi skaičiai, išskyrus dvidešimt šešis, atspausdintus juodžiau, išsisijojo pro rėtį. Liko tik 26 pirminiai skaičiai. Matematikai labiau linkę sakyti, kad liko tik 25 pirmieji pirminiai skaičiai, nes daugelis svarbių teoremų formuluojamos paprasčiau, 1 nelaikant pirminiu skaičiumi. Pavyzdžiui, „pagrindinė skaičių teorijos teorema" teigia, kad bet kokį sveikąjį skaičių galima vienareikšmiškai (dauginamųjų eilės tikslumu) išskaidyti pirminiais dauginamaisiais. Taip skaičius 100 išreiškiamas keturių pirminių dauginamųjų sandauga $2\times2\times5\times5$. Bet kokia kita pirminių dauginamųjų sandauga (kuri skiriasi bent vienu skaičiumi) neduos skaičiaus 100. Vienetą laikant pirminiu skaičium, ši labai svarbi teorema neteisinga. Šiuo atveju 100 sandaugos pavidalu galima išreikšti be galo daug pirminių skaičių skirtingų rinkinių, pavyzdžiui $2\times\times2\times5\times5\times1\times1$ pavidalu.

Lentelė, pavaizduota 202 paveiksle, gali suteikti daug žinių apie pirminius skaičius. Pavyzdžiui, iš karto matyti,

kad visi pirminiai skaičiai p, tenkinantys nelygybę $p>3$, arba vienetu didesni, arba vienetu mažesni už kažkokį skaičių, 6 kartotinį. Taip pat aišku, kodėl tarp pirminių skaičių taip daug „dvynių“ — pirminių skaičių, kurie vienas nuo kito skiriasi 2 (pavyzdžiui 71 ir 73, 209 267 ir 209 269, 1 000 000 009 649 ir 1 000 000 009 651); išbraukus visus skaičius, 2 ir 3 kartotinius, visi kiti skaičiai dalijasi į „dvynių“ poras. Paskui skaičius praleidus pro Eratosteno rėtį, arba vienas dvynių, arba abu atsisijoja, o kai kurios poros lieka nepaliestos. Didėjant skaičiams, pirminių skaičių dvynių poros pastebimos vis rečiau. Yra (kol kas dar neįrodyta) hipotezė, pagal kurią tarp pirminių skaičių yra be galo daug dvynių porų.

Priklausomai nuo sveikųjų skaičių išsidėstymo pirminiai skaičiai gali sudaryti vieną ar kitą raštą. Kartą matematikui Stanislavui M. Ulamui teko klausytis vieno labai ilgo ir, anot jo, labai nuobodaus pranešimo. Norėdamas kaip nors išsiblaškyti, jis popieriaus lapelyje nubrėžė vertikalias ir horizontalias linijas ir jau ketino sudarinėti šachmatų etiudus, bet paskui apsigalvojo ir, centre parašęs 1, spirale prieš laikrodžio rodyklę pradėjo numeruoti susikirtimus. Be jokios slaptos minties jis visus pirminius

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100		

202 pav. Eratosteno rėtis

skaičius apibrėžė ratukais. Netrukus, jo nuostabai, ratukai atkakliai išsirikiavo išilgai tiesių. 203 paveiksle parodyta, kaip atrodė šimto pirmųjų skaičių (nuo 1 iki 100) spiralė. Patogumo dėlei skaičiai įrašyti į langelius, o ne ant linijų susikirtimo.

Arti centro dar buvo galima tikėtis, kad pirminiai skaičiai išsirikiuos išilgai tiesių, nes iš pradžių jie išsidėstę labai tankiai ir visi, išskyrus skaičių 2, nelyginiai. Šachmatų lentos langelius sunumeravus pagal spiralę, visi nelyginiai skaičiai pateks į tos pačios spalvos langelius. Paėmę 17 pėstininkų (atitinkančių 17 pirminių skaičių, neviršijančių skaičiaus 64) ir juos sustatę kaip paklius ant vienos spalvos langelių, išvysite, kad pėstininkai išsirikiavo išilgai įstrižųjų tiesių. Tačiau nebuvo pagrindo tikėtis, kad ir didelių skaičių srityje, kur pirminių skaičių tankumas žymiai mažesnis, jie taip pat išsirikiuos išilgai tiesių. Ulamas susidomėjo, kaip atrodys spiralė, pratęsus ją iki keleto tūkstančių pirminių skaičių.

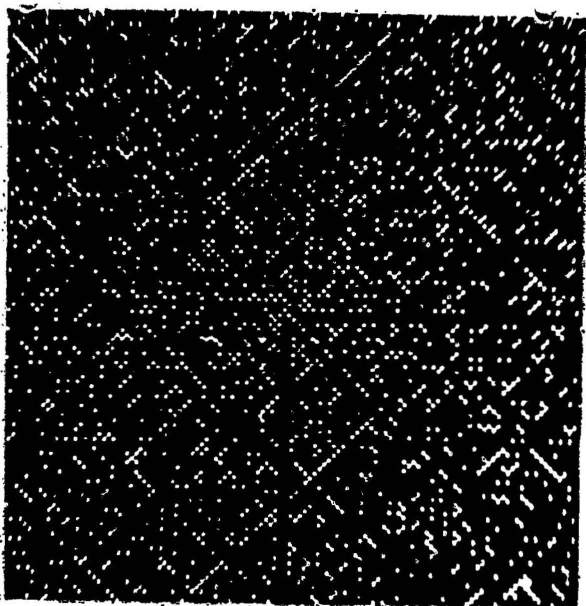
100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82

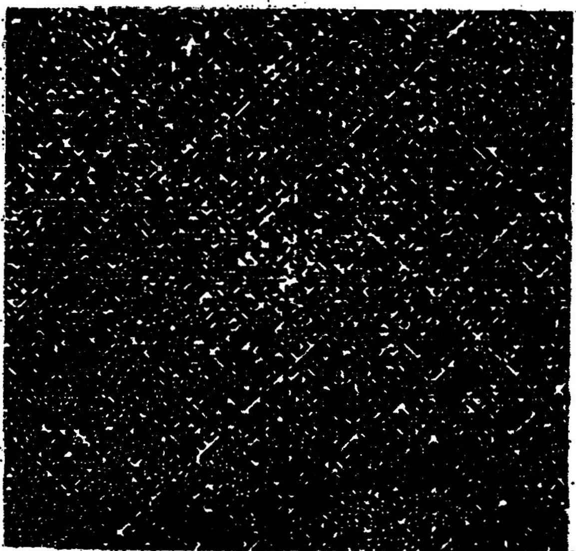
203 pav. Ulamo spiralė

Losalamoso laboratorijos skaičiavimo skyrius, kur dirbo Ulamas, turėjo magnetinę juostą; joje buvo užrašyta 90 mln. pirminių skaičių. Ulamas kartu su Maironu L. Steinu ir Marku B. Velsu skaičiavimo mašinai MANIAC sudarė programą, įgalinančią pažymėti spiralėje iš eilės einančius sveikuosius skaičius nuo 1 iki 65 000. Taip gautas raštas (kartais jis vadinamas „Ulamo staltiese") pavaizduotas 204 paveiksle. Atkreipkite dėmesį į tai, kad net prie paveikslo krašto pirminiai skaičiai taip pat klusniai rikiuojasi ant tiesių.

Pirmiausia krinta į akis pirminių skaičių susibūrimas ant įstrižainių, bet puikiai jaučiama ir kita pirminių skaičių tendencija — rikiuotis išilgai vertikalių ir horizontalių linijų, kuriose visus langelius, laisvus nuo pirminių skaičių, užima nelyginiai skaičiai. Pirminius skaičius, patenkančius ant tiesių, pratęstų už atkarpos, kuriai priklauso iš eilės einantys skaičiai, esą kokioje nors spiralės vijoje, galima laikyti reikšmėmis tam tikrų kvadratinių reiškinių, prasidedančių nariu $4x^2$. Pavyzdžiui, pirminių skaičių 5, 19, 41, 71, stovinčių vienoje įstrižainėje (203 pav.), seka,— tai reikšmės, kurias įgyja kvadratinis trinaris $4x^2+10x+5$, kai x lygus 0, 1, 2 ir 3. Iš 204 paveikslo matyti, kad kvadratiniai reiškiniai, įgyjantys pirmines reikšmes, būna „neturtingi" (duodantys mažai pirminių skaičių) ir „turtingi" ir kad „turtingose" tiesėse būna ištisi pirminių skaičių „sąnašynai".

Spiralę pradėję ne 1, o kokiu nors kitu skaičiumi, gausime kitus kvadratinius reiškinius pirminiams skaičiams, išsirikiavusiems išilgai tiesių. Išnagrinėsime spiralę, prasidedančią skaičiumi 17 (205 pav., kairėje). Skaičius išilgai pagrindinės įstrižainės, einančios iš „šiaurės rytų" į „pietvakarius", duoda kvadratinis trinaris $4x^2+2x+17$. Suteikdami x teigiamas reikšmes, gauname apatinę įstrižainės pusę, įrašydami neigiamas reikšmes, — viršutinę. Išnagrinėjus visą įstrižainę ir perstačius pirminius skaičius didėjančia tvarka, pasirodys (ir tai malonus siurprizas), kad visi skaičiai išreiškiami paprastesne formule x^2+x+17. Tai viena iš daugelio pirminius skaičius „gaminančių" formulių, kurias dar XVIII amžiuje atrado didysis matematikas Leonardas Oileris. Kai x įgyja reikšmes nuo 0 iki 15, formulė duoda tik pirminius skaičius. Vadinasi, pratęsę įstrižainę taip, kad ji užpildytų kvadratą





204 pav. Skaičiavimo mašinos pavaizduoto rašto („Ulamo staltiesės“) fotografijos, kuriose matyti, kad pirminiai skaičiai rikiuojasi išilgai tiesių. Viršutinėje fotografijoje pirminiai skaičiai paimti intervale nuo 1 iki 10 000, apatinėje — nuo 1 iki 65 000.

33	32	31	30	29
34	21	20	19	28
35	22	17	18	27
36	23	24	25	26
37	38	39		

57	56	55	54	53
58	45	44	43	52
59	46	41	42	51
60	47	48	49	50
61	62	63		

205 pav. Įstrižainės, užpildytos pirminiais skaičiais, kuriuos duoda kvadratiniai trinariai x^2+x+17 (kairėje) ir x^2+x+41 (dešinėje)

16×16, pamatysime, kad visa įstrižainė užpildyta pirminiais skaičiais.

Įžymiausią Oilerio kvadratinį trinarį, duodantį pirminius skaičius, x^2+x+41, galime gauti, pradėję spiralę nuo skaičiaus 41 (205 pav., dešinėje). Šiuo trinariu galima gauti 40 iš eilės einančių pirminių skaičių, užpildančių visą kvadrato 40×40 įstrižainę! Seniai žinoma, kad iš 2 398 pirmųjų reikšmių, kurias įgyja šis trinaris, lygiai pusė yra pirminės. Peržiūrėję visas įžymaus trinario reikšmes, neviršijančias 10 000 000, Ulamas, Steinas ir Velsas nustatė, kad pirminių skaičių dalis tarp jų sudaro 0,475 ... . Matematikai labai norėtų atrasti formulę, pagal kurią galima būtų gauti su kiekvienu sveiku x skirtingus pirminius skaičius, tačiau kol kas nepavyko jos aptikti. Galbūt tokios formulės ir nėra.

Ulamo spiralė iškėlė daug naujų klausimų apie pirminių skaičių pasiskirstymo dėsningumus ir atsitiktinumus. Ar egzistuoja tiesės, kuriose yra be galo daug pirminių skaičių? Koks pirminių skaičių pasiskirstymo išilgai tiesių maksimalus tankumas? Ar iš esmės skiriasi pirminių skaičių pasiskirstymo tankumai Ulamo „staltiesės“ kvadratuose, laikant, kad ji tęsiasi neribotai? Ulamo spiralė — pramoga, bet į ją reikia žiūrėti rimtai.

Nors pirminiai skaičiai didelių skaičių srityje pastebimi vis rečiau ir rečiau, didžiausio pirminio skaičiaus

nėra. Dar Euklidas paprastai ir puikiai įrodė, kad pirminių skaičių aibė — begalinė. Tiksliai sutvarkytas Eratosteno rėčio algoritmas leidžia manyti, kad rasti formulę, pagal kurią galima būtų tiksliai nurodyti, kiek pirminių skaičių yra bet kuriame skaičių ašies intervale, — ne toks jau sunkus dalykas. Tačiau ir kaip dirbo matematikai, jie taip ir nerado trokštamos formulės. Praeito amžiaus pradžioje buvo iškelta (paremta pirminių skaičių lentelės stebėjimais) hipotezė, pagal kurią pirminių skaičių, neviršijančių tam tikrą skaičių *n*, skaičius apytiksliai išreiškiamas santykiu $\frac{n}{\ln n}$ (ln — natūrinis logaritmas), ir kad ši apytikslė reikšmė juo geresnė, juo didesnis skaičius *n*. Ši nuostabi teorema, žinoma „teoremos apie asimptoninį pirminių skaičių pasiskirstymą" pavadinimu, buvo griežtai įrodyta 1896 metais.

Rasti retas pirminių skaičių oazes, pasimetusias plačiuose sudėtinių skaičių tyruose, dengiančiuose vis didesnius ir didesnius skaičių ašies intervalus, nelengva. Yra milijonai pirminių skaičių, turinčių lygiai 100 skaitmenų, bet kol kas nė vienas toks skaičius neaptiktas. Dabar tarp žinomų pirminių skaičių rekordiškai didžiausias yra skaičius $2^{11213} - 1$. Jis turi apie 3 376 skaitmenis. Šį skaičių 1963 metais atrado, padedant ESM, Donaldas B. Džilis. Iki tol, kol buvo išrastos šiuolaikinės greitos ESM, šešiaženkliams ar septyniaženkliams skaičiams patikrinti reikėdavo kelių varginančio skaičiavimo savaičių. Oileris vienąkart pareiškė, kad skaičius 1 000 009 pirminis, bet vėliau nustatė, kad jis yra dviejų pirminių skaičių 293 ir 3 413 sandauga. Anais laikais tai buvo žymus laimėjimas, kartu turint galvoje, kad Oileris turėjo virš 70 metų ir tuo metu apako. Viename laiške Pjeras Ferma buvo paklaustas, ar skaičius 100 895 598 169 pirminis Atsakydamas Ferma laiške rašė, kad šis skaičius išskaidomas pirminių dauginamųjų 898 423 ir 112 303 sandauga. Panašūs rezultatai leidžia manyti, kad senieji meistrai galėjo žinoti kažkokį būdą, kurį taikant, galima lengvai skaidyti skaičius dauginamaisiais. 1874 metais V. Stenlis Dževonsas klausė savo knygoje „Mokslo pagrindai": „Ar gali skaitytojas pasakyti, kokių dviejų skaičių sandauga yra 8 616 460 799? Manau, kad vargu ar kas nors, išskyrus mane, sugebės atsakyti į šį klausimą, nes tai

du dideli pirminiai skaičiai". Dževonsui, „loginio pianino" išradėjui, nereikėjo taip neapdairiai daryti išvadas apie būsimų skaičiavimo mašinų veikimo greitį. Mūsų laikas ESM gali rasti abu skaičius (96 079 ir 89 681) greičiau, negu jis galėtų juos sudauginti.

2^{p-1} pavidalo skaičiai (čia p — pirminis skaičius) vadinami Merseno skaičiais. Jis pirmasis pastebėjo, kad tarp tokių skaičių daug pirminių. Beveik 200 metų matematikai manė, kad Merseno skaičius 2^{67}—1 pirminis. Erikas Temrilis Belas savo knygoje „Matematika — mokslų karalienė ir tarnaitė" pasakoja apie Amerikos matematikų draugijos posėdį, įvykusį 1903 metų spalio mėn. Niujorke, kuriame padarė pranešimą profesorius Koulas. „Koulas, nekalbus žmogus,— rašė Belas,— priėjo prie lentos ir, netaręs nė žodžio, ėmė 2 kelti 67-uoju laipsniu. Paskui jis iš gauto skaičiaus atėmė 1 ir, kaip pirma nesakydamas nė žodžio, švarioje lentos dalyje stulpeliu sudaugino du skaičius: 193 707 721×761 838 257 287. Abu rezultatai sutapo...". Pirmą kartą Amerikos matematikų draugijos istorijoje jos nariai audringais aplodismentais sveikino pranešėją. Koulas, taip ir nepratarąs nė žodžio, atsisėdo į vietą. „Niekas jam nepateikė nė vieno klausimo." Po kelerių metų Belas paklausė Koulą, kiek laiko jis sugaišo, skaidydamas skaičių dauginamaisiais. „Visus trejų metų sekmadienius",— atsakė Koulas.

Henris E. Djudenis dar 1907 metais pažymėjo, kad 11 — vienintelis žinomų pirminių skaičių, kurį sudaro vien tik vienetai. (Skaičius, kurį sudaro bet koks kitas pasikartojantis skaitmuo, aišku, sudėtinis.) Djudenis sugebėjo įrodyti, kad visi skaičiai, kuriuos sudaro 3, 4,..., 18 vienetų, sudėtiniai. Djudenis susidomėjo, ar yra didesnių negu 18-ženkliai pirminių skaičių, kuriuos sudaro vien tik vienetai. Atsakymą į šį klausimą surado vienas Djudenio skaitytojų: jis įrodė, kad 19-ženklis skaičius 1 111 111 111 111 111 111 — pirminis. Vėliau buvo įrodyta, kad skaičius, parašytas 23 vienetais, taip pat pirminis. Atsakymai į daugelį klausimų, susijusių su „vienetiniais" skaičiais, nežinomi iki šiol. Niekas nežino, ar tarp jų yra be galo daug pirminių skaičių ir net ar iš viso yra ketvirtas pirminis skaičius, parašytas vien tik vienetais. Artimiausią kandidatą į pirminius skaičius sudaro 47 vienetai (skaičiai iš 29, 31, 37, 41, 43, 53, 61 ir 73 vienetų — sudėtiniai).

67	1	43
13	37	61
31	73	7

206 pav. Magiškasis kvadratas iš pirminių skaičių su minimalia konstanta

Ar galima sukonstruoti magiškąjį kvadratą vien tik iš pirminių skaičių? Pasirodo, galima. Pirmasis tą padarė Djudenis. Toks kvadratas parodytas 206 paveiksle. Jo konstanta lygi 111, tai mažiausia konstantų magiškiesiems kvadratams, sudarytiems iš pirminių skaičių. Tačiau pirminiai skaičiai Djudenio atrastame kvadrate — ne iš eilės einantys skaičiai. Kyla klausimas: ar galima sudaryti kvadratą iš paeiliui einančių nelyginių pirminių skaičių? (Vienintelio lyginio pirminio skaičiaus negalima įrašyti nė į vieną magiškąjį kvadratą, nes skaičių, stovinčių toje skiltyje arba toje eilutėje, kurių susikirtime yra 2, sumos lyginimas skirtųsi nuo sumos skaičių, stovinčių visose kitose eilutėse ir skiltyse, dėl to kvadratas nebūtų magiškasis.) 1913 metais Dž. N. Mansis įrodė, kad lyginių pirminių skaičių turi būti 12 eilės. Šis įdomus rezultatas taip mažai žinomas, kad nusprendžiau jį pakartoti 207 paveiksle. Jo langeliuose išdėstyti 144 pirmieji pirminiai skaičiai. Šio magiškojo kvadrato konstanta (bet kurios eilutės, skilties ar įstrižainės skaičių suma) lygi 4 514.

Tuo baigsime pirmąją pažintį su pirminiais skaičiais. Skaitytojas galės patikrinti savo žinias, atsakęs į tokius elementarius klausimus:

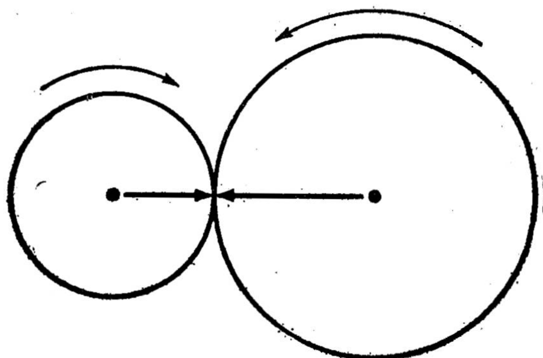
1. Nurodykite keturis pirminius skaičius tarp tokių šešių skaičių:

10 001
14 159
76 543
77 377
123 456 789
909 090 909 090 909 090 909 090 909 090

(P a s t a b a: antrasis skaičius yra pirmieji penki skaičiaus π skaitmenys po kablelio.)

1	823	821	809	811	797	19	29	313	31	23	37
89	83	211	79	641	631	619	709	617	53	43	739
97	227	103	107	193	557	719	727	607	139	757	281
223	653	499	197	109	113	563	479	173	761	587	157
367	379	521	383	241	467	257	263	269	167	601	599
349	359	353	647	389	331	317	311	409	307	293	449
503	523	233	337	547	397	421	17	401	271	431	433
229	491	373	487	461	251	443	463	137	439	457	283
509	199	73	541	347	191	181	569	577	571	163	593
661	101	643	239	691	701	127	131	179	613	277	151
659	673	677	683	71	67	61	47	59	743	733	41
827	3	7	5	13	11	787	769	773	419	149	751

207 pav. Mažiausias magiškųjų kvadratų, sudarytas iš paeiliui einančių nelyginių pirminių skaičių



208 pav. Uždavinys apie du krumpliaračius

2. Du krumpliaračiai, ant kurių nupiešta po rodyklę, užima padėtį, pavaizduotą 208 paveiksle. Mažasis krumpliaratis sukasi laikrodžio rodyklės kryptimi tol, kol rodyklės sutampa ant abiejų krumpliaračių. Didžiojo krumpliaračio krumplių skaičius lygus 181. Kiek apsisukimų suspės padaryti mažasis krumpliaratis iki to laiko, kai rodyklės sutaps?

3. Iš devynių skaitmenų nuo 1 iki 9 sudarykite tris pirminius skaičius taip, kad jų suma būtų minimali. Kiekvieną skaitmenį galima panaudoti vieną ir tik vieną kartą. Pavyzdžiui, skaičiai 941, 827 ir 653 — pirminiai ir patenkina paskutinį reikalavimą, bet jų suma (2421) neminimali.

4. Raskite sudėtinį skaičių:

31, 331, 3331, 33 331, 333 331, 3 333 331, 3 3 33 3 331, 333 333 331.

5. Raskite milijono vienetų ilgio skaičių ašies atkarpą, neturinčią nė vieno pirminio skaičiaus.

ATSAKYMAI

1. Sudėtiniai yra skaičiai 10 001 (lygus dviejų pirminių skaičių 73 ir 137 sandaugai) ir 123 456 789, kuris dalijasi iš 3. Visi kiti skaičiai — pirminiai.

2. Du sukabinti krumpliaračiai negali grįžti į pradinę padėtį tol, kol pro lietimosi tašką nepraeis tam tikras abiejų krumpliaračių krumplių skaičius k. Skaičius k yra bendras mažiausias kiekvieno krumpliaračių krumplių skaičiaus kartotinis. Sakykim, n — mažesniojo krumpliaračio krumplių skaičius. Iš uždavinio sąlygos žinoma, kad didysis krumpliaratis turi 181 krumplį. Kadangi skaičius 181 — pirminis, skaičių 181 ir n — bendras mažiausias kartotinis lygus $181n$. Vadinasi, prieš sutampant abiejų krumpliaračių rodyklėms, mažesnysis krumpliaratis spės apsisukti 181 kartą.

3. Kaip iš skaitmenų nuo 1 iki 9 sudaryti tris pirminius skaičius, kurių suma būtų mažiausia? Iš pradžių pamė-

ginsime sudaryti tris triženklius pirminius skaičius. Jų paskutinieji skaitmenys gali būti tik 1, 3, 7 ir 9 (šis teiginys teisingas visiems pirminiams skaičiams, pradedant 7). Pasirinksime 3, 7 ir 9, tuomet vienetas galės būti pirmas skaitmuo. Kad pirmieji skaičių skaitmenys būtų kuo mažesni, juos reikia parinkti iš skaitmenų 1, 2 ir 4. Taigi 5, 6 ir 8 lieka triženklio skaičiaus vidurinis skaitmuo. Tarp 11 triženklių skaičių, patenkinančių skaitmenų parinkimą, bet kurie trys būtinai turės bent vieną pasikartojantį skaitmenį. Vadinasi, reikia pamėginti pirmuosius skaitmenis parinkti iš 1, 2, 5. Šiuo atveju atsakymas pasirodo vienareikšmis:

$$\begin{array}{r} 149 \\ 263 \\ \underline{587} \\ 999 \end{array}$$

4. Paskutinysis skaičius 333 333 331 dalijasi iš 17.

5. Skaičių ašyje nesunku sudaryti kokį norima didelį intervalą, neturintį nė vieno pirminio skaičiaus. Sakykime, kad mums reikia rasti 1 000 000 iš eilės einančių sveikųjų skaičių, tarp kurių nėra nė vieno pirminio skaičiaus. Pirmiausia išnagrinėsime skaičių 1 000 001! (šauktukas reiškia „faktorialą" — sandaugą 1×2×3×... ×1 000 001). Ieškomo intervalo skaičiumi parinksime skaičių 1 000 001!+2. Žinome, kad skaičius 100 000! dalijasi iš 2 (dvejetas į jį įeina kaip dauginamasis), antrasis dėmuo (lygus 2) taip pat dalijasi iš 2, vadinasi, ir suma — skaičius 1 000 001!+2 — dalijasi iš 2. Toliau eina skaičius 1 000 001!+3. Trejetas — vienas dauginamųjų, į kuriuos pagal faktorialo apibrėžimą išsiskaido skaičius 1 000 001!, vadinasi, 1 000 001! dalijasi iš 3. Iš čia išplaukia, kad ir 1 000 001!+3 taip pat dalijasi iš 3. Analogiškais samprotavimais parodome, kad visi kiti skaičiai intervale nuo 1 000 001!+4 iki 1000 001!+1 000 001 yra sudėtiniai. Taip sudaryta milijono vienetų ilgio skaičių eilutės atkarpa, neturinti nė vieno pirminio skaičiaus. Ar galimas milijonas mažesnių iš eilės einančių skaičių, tarp kurių taip pat nėra nė vieno pirminio? Taip, galimas. Tokiai atkarpai sudaryti pakanka iš 1 000 001! atimti iš eilės einančius skaičius **2**, 3 ir t. t. tol, kol prieisime 1 000 001! — — 1 000 001.

XXXV skyrius

Plokštieji grafai

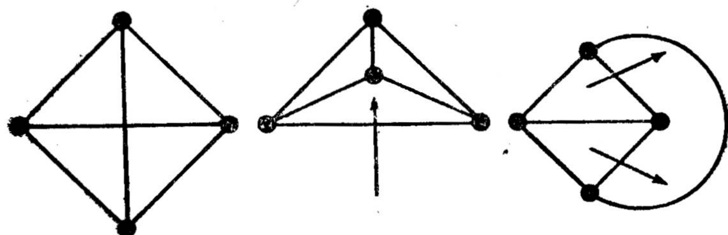
Inžinierius braižo elektrinių grandinių schemas. Chemikas piešia struktūrines formules, norėdamas parodyti, kaip sudėtingoje molekulėje valentingumo ryšiais vienas su kitu susijungia atomai. Istorikas seka giminystės ryšius pagal genealoginį medį. Karvedys žemėlapyje pasižymi komunikacijų, kuriomis iš užnugario priešakiniams daliniams eina pastiprinimai, tinklą. Sociologas sudėtingiausioje diagramoje vaizduoja, kaip vienas kitam pavaldūs atskiri vienos didžiulės korporacijos skyriai.

Kas bendra visuose tuose pavyzdžiuose? Kiekviename jų yra schema, sudaryta iš taškų (jie reiškia elektrinės grandinės atsišakojimus, atomus, žmones, miestus ir t. t.), kurie vienas su kitu sujungti linijomis. Ketvirtajame dešimtmetyje vokiečių matematikas Dene Kenigas pirmasis atliko sisteminius panašių schemų tyrimus ir davė joms apibendrintą pavadinimą „grafai“. Grafų teorija šiuo metu labai klesti. Paprastai ji priskiriama topologijai (nes daugeliu atvejų nagrinėjamos tik topologinės grafų savybės), tačiau ji kertasi su dauguma aibių teorijos, kombinatorikos, algebros, geometrijos, matricų teorijos, lošimų teorijos, matematinės logikos ir daugelio kitų matematikos disciplinų skyrių.

Pirmoji Kenigo knyga apie grafus išėjo Leipcige 1936 metais. 1962 metais Anglijoje buvo išleista prancūzų matematiko Klodo Beržo knyga „Grafų teorija ir jos pritaikymai“.* 1963 metais išėjo nedidelė Oisteno Ore ** brošiūra, kurioje puikiausiai buvo išdėstytas elementarus įvadas į grafų teoriją. Abi knygos, be abejo, naudingos ir prieinamos įdomiosios matematikos mėgėjams. Šimtai žinomų galvosūkių, iš pirmo žvilgsnio nieko bendra neturinčių vienas su kitu, lengvai išsprendžiami, remiantis grafų teorija. Šiame skyriuje bus kalbama apie „plokščiuosius grafus“ ir apie kai kuriuos įdomiausius galvosūkius, susijusius su tais grafais.

---

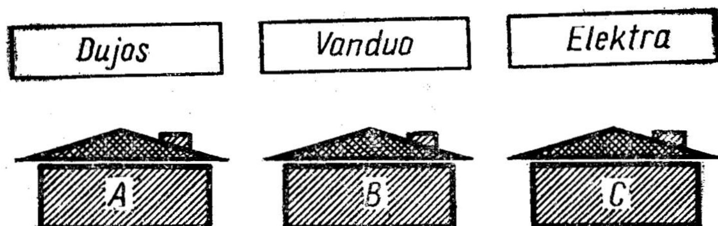
* К. Берж. Теория графов и её применения. М., ИЛ, 1962.
** О. Оре. Графы и их применение. М., изд-во «Мир», 1965.



209 pav. Trys pilno grafo su keturiomis viršūnėmis išbraižymo būdai

Plokščiuoju grafu vadinama aibė taškų (viršūnių), kurie tarpusavyje sujungti linijomis (briaunomis) taip, kad jokios dvi plokštumoje nupiešto grafo briaunos nesusikerta. Įsivaizduokite, kad grafo briaunos — elastingi siūlai, kuriuos galima bet kaip išlenkti, ištempti ir sutrumpinti. Ar bus plokščiasis grafas figūra, pavaizduota 209 paveiksle, kairėje? (Visos keturios viršūnės pažymėtos skrituliukais. Dviejų kvadrato įstrižainių susikirtimo taškas nelaikomas viršūne: toje vietoje viena linija praeina po kita.) Taip, paveiksle vaizduojama figūra priklauso plokštiesiems grafams, nes minėtą susikirtimo tašką galima lengvai likviduoti, pakeitus vienos viršūnės padėtį, taip, kaip parodyta 209 paveikslo centre, arba ištempus kurią nors briauną, kaip parodyta to paties paveikslo dešinėje. Visi trys 209 paveikslo grafai „izomorfiški", t. y. išreiškią tris skirtingus vieno ir to paties grafo vaizdavimo būdus. Bet kurio daugiasienio, pavyzdžiui kubo, briaunos taip pat sudaro plokščiąjį grafą, nes daugiasienio karkasą visada galima ištempti ir tuo išvengti susikirtimo taškų. Tetraedro karkasas yra izomorfiškas bet kuriam trijų grafų, vaizduojamų 209 paveiksle.

Ne visada lengva suprasti, ar duotasis grafas yra plokščiasis. Atkreipsime dėmesį į vieną seniausių topologijos uždavinių, kurio ypač ilgai niekas negalėjo išspręsti ir kuris kėlė nerimą galvosūkių mėgėjams (210 pav.). Paliksime tą pačią to uždavinio formuluotę, kurią jau 1917 metais pateikė Henris E. Djudenis. Nuo to laiko jis žinomas kaip „uždavinys apie aprūpinimą elektra, dujomis ir vandeniu". Į kiekvieną trijų namų, vaizduojamų 210 paveiksle, reikia įvesti dujas, šviesą ir vandenį.



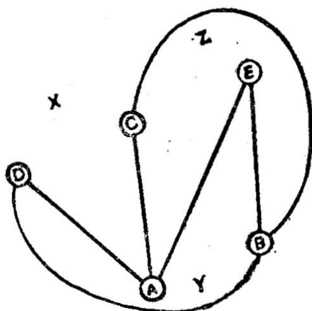
210 pav. Uždavinys apie aprūpinimą elektra, dujomis ir vandeniu

Ar galima komunikacijas pravesti taip, kad jos, niekur tarpusavyje nesusikirsdamos, kiekvieną namą sujungtų su elektros, dujų ir vandens šaltiniais? Kitaip sakant, ar galima sudaryti plokščiąjį grafą su viršūnėmis šešiuose nurodytuose taškuose?

Pasirodo, tokio grafo sudaryti negalima. Tuo įsitikinti nesunku. Tarkime, jog komunikacijas reikia nutiesti tik į namus *A* ir *B*. Kad jos niekur nesikirstų, padalykite plokštumą į tris dalis, pavyzdžiui taip, kaip parodyta 211 paveiksle. Piešti tiksliai tokios pačios schemos nereikia, tačiau kad ir kaip jungtume viršūnes, jūsų grafas bus izomorfiškas grafui, vaizduojamam paveiksle. Namas *B*, vadinasi, patenka į vieną trijų sričių. Patekęs į sritį *x*, jis liko be šviesos. Būdamas srityje *Y*, jis neturės vandens. Srityje *Z* jam bus nutrauktas dujų tiekimas. Visa, kas pasakyta, galioja ir tada, kai grafas nubrėžtas ant sferos paviršiaus, tačiau yra paviršių, kuriuose situacija kitokia. Tai, pavyzdžiui, riestainio paviršius: ant jo visai nesunku nubrėžti grafą, kurio briaunos susikerta tik šešiose viršūnėse.

Grafas vadinamas pilnu, jeigu kiekviena jo viršūnių pora tarpusavyje sujungta. Iš 209 paveikslo matyti, jog pilnas grafas su keturiomis viršūnėmis yra plokščias. Ar gali būti plokščiasis pilnas grafas su penkiomis viršūnėmis? Pasirodo, negali; įrodyti tokį tvirtinimą labai paprasta, ir skaitytojas tai gali pamėginti atlikti savarankiškai. Tai, kad pilnas grafas gali būti plokščiasis tik tada, kai jo viršūnės keturios arba mažiau, įdomu ir filosofiniu požiūriu. Daugelis filosofų ir matematikų mėgino atsakyti į klausimą, kodėl fizinė erdvė yra trijų ma-

tavimų.* Anglų kosmologijos specialistas H. Dž. Vitrou knygoje „visatos struktūra ir evoliucija“ ** tvirtina, kad protas negalėtų atsirasti erdvėje, turinčioje daugiau kaip tris matavimus, nes didesnio matavimų skaičiaus erdvėse planetos negali judėti apie Saulę stacionarinėmis orbitomis. O kokie reikalai vienmatėse ir dvimatėse erdvėse? Vitrou mano, kad grafų teorija galima įrodyti, jog negali egzistuoti protingi lainlandai ir flatlandai, apie kuriuos jau pasakojome 17 skyriuje. Smegenys yra sudarytos iš milžiniško skaičiaus nervinių ląstelių (atitinkančių grafų viršūnes), poromis susijungusių nervų skaidulomis (grafo briaunomis), kurios niekur viena su kita nesusikerta. Trimatė erdvė neapriboja nervinių ląstelių, patenkinančių tas sąlygas, skaičiaus, o Flatlandijoje maksimalus skaičius tokių ląstelių, kaip jau matėme, būtų lygus keturiems.



211 pav. Įrodymas, kad uždavinys apie aprūpinimą elektra, dujomis ir vandeniu yra neišsprendžiamas

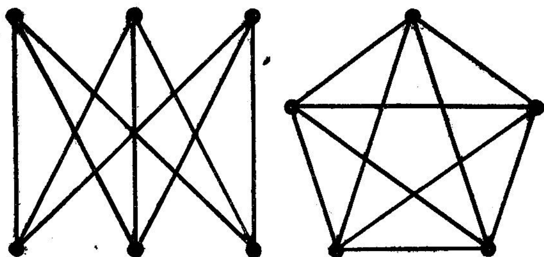
„Vadinasi,— rašo Vitrou,— radome išvadą, kad fizinės erdvės matavimų skaičius turi būti lygus trims ir nei didesnis, nei mažesnis, nes tai vienintelė sąlyga aukštosioms gyvybės formoms žemėje vystytis, iš dalies sąlyga atsirasti žmogui, *suformulavusiam uždavinį,* kurį mes ir sprendžiame.“

Apie du paprasčiausius erdvinius grafus (apie uždavinio aprūpinti elektra, dujomis ir vandeniu grafą, žinomą taip pat Tomseno grafo vardu, ir pilną grafą su penkiomis viršūnėmis) kalbama vienoje labai svarbioje — vadinamoje Kuratovskio — teoremoje (lenkų matematiko, atradusio šią teoremą, garbei). Teorema teigia, jog kiekvienas grafas, kuris nėra plokščiasis, turi vieną iš dviejų paprasčiausių erdvinių grafų pografį. Kitaip sakant,

---

* Žr., kn: А. М. Мостепаненко и М. В. Мостепаненко. Четырехмерность пространства и времени. М.-Л., изд-во «Наука», 1966.

** G. J. Witrow. The Structure and Evolution of the Universe. Harper Textbooks, 1959.

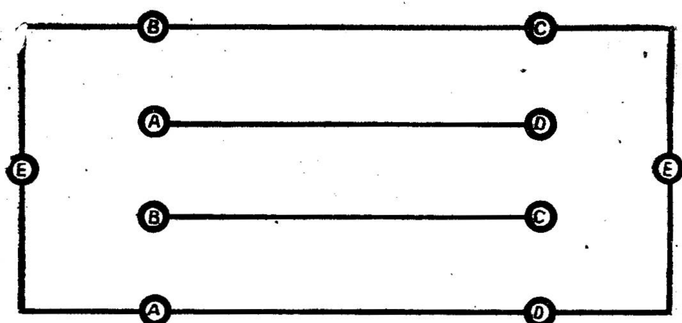


212 pav. Papras̆čiausi erdviniai grafai

brėždami išilgai kokio nors erdvinio grafo briaunos, visada galime nubrėžti bent vieną grafą, izomorfišką arba dešiniajam, arba kairiajam 212 paveiksle pavaizduotam grafui.

Inžinieriui neretai iškyla uždaviniai, kurių sprendimas traktuojamas kaip kokio nors plokščiojo grafo brėžimas. Jeigu, pavyzdžiui, spausdintoje schemoje susikerta du laidininkai, tai visai schemai, pasirodo, gresia trumpas sujungimas. Skaitytojas gali išmėginti savo jėgas, sudarydamas plokščius grafus dviejų spausdintų schemų, vaizduojamų 213 paveiksle, pavyzdžiu. Viršutinėje schemoje reikia tarpusavyje penkiomis linijomis sujungti taškus, pažymėtus vienodomis raidėmis (t. y. tašką *A* su tašku *A*, *B* su *B* ir t. t.), be to, taip, kad linijos viena su kita nesusikirstų ir neišeitų už stačiakampio ribų. Dvi linijos *AD* ir *BC* reiškia kažkokius barjerus, kurių dėl tam tikrų priežasčių negalima perkirsti. Apatinėje schemoje reikia taip pat penkiomis linijomis sujungti taškus su vienodomis raidėmis, bet šį kartą kiekviena linija būtinai turi eiti tik išilgai tiesių, sudarančių tinklelį. Linijos gali susikirsti tik grafo viršūnėse. Abu nurodyti uždaviniai gana paprasti.

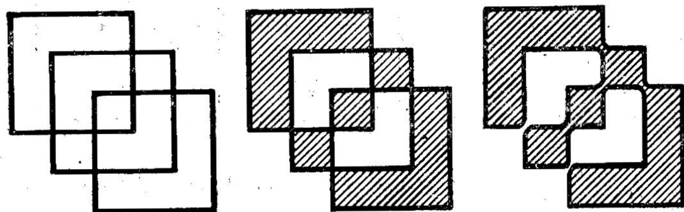
Panagrinėsime kito gerai žinomo tipo uždavinius, kuriuose reikia duotąjį plokščią grafą nubrėžti, neatitraukus pieštuko nuo popieriaus ir nebrėžiant pieštuku du kartus to paties grafo ruožo. Jeigu šiuo atveju išeina uždara linija, kuri prasideda ir baigiasi toje pačioje viršūnėje, toks grafas vadinamas Oilerio grafu, o atitinkama linija — Oilerio linija. 1736 metais Leonardas Oileris išsprendė garsųjį uždavinį apie septynis Karaliaučiaus tiltus. Uždavinyje buvo reikalaujama pereiti septynis Karaliau-



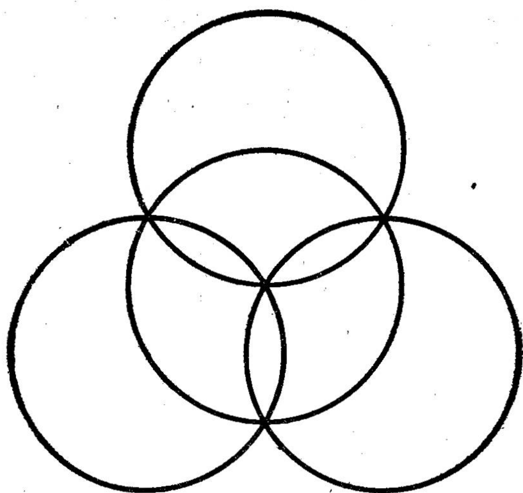
213 pav. Du uždaviniai apie spausdintas schemas

čiaus (dabar Kaliningrado) tiltus ir grįžti į pradinį tašką, per kiekvieną tiltą perėjus vieną ir tik vieną kartą. Oileris nustatė, kad šis uždavinys visiškai ekvivalentus uždaviniui apie paprasto grafo brėžimą, ir parodė (pirmajame istorijoje grafų teorijos darbe), kad jeigu grafo viršūnės lyginės (t. y. tokios, kuriose susikertančių briaunų skaičius lyginis), grafą galima apeiti vienu ciklu, nė vienos briaunos nepraeinant du kartus. Jeigu grafo dvi viršūnės nelyginės (t. y. tokios, kuriose susikertančių briaunų skaičius nelyginis), uždaras ciklas negalimas, bet už tai galima, išėjus iš vienos nelyginės viršūnės, apeiti visą grafą ir grįžti į antrąją nelyginę viršūnę. Jeigu nelyginių viršūnių skaičius lygus $2k$ (o yra teorema, pagal kurią nelyginių viršūnių skaičius visada lyginis), grafą galima apeiti išilgai k atskirų kreivių, kurių kiekviena prasideda ir baigiasi nelyginėse viršūnėse. Grafas uždavinyje apie Karaliaučiaus tiltus turi keturias nelygines viršūnes, todėl reikia mažiausiai dviejų kreivių (nė viena iš jų nebus uždaras ciklas), norint apeiti visas grafo briaunas.

Bet kurį Oilerio grafą galima apeiti išilgai Oilerio linijos, t. y. išilgai kreivės, kuri praeina grafo briauna ir niekur nekerta pati savęs. Luiso Kerolio biografijoje, kurią parašė jo giminaitis, kalbama apie tai, jog Kerolis labai mėgo mažoms mergaitėms duoti galvosūkį, pavaizduotą 214 paveiksle: grafą, vaizduojamą to paveikslo kairėje, reikėdavo apvesti, neatitraukus pieštuko nuo popieriaus ir nebrėžiant per vieną ir tą pačią briauną du kartus (kitaip sakant, reikėjo nubrėžti šio grafo Oilerio liniją). Tariant, kad linijos susikerta, uždavinį išspręsti paprasta. Sprendimas gerokai pasunkėja, kai linijų susikirtimas draudžiamas. Panašūs uždaviniai greit sprendžiami, remiantis Tomo O'Beirno iš Edinburgo pasiūlytu metodu. Nuspalvinus brėžinį taip, kaip parodyta 214 paveikslo



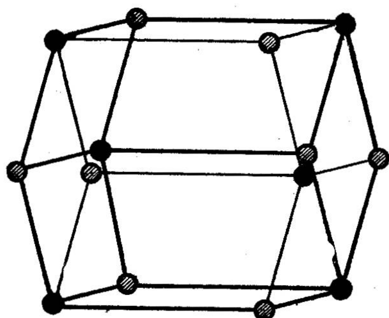
214 pav. Luiso Kerolio uždavinys apie tris kvadratus



215 pav. O'Beirno uždavinys apie keturis apskritimus

centre, grafą kai kuriuose viršūnėse reikia perkirsti taip, kad nuspalvintoji dalis būtų „vientisa" (pabrėšime, jog vientisa turi būti nuspalvintoji sritis, o ne sritis, gauta, prijungus prie jos nenuspalvintus plotelius). Tuomet nuspalvintos srities perimetras ir bus ieškomoji Oilerio linija (214 pav., dešinėje). Pritaikę nurodytą metodą grafui, vaizduojamam 215 paveiksle (jį sugalvojo O'Beirnas) pamatysite, kaip nuostabiai simetriška bus gautoji Oilerio linija.

Yra dar viena uždavinių, susijusių su kelione išilgai grafų, rūšis. Jie visiškai nepanašūs į tuos, kuriuos iki šiol nagrinėjome, ir, kaip nekeista, gerokai sudėtingesni. Kalbama apie uždavinius, kuriuose reikia rasti kelią, einantį išilgai kiekvienos grafo briaunos vieną ir tik vieną kartą. Linija, kuri nė per vieną viršūnę nepraeina daugiau kaip vieną kartą, vadinama lanku. Lankas, kuris prasideda ir baigiasi viename ir tame pačiame taške, vadinamas ciklu. Savo ruožtu ciklas, einantis per kiekvieną viršūnę vieną ir tik vieną kartą, vadinamas Hamiltono linija (Viljamo Roueno Hamiltono, įžymaus praeito amžiaus airių matematiko, kuris pirmasis pradėjo nagrinėti tokias linijas, garbei). Hamiltonas įrodė, kad išilgai bet

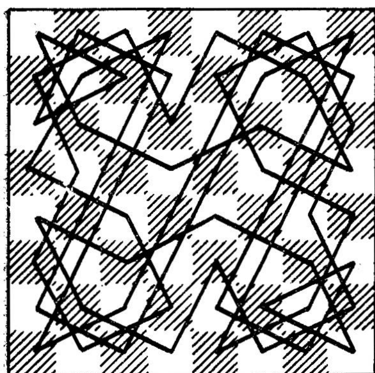
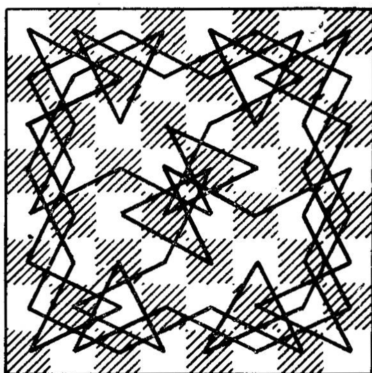
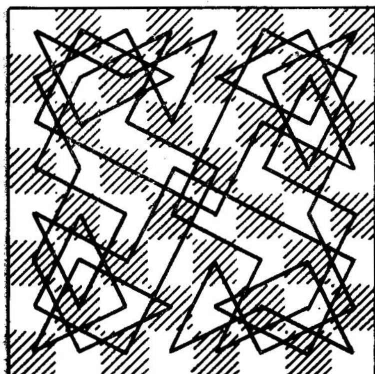
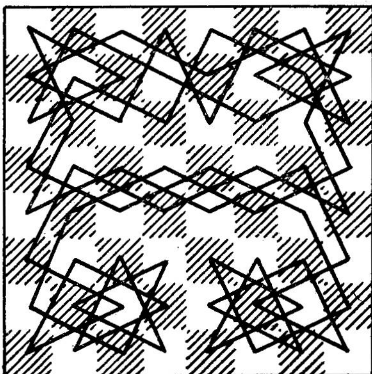


216 pav. Rombinio dodekaedro karkasas

kokio penkių taisyklingų briaunainių sienų kraštinių (briaunų) galima nutiesti kelią, kuris bus Hamiltono linija. Jis net žaislų fabrikui sukūrė vieną galvosūkį, kurio esmę sudarė Hamiltono linijų, einančių išilgai dodekaedro briaunų, radimas.

Iš pirmo žvilgsnio gali atrodyti, kad, analogiškai uždaviniui apie Oilerio linijas, čia taip pat turi būti paprastos taisyklės nustatyti, ar duotas grafas priklauso Hamiltono grafams, ar ne. Vis dėlto tuodu uždaviniai nelauktai pasirodo esą visiškai skirtingi. Oilerio linija turi eiti kiekviena briauna vieną ir tik vieną kartą, bet už tai ji kiek norint kartų gali eiti per bet kurią viršūnę. Hamiltono linija, atvirkščiai, turi vieną ir tik vieną kartą eiti per kiekvieną viršūnę, tačiau ji visai nebūtinai turi eiti išilgai kiekvienos briaunos (kiekvienoje viršūnėje ji eina lygiai dviem briaunom prie tos viršūnės). Daugelyje sričių, iš pirmo žvilgsnio nieko bendra neturinčių su Hamiltono linijomis, pastarosios vis dėlto yra labai svarbios. Nustatant, pavyzdžiui, tinkamiausią kurios nors operacijų serijos atlikimo tvarką, jas kai kada galima įsivaizduoti kaip grafą, ir tuomet bet kuri Hamiltono linija bus ieškomas optimalus sprendinys. Gaila, bet kol kas dar nerastas bendras kriterijus, kuriuo remiantis būtų galima nustatyti, ar duotas grafas yra Hamiltono grafas, ir jeigu taip, tai kaip jame rasti visas Hamiltono linijas.

Daugelio (bet ne visų) taisyklingų briaunainių karkasai sudaro Hamiltono grafus. Išimtį sudaro rombinis dodekaedras (216 pav.), kurio formą neretai turi granato kristalai. Net ir nepaisant trejektorijų uždarumo, jums vis tiek nepavyks apeiti visų to briaunainio viršūnių, pabuvojus kiekvienoje tik po vieną kartą. Šį faktą, kurį jūs tuojau sužinosite, pirmasis sąmojingai įrodė Kokseteris. 216 paveiksle juodais skrituliukais pažymėtos visos viršūnės, kurių laipsnis 4, o subrūkšniuoti skrituliukai žymi

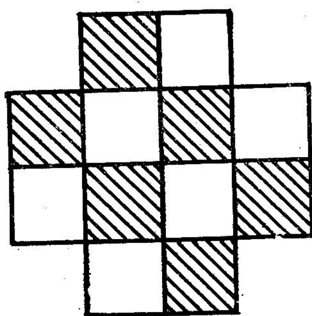
217 pav. Uždavinio, kuriame reikia žirgu apeiti visus šachmatų lentos laukelius, kai kurie sprendiniai

viršūnes, kurių laipsnis 3. Pastebėsime, jog kiekvieną subrūkšniuotą viršūnę iš visų pusių supa juodi skrituliukai, ir, atvirkščiai, kiekvieną juodą skrituliuką supa subrūkšniuotieji. Todėl kiekviename kelyje, einančiame per visas keturiolika viršūnių, juodi ir subrūkšniuoti skrituliukai turi eiti pakaitomis. Tačiau juodi skrituliukai šeši, o subrūkšniuoti — aštuoni! Taigi nėra nė vieno kelio (uždaro ar neuždaro), kuriame skirtingų spalvų skrituliukai eitų pakaitomis.

Išnagrinėsime vieną senovišką šachmatų uždavinį, kuris iš pirmo žvilgsnio neturi nieko bendra su Hamiltono

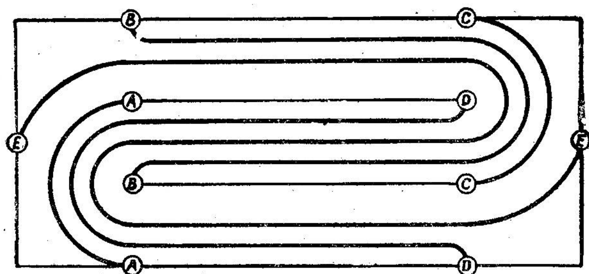
grafais. Sakykime, žirgas yra bet kuriame šachmatų lentos laukelyje. Reikia rasti nenutrūkstančią trajektoriją, kuria eidamas, žirgas po vieną kartą pabuvotų kiekviename lentos langelyje ir grįžtų į pradinį laukelį. Kiekvieną langelį pažymėkime tašku, o kiekvieną žirgo ėjimą — linija, jungiančia tuos taškus. Tai atlikę, suprantama, gausime grafą. Bet kuris ciklas, einantis per kiekvieną viršūnę vieną ir tik vieną kartą, bus Hamiltono linija, o kiekviena tokia linija ir yra ieškomoji žirgo ėjimų trajektorija.

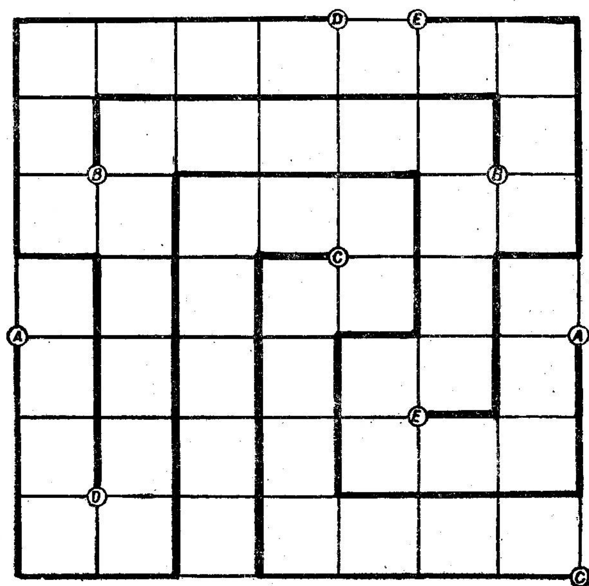
Jeigu lentoje būtų nelyginis skaičius langelių, uždavinys būtų neišsprendžiamas. (Pabandykite suvokti, kodėl.) Jeigu langelių skaičius lyginis, bet kokioje stačiakampėje lentoje, kurios vienoje kraštinėje yra penki ar daugiau langelių, mus dominanti trajektorija galima. Vadinasi, visų mažiausia stačiakampė lenta, kurioje galima apeiti žirgu uždarą trajektoriją, yra 5×6 matmenų, o visų mažiausio kvadrato matmenys 6×6. Yra milijonai įvairių uždarų kelių, kuriais galima apeiti žirgu visus paprastos 8×8 šachmatų lentos langelius. Tuo klausimu yra nemaža literatūros, bet visų kelių niekas nesuskaičiavo. Paprastai tiriamos tik tos trajektorijos, kurioms būdingos visokios įdomios simetrijos savybės. Atrasta tūkstančiai gražiausių raštų, panašių į tuos, kurie parodyti 217 paveiksle. 8×8 lentoje nėra trajektorijų, kurioms būdinga ketvirtosios eilės simetrija (t. y., kurios nekeistų savo išvaizdos bet kiek kartų pasukus 90° kampu), bet kvadratinėje 6×6 lentoje galima rasti net penkias tokias trajektorijas.



218 pav. Kaip žirgo ėjimais apeiti visus tokios lentos langelius

Siūlau skaitytojams išspręsti vieną uždavinį, kuris gali būti kaip įvadas į tą klasikinę įdomiosios matematikos sritį. Žirgu reikia apeiti visus dvylika paprastos lentos, vaizduojamos 218 paveiksle, langelių, kiekviename pabuvojant tik po vieną kartą. Pradėti ir baigti galima bet kuriuo langeliu, tik būtinai tuo pačiu. Sudarę sprendinį, pabandykite atsakyti dar į vieną klausimą, kuris jums pasirodys sun-





219 pav. Uždavinio apie dvi spausdintas schemas sprendiniai

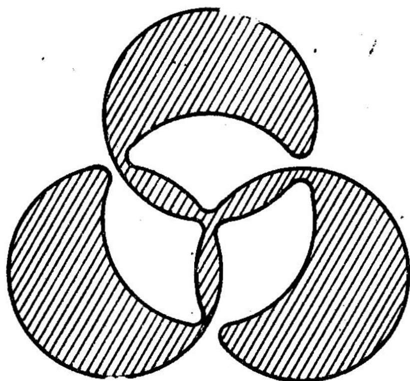
kesnis. Žirgas toje lentoje gali padaryti šešiolika skirtingų ėjimų. Ar galima iš jų sudaryti nenutrūkstamą grandinę, kuri eitų per visus mūsų dvylikos langelių lentos laukelius, ir taip, kad nė vienas ėjimas nepasikartotų? Sakysime, kad ėjimas padarytas, jeigu žirgas peršoko bet kuria

kryptimi iš vieno langelio į kitą. Suprantama, žirgas gali pabuvoti viename ir tame pačiame langelyje keletą kartų; ir jam visiškai nebūtina kelią baigti tame pačiame langelyje, nuo kurio jis pradėjo ėjimus. Tik negalima daryti to paties ėjimo du kartus.

Tuo, kad uždavinys neišsprendžiamas, įsitikinsite gana greit, bet tuomet kyla kitas klausimas: kam lygus mažiausias skaičius atskirų linijų, kurias galima sudaryti iš visų 16 žirgo ėjimų? Atsakyti į šį klausimą jums pakaks kelių minučių, jei pasinaudosite viena grafų teoremų, kuri buvo minėta šiame skyriuje.

ATSAKYMAI

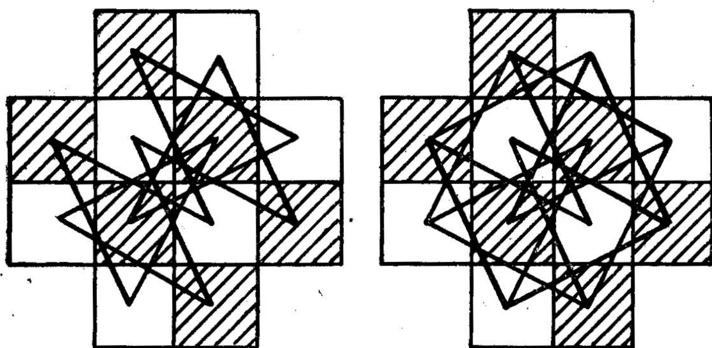
Abiejų uždavinių su spausdintomis schemomis sprendiniai parodyti 219 paveiksle. Pritaikę uždaviniui apie keturis apskritimus dviejų spalvų metodą, gausite simetrišką Oilerio liniją, neturinčią susikirtimo taškų (220 pav.). 221 paveikslo kairėje parodyta seka ėjimų, kuriuos turi daryti žirgas, kad, pabuvojęs po vieną kartą kiekviename kryžiaus pavidalo lentos langelyje, sugrįžtų į pradinį laukelį. Pažiūrėsime, ar yra bent viena uždara linija, sudaryta iš visų 16 žirgo ėjimų ir, be to, einanti per visus lentos langelius. Pirmiausia nubrėšime grafą, kuriame būtų matomas kiekvienas žirgo ėjimas (221 pav., dešinėje).



220 pav. Uždavinio apie keturis apskritimus sprendimas

Pastebėsime, kad aštuoniose viršūnėse susikertančių briaunų skaičius nelyginis. Tuomet pagal vieną Oilerio teoremą tam, kad žirgas praeitų išilgai to grafo kiekvienos briaunos vieną ir tik vieną kartą, jo kelias turi būti sudarytas mažiausiai iš $\frac{8}{2}$ (t. y. iš 4) atskirų linijų, kurių kiekviena išeina iš vienos nelyginės viršūnės ir įeina į kitą.

Įrodysime dabar, kad, kai lenta sudaryta iš nely-



221 pav. Uždavinio apie visų kryžiaus pavidalo lentos langelių apėjimą žirgo ėjimu (kairėje) ir apie laužtes, sudarytas iš 16 žirgo ėjimų (dešinėje), sprendimo grafai

ginio skaičiaus langelių, žirgas negali apeiti jų visų po vieną kartą ir grįžti į pradinę vietą. Įrodymui nuspalvinsime lentos langelius šachmatine tvarka. Po kiekvieno ėjimo žirgas turi atsidurti kitos spalvos laukelyje, todėl jei jo kelias uždaras, jis turi praeiti per vienodą skaičių tamsių ir šviesių langelių.

Lentoje, sudarytoje iš nelyginio langelių skaičiaus, nepriklausomai nuo jos formos tamsių ir šviesių langelių skaičius nevienodas.

XXXVI skyrius

Nedešimtainės skaičiavimo sistemos

Yra antropologų, trokštančių sugretinti žmonijos ir matematikos vystymosi kelius. Remdamiesi tuo, kad ankstyvojoje vystymosi stadijoje įvairios tautos naudojosi skirtingomis skaičiavimo sistemomis, jie teigs, jog aritmeti-

kos dėsniai taip pat keičiasi, keičiantis kultūroms. O iš tikrųjų bet kurios skaičiavimo sistemos pagrindas, aišku, ta pati senutė — aritmetika, o įvairios skaičiavimo sistemos yra ne kas kita, kaip įvairios kalbos, t. y. skirtingai vadinami, žymimi ir naudojami *tie patys skaičiai.* Du plius du visuomet lygu keturiems, o teisingai išversti iš vienos kalbos į kitą galima visais atvejais.

Bet kuris sveikasis skaičius, išskyrus nulį, gali būti vienos skaičiavimo sistemų pagrindas. Paprasčiausios skaičiavimo sistemos pagrindas yra vienetas; šioje sistemoje operuojama vieninteliu simboliu. Vienetinės sistemos taikymo pavyzdys gali būti įpjovos, kurias negyvenamos salos gyventojas daro ant medžio, norėdamas suskaičiuoti dienas, arba ant virbo sumauti rutuliukai, pagal kuriuos biliardo lošėjai skaičiuoja taškus. Dvejetainėje sistemoje naudojami du simboliai: 0 ir 1. Dabar visame pasaulyje paplitusi dešimtainė sistema turi dešimt simbolių. Juo didesnis pagrindas, juo kompaktiškiau užrašomas bet koks didelis skaičius. Skaičiui 1 000, parašytam dešimtainėje sistemoje, pereinant į dvejetainę sistemą reikės dešimties ženklų (1111101000), o vienetinėje sistemoje jis bus sudarytas jau iš 1000 ženklų. Sistemos, kurių dideli pagrindai, nepatogios tuo, kad tenka įsiminti daugiau skaitmenų ir sudaryti plačias sudėties ir daugybos lenteles.

Kartkartėmis kai kurie reformistai parodo tikrai fanatišką uolumą, mėgindami nuversti vadinamą „dešimtuko tironiją" ir skaičių 10 pakeisti kokiu nors kitu pagrindu, jų manymu, patogesniu. Visai neseniai buvo labai populiari dvyliktainė skaičiavimo sistema, kurios pagrindas lygus 12. Pagrindinis dvyliktainės sistemos pranašumas tas, kad jos pagrindas dalijasi be liekanos iš 2, 3 ir 4 (begalinė dešimtainė trupmena 0,3333... lygi $\frac{1}{3}$, dvyliktainėje sistemoje rašoma iš viso su vienu ženklu po kablelio: 0,4). Dvyliktainės sistemos šalininkų atsirado dar XVI amžiuje. Vėliau jiems pritarė tokie žymūs žmonės, kaip Herbertas Spenseris, Džonas Kvinsis Adamsas ir Džordžas Bernardas Šo. H. Dž. Velso romano „Kai miegantis prabus" herojai naudojasi dvyliktaine skaičiavimo sistema ligi pat 2 100 metų. Yra net Amerikos dvyliktainė draugija, leidžianti du periodinius leidinius: „Dvyliktainis biuletenis" („The Duodecimal Bulletin") ir

„Dvyliktainės sistemos vadovėlis" („Manual of the Dozen System"). Draugija visus „dvyliktainininkus" aprūpina specialia skaičiavimo liniuote, kurioje pagrindu paimtas skaičius 12. Pagal draugijos įstatus skaičius 10 žymimas ženklu *X* (skaitoma dek), o skaičius 11 — ženklu ε (trejetu, atspindėtu veidrodyje), kuris tariamas kaip „el". Pirmieji trys skaičiaus 12 laipsniai vadinami atitinkamai do, gro, mo; todėl, pavyzdžiui, skaičius IIIX skaitomas taip: mo-gro-do-dek. Šešioliktainės sistemos šalininkai parašė nemaža įdomių knygų. 1862 metais Džonas V. Nistromas Filadelfijoje išleido atskirą leidinį — „Projektas naujos aritmetinės ir piniginės sistemos, taip pat matų ir svorių sistemos, kurią siūloma vadinti tonaline sistema, su pagrindu, lygiu šešiolikai" („Project of a New System of Arithmetic, Weight, Measure and Coins, Proposed to be called the Tonal System, with Sixteen to the Base").

Nistromas savo „Projekte" siūlo, kad skaičiai nuo 1 iki 16 būtų vadinami en, di, taj, gou, siu, bai, ra, mi, naj, kou, chju, vaj, la, nou, faj, ton. Džozefas Boudenas, Adelfijos koledžo matematikas, tinkamiausiu pagrindu laikė taip pat skaičių 16, tačiau siūlė palikti įprastus pavadinimus skaičiams nuo 1 iki 12, o kitus keturis skaičius pavadinti tran, fron, fin, vanti. Boudeno ženklais skaičius 255 užrašomas kaip ςς. Šis simbolis skaitomas „finti-fin". *

Vargu ar kam pavyks artimiausiu metu „nuversti 10 tironiją", bet tai nekliudo matematikui kiekvieną uždavinį spręsti toje skaičiavimo sistemoje, kuri jam atrodo tinkamiausia. Sakykim, pavyzdžiui, tiriamas reiškinys nusakomas parametru, įgyjančiu iš viso dvi reikšmes. (Tokiu „reiškiniu" gali būti skaičiavimo mašinos, dirbančios pagal programą „taip-ne".) Tuomet dvejetainė sistema gali atrodyti žymiai efektyvesnė, negu dešimtainė. Lygiai taip pat uždaviniai charakterizuojami trimis dydžiais, neretai lengviausiai išsprendžiami trejetainėje sistemoje, savo pagrinde turinčioje skaičių 3.

Trejetainė sistema turi tris ženklus: 0, 1, 2. Kiekvienas skaičiaus, parašyto trejetainėje sistemoje, skaitmuo reiškia, kad jį reikia padauginti iš tam tikro 3 laipsnio, be to, kuo kairiau stovi skaitmuo, tuo aukštesnis laipsnis. Išnagrinėsime, pavyzdžiui, trejetainį skaičių 102. Dve-

* Šiuo klausimu žr. knygos J. Bowden. Special Topics in Theoretical Arithmetic, 1936, 2 skyrių.

jetas reiškia, kad jį reikia padauginti iš 3^0 (tai duoda $2 \cdot 1 = 2$), 0 reiškia „tuščią skyrių“, t. y. 3^1 nėra. Aukštesnio skyriaus vienetą reikia padauginti iš 3^2, t. y. $1 \cdot 9 = 9$. Sudėję visus tris skaičius, gausime $2 + 0 + 9 = 11$. Vienuolika — trejetainio skaičiaus 102 dešimtainis ekvivalentas. Žemiau parodyta, kaip trejetainėje sistemoje rašomi skaičiai nuo 1 iki 27. (Tarp kitko, kiniečių skaitytuvus* galima labai lengvai pritaikyti skaičiuoti trejetainėje sistemoje. Pakanka tik juos apversti ir naudotis ta dalimi, kur yra ne penki kauliukai, o tik du.)

Dešimtainiai skaičiai	Trejetainiai skaičiai			
	3^3	3^2	3^1	3^0
1				1
2				2
3			1	0
4			1	1
5			1	2
6			2	0
7			2	1
8			2	2
9		1	0	0
10		1	0	1
11		1	0	2
12		1	1	0
13		1	1	1
14		1	1	2
15		1	2	0
16		1	2	1
17		1	2	2
18		2	0	0
19		2	0	1
20		2	0	2
21		2	1	0
22		2	1	1
23		2	1	2
24		2	2	0
25		2	2	1
26		2	2	2
27	1	0	0	0

* Skaitytuvai, kurių kiekvienas virbas padalytas į dvi dalis. Ant vienos dalies uždėti penki kauliukai, o ant antros — du. — *Vert. į rusų k. past.*

Įprasčiausia situacija, kurioje išryškėja trejetainės analizės būtinumas,— tai, ko gero, svėrimas lėkštinėmis svarstyklėmis. Čia gali būti trys skirtingi atvejai: arba viena lėkštė nusvers kitą, arba atvirkščiai, arba lėkštės atsvers viena kitą. Dar 1624 metais Klodas Gasperas Baše savo įdomiosios matematikos knygos antrajame leidinyje išspausdino uždavinį. Jame reikėjo nustatyti, kokio minimalaus svarsčių skaičiaus reikia, norint pasverti bet kokį daiktą, kurio svoris lygus sveikam svarų skaičiui nuo 1 iki 40. Jeigu svarsčius galima dėti tik ant vienos svarstyklių lėkštės, pasirodo, kad jų reikia mažiausiai 6, be to, lengviausio svarsčio svoris lygus 1 svarui, o kiekvienas sekantis du kartus sunkesnis už pirmesnįjį. Kitaip tariant, gaunama eilutė, kurią sudaro iš eilės einą skaičiaus 2 laipsniai: 1, 2, 4, 8, 16, 32. O jeigu svarsčius galima dėti ant abiejų svarstyklių lėkščių, iš viso reikės tik 4 svarsčių, o jų svoriai sudarys iš eilės einančių skaičiaus 3 laipsnių eilutę: 1, 3, 9, 27.

Sakykime, turime kokį nors daiktą, sveriantį n svarų. Kokių svarsčių prireiks, norint jį pasverti? Pirmiausia skaičių n parašysime trejetainėje sistemoje. Po to pakeisime ženklus ir vietoj skaitmenų 0, 1, 2 rašysime 0, 1, -1. Tam tikslui skaičiuje n kiekvieną dvejetą pakeisime -1, o skaitmenį, esantį kairėje nuo jo, padidinsime 1. Jeigu šitaip gaunamas naujas dvejetas, su juo reikia atlikti lygiai tą patį. O jeigu atsiranda 3, vietoj jo reikia parašyti 0, o prie skaitmens, stovinčio kairėje, pridėti 1. Sakykim, pavyzdžiui, daiktas sveria 25 svarus. Šį skaičių parašę trejetainėje sistemoje, gausime 221. Pirmą skaitmenį 2 pakeisime -1, o kairėje prieš visą skaičių parašysime 1. Vietoj antro dvejeto taip pat parašysime -1 ir pridėsime 1 prie skaitmens, stovinčio kairėje. Gausime skaičių 10—11. Jis yra ekvivalentus pradiniam (patikrinama paprastai: $27+0-3+1=25$), bet užtai, žiūrint į jį, iš karto galima pasakyti, kokių svarsčių reikės ir į kurią svarstyklių lėkštę juos reikia dėti. Į vieną lėkštę dedamas sveriamas daiktas. Greta jo statomi svarsčiai, atitinkantys skaitmenis su minuso ženklu. Skaitmenys su pliuso ženklu atitinka svarsčius, kuriuos reikia padėti ant kitos svarstyklių lėkštės. 222 paveiksle parodyta, kaip reikia paskirstyti svarsčius, norint pasverti 25 svarų daiktą.

Sakykime, norite pasverti kokį nors daiktą, žinodami, kad jo svoris lygus sveikam svarų skaičiui nuo 1 iki 27.

Su kokiu mažiausiu svarsčių skaičiumi galima išsiversti, jeigu juos galima dėti ant abiejų svarstyklių lėkščių? Čia nėra jokių spąstų, tik viena nedidelė gudrybė, ir vargu ar jums pavyks iš karto nurodyti teisingą atsakymą.

Kaip sunkesnių svėrimo uždavinių pavyzdį išnagrinėsime uždavinį apie 12 monetų (pirmą kartą apie jį imta kalbėti 1945 metais; nuo to laiko išspausdinta nemažai straipsnių, nagrinėjančių uždavinį). Yra dvylika visiškai vienodų monetų, tarp kurių viena netikra. Žinoma, kad ši moneta arba šiek tiek sunkesnė, arba šiek tiek lengvesnė už kitas. Ar galima trimis svėrimais rasti netikrą monetą ir nustatyti, lengvesnė ji ar sunkesnė už tikrąją, jeigu neturite svarsčių, o tik svarstykles su dviem lėkštėmis?

Šį uždavinį puikiai išnagrinėjo K. L. Stongas žurnalo *Scientific American* 1955 metų gegužės mėnesio numeryje. Vienas sprendimų (o jų gana daug) susiję su trejetaine sistema.

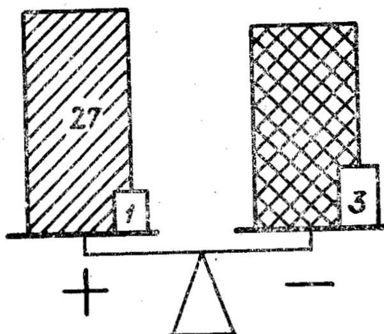
Iš pradžių visus skaičius nuo 1 iki 12 parašykite trejetainėje sistemoje. Kiekviename skaičiuje skaitmenį 2 pakeiskite 0, o 0 pakeiskite 2 ir greta parašykite rezultatą. Gausite tris skaičių skiltis:

1	**001**	221
2	002	**220**
3	**010**	212
4	**011**	211
5	**012**	210
6	020	**202**
7	021	**201**
8	022	**200**
9	100	**122**
10	101	**121**
11	102	**120**
12	110	**112**

Atidžiai ištyrę šiuos skaičius, suraskite visus skaičius, kuriuose yra kombinacijos 01, 12, 20 (lentelėje jie išspausdinti juodžiau). Kiekvienai iš dvylikos monetų parinksime vieną šių skaičių.

Sverdami pirmą kartą, ant kairiosios svarstyklių lėkštės dedame keturias monetas, pažymėtas skaičiais, prasidedančiais 0, o ant dešiniosios svarstyklių lėkštės dedame tas keturias monetas, kurias atitinka skaičiai, prasidedantys 2. Jeigu monetos atsvers vienos kitas, galite teigti,

kad skaičius, kuris atitinka netikrą monetą, prasideda 1. Jeigu kairioji lėkštė nusvers, ieškomasis skaičius prasideda 0, o jeigu dešinioji — 2.

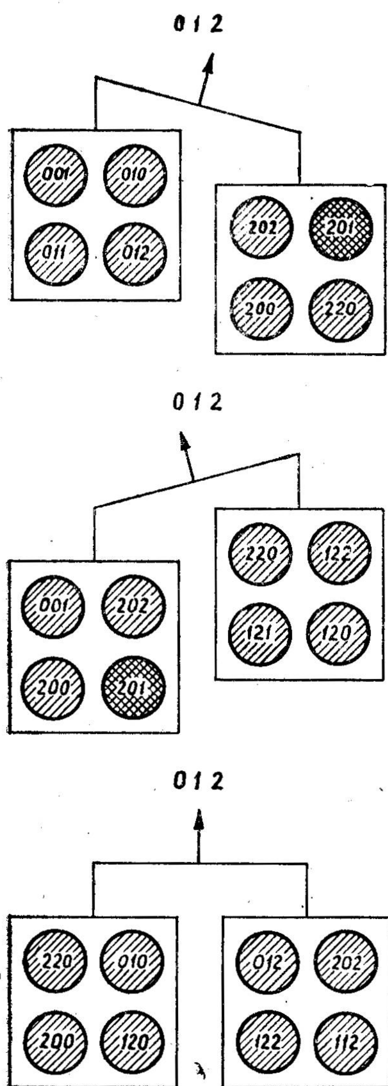


222 pav. Kaip pasverti 25 svarų daiktą

Monetas sveriant antrą kartą, jas reikia paskirstyti priklausomai nuo viduriniojo skaitmens. Jeigu centre yra 0, moneta dedama ant kairiosios lėkštės, jeigu 2 — ant dešiniosios. Skaičiaus, žyminčio netikrą monetą, antrasis skaitmuo nustatomas lygiai taip pat, kaip buvo nustatytas jo pirmasis skaitmuo, pirmą kartą sveriant.

Paskutinį kartą sverdami, į kairę dedate monetas, pažymėtas skaičiais, kurie baigiasi 0, o monetas, kurias atitinka skaičiai, gale turintys 2, dedate ant dešiniosios svarstyklių lėkštės. Taip sužinote ieškomo skaičiaus paskutinįjį skaitmenį. 223 paveiksle matyti, kad, tris kartus pasvėrus, netikra pasirodė esanti 201 moneta. Ji pastebimai sunkesnė už visas kitas, nes ir viršutinėje, ir apatinėje schemoje lėkštė su šia moneta nusveria.

Su uždaviniu apie 12 monetų glaudžiai siejasi daugelis kortų fokusų. Vienas geriausių fokusų žinomas Žergono uždavinio apie tris kortų krūveles pavadinimu (prancūzų matematiko Žozefo Dieco Žergono garbei; jis pirmas pradėjo analizuoti šį uždavinį dar XIX amžiaus pradžioje). Vienas žiūrovų paprašomas peržiūrėti 27 kortų kaladę ir vieną kortą įsiminti. Paskui žiūrovas, laikydamas kaladę atverstąja korta žemyn, ima iš jos po vieną kortą ir jas išdėsto į tris krūveles iš kairės į dešinę paveiksliukais į viršų. Kiekvienoje krūvelėje bus po devynias kortas. Nurodęs fokusininkui krūvelę, kurioje yra įsidėmėta korta, žiūrovas krūveles deda vieną ant kitos bet kaip, paskui vėl kaladę apverčia paveiksliukais žemyn ir pradeda dar kartą dėstyti kortas į tris krūveles paveiksliukais į viršų. Parodęs, kur dabar yra įsidėmėta korta, žiūrovas tą pačią procedūrą pakartoja trečią kartą;



223 pav. Kaip, tris kartus sveriant, rasti netikrą monetą

po to kaladė iš trijų krūvelių dedama ant stalo taip, kad atverstoji korta būtų apačioje. Per visą šį laiką fokusininkas nė karto nepaliečia kortų, bet vis dėlto beregint sako, kokioje vietoje yra įsidėmėtoji korta.

Fokuso paslaptis ta, kad reikia pastebėti, kur žiūrovas padėjo krūvelę su įsidėmėta korta — po kalade, jos viduryje ar ant viršaus. Šias tris padėtis pažymėsime skaitmenimis 0 (kai krūvelė yra viršutinėje kaladės dalyje), 1 (kai krūvelė yra viduryje) ir 2 (kai krūvelė apačioje). Dabar, perskaitę iš dešinės į kairę trejetainį skaičių, gautą kaip trijų dėstymų rezultatą, gausime skaičių kortų, esančių kaladėje virš įsidėmėtos kortos. Sakykim, pavyzdžiui, krūvelė su įsidėmėta korta pirmą kartą buvo padėta ant kaladės viršaus (kaip jau susitarta, tą padėtį atitinka skaitmuo 0), antrą kartą — jos apačioje (2) ir pagaliau paskutinį kartą — viduryje (1). Šiuos skaitmenis parašę iš dešinės į kairę ir trejetainį skaičių 120 pervedę į dešimtainę sistemą, gausime skaičių 15. Tai reiškia, kad virš įsidėmėtos kortos yra penkiolika kortų, t. y. ieško-

moji korta bus šešioliktoji. Suprantama, fokusas nepasidaro nė kiek sudėtingesnis, jį rodant priešingai. Žiūrovui pasiūloma išsirinkti bet kurį skaičių nuo 1 iki 27 ir pasirinkti kokią nors iš 27 kortų, o visas kitas manipuliacijas su kalade atlieka pats fokusininkas. Jis tris kartus krūveles sudėlioja lygiai taip pat, kaip jau buvo aiškinta aukščiau; paskui, atskaičiavęs nuo viršaus žiūrovo parinktą kortų skaičių, ištiesia jam įsidėmėtą kortą.

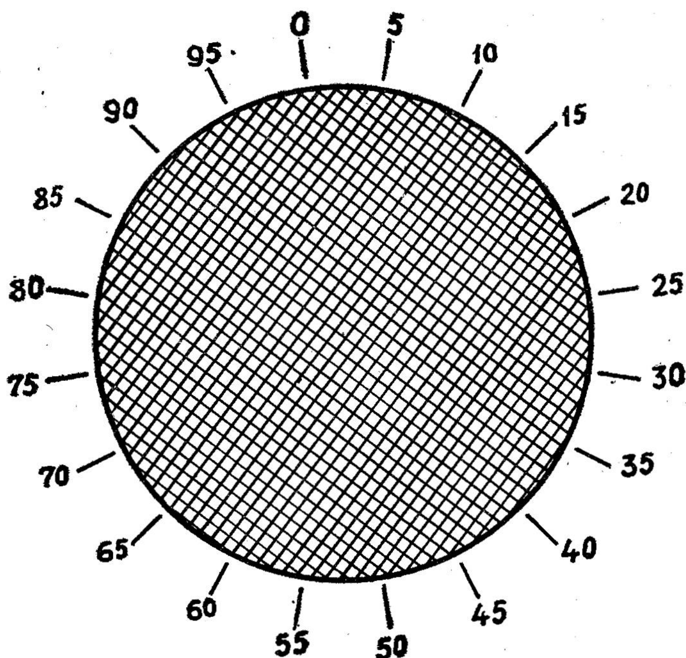
ATSAKYMAI

Reikėjo nustatyti, kokio minimalaus svarsčių skaičiaus reikia, norint pasverti bet kurį iš 27 daiktų, kurių kiekvieno svoris išreiškiamas sveiku svarų skaičiumi nuo 1 iki 27. Svarsčius galima dėti ant abiejų svarstyklių lėkščių. Pasirodo, kad uždaviniui išspręsti pakanka trijų svarsčių, sveriančių 2, 6 ir 18 svarų. (Tai padvigubinta iš eilės einančių skaičiaus 3 laipsnių eilutė.) Šiais svarsčiais galėsite rasti tikslų bet kurio daikto svorį, jeigu jis lygus lyginiam svarų skaičiui nuo 1 iki 27. O jeigu svoris išreiškiamas nelyginiu skaičiumi, reikia nustatyti tuos du lyginius skaičius, tarp kurių jis yra. Jeigu, pavyzdžiui, pasirodo, kad daiktas sveria daugiau negu 16, bet mažiau negu 18 svarų, iš čia išplaukia, kad jo svoris lygus 17 svarų.

XXXVII skyrius

Septyni trumpi uždaviniai

1. Kelionė aplink Mėnulį. Veiksmas vyksta 1984 metais. Iki to laiko Mėnulyje jau pastatyta mokslinė tyrimų laboratorija, ir joje gyvenantis kosmonautas gavo užduotį apkeliauti aplink Mėnulį. Jis turi pradėti kelionę iš bazės ir, apkeliavęs Mėnulio paviršių didžiuoju apskritimu,



224 pav. Uždavinys apie kelionę aplink Mėnulį

sugrįžti į bazę iš kitos pusės. Kosmonautas turi keliauti specialia mašina, kurios degalų bakas apskaičiuotas penktadaliui viso kelio. Be to, mašinoje yra atsarginis indas su degalais, kurio tūris lygus bako tūriui. Šį indą arba galima atidaryti ir joje esančius visus degalus perpilti į baką, arba neatidarius iškrauti iš mašinos ir palikti Mėnulio paviršiuje. Taigi atsarginius degalus draudžiama pilstyti dalimis.

Uždavinio esmė tokia: kaip, mažiausiai sunaudojus degalų, apkeliauti aplink Mėnulį. Leidžiama prieš tai kiek norima kartų išvykti bet kuria kryptimi konteineriams su degalais bet kuriuose Mėnulio paviršiaus punktuose išdėstyti, vėliau juos panaudojant kelionei apie Mėnulį. Tačiau kosmonautas turi pravažiuoti išilgai viso didžiojo apskritimo, judėdamas viena kryptimi. Turima galvoje, jog bazėje yra neribotas degalų kiekis, ir mašiną jais galima pripildyti bet kuriuo laiku.

Uždaviniui išspręsti patogu nubrėžti apskritimą ir padalyti jį į dvidešimt lygių dalių, kaip parodyta 224 paveiksle. Degalai, sunaudoti paruošiamosioms išvykoms, suprantama, įeina į bendrą sunaudotų degalų kiekį. Jeigu, pavyzdžiui, mašina nugabeno į *90* punktą vieną konteinerį su degalais ir grįžo į bazę, laikoma, kad vienas bakas degalų jau sunaudotas. Sprendžiant uždavinį iš esmės, pirmiausia *41* konteinerį su degalais reikia nugabenti į *10* tašką, paskui keturiasdešimt antrąjį konteinerį palikus *15* taške, grįžti į *10* tašką. Visai šiai procedūrai reikėtų 84 bakų degalų: 42 bakai pervežimui ir 42 bakai galutinei kelionei. Daugiau degalų jau nebereikėtų: vykdamas pirmyn ir atgal tarp punktų, kosmonautas galėtų apkeliauti Mėnulį ir be jokių papildomų degalų. Tačiau galima sudaryti tokią išvykų schemą, kad sunaudotų degalų kiekis sumažės daugiau kaip du kartus palyginti su minėtais aštuoniasdešimt keturiais bakais.

2. Uždavinys apie gręžinį. Vienoje lygumoje buvo atitvertas stačiakampis sklypas ir jame išgręžtas naftos gręžinys. Nafta pasirodė taške, kuris buvo aptiktas giliai po žeme 2100 pėdų atstumu nuo vienos stačiakampio viršūnių, 18 000 pėdų atstumu nuo priešingos viršūnės ir 6000 pėdų atstumu nuo trečios viršūnės. Nustatykite to taško atstumą nuo ketvirtosios stačiakampio viršūnės. Išsprendę uždavinį, gausite labai bendrą, naudingą ir paprastą formulę.

3. Nepaprastas žaidimas kryžiukais ir nuliukais. Vienas skaitytojas pasiūlė visiškai netikėtą žaidimo kryžiukais ir nuliukais būdą. Taisyklės senos, skirtumas tik tas, kad kiekvienas žaidėjas, kai ateina jo eilė žaisti, gali pagal savo norą dėti arba kryžiuką, arba nuliuką. Laimi tas, kuris pirmas baigia trijų vienodų figūrų eilę (arba iš trijų kryžiukų, arba iš trijų nuliukų).

Abiem varžovams lošiant racionaliai, standartinė žaidimo kryžiukais ir nuliukais partija paprastai baigiasi lygiosiomis. Žaidžiant naujoviškai, situacija keisis. Tarkime, jog kiekvienas žaidėjas išsirinko teisingiausią strategiją. Kuris jų tikrai išloš — pirmasis ar antrasis?

4. Nauja monetų sistema. Norint surinkti 99 centų sumą, reikia turėti mažiausiai aštuonias amerikietiškas

monetas: po vieną pusės ir ketvirčio dolerio monetą, dvi dešimties centų monetas ir keturias vieno penso monetas. Įsivaizduokite, jog kokia nors nauja nepriklausoma nacija išrinko jus savo prezidentu. Jūs turite patvirtinti monetų sistemą, kurios mažiausia moneta yra vienas centas. Jūsų uždavinys patvirtinti tokią monetų sistemą, kad bet kurią sumą nuo vieno iki šimto centų būtų galima išmokėti ne daugiau kaip dviem monetomis ir kad skirtingų monetų skaičius piniginėje sistemoje būtų minimalus.

Šis reikalavimas, pavyzdžiui, būtų išpildytas tuo atveju, jeigu iškaldintute 18 monetų 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 centų vertės. Pabandykite dabar parinkti tokias monetas, kad šis skaičius (18) būtų mažesnis. Kiekvieną sumą turi sudaryti arba viena moneta, arba dvi. Pastaruoju atveju abi monetos, suprantama, gali būti ir skirtingos, ir vienodos vertės.

5. Auklėjimas matematika. — Na, jau ne,— tarė kartą savo keturiolikmečiui sūnui matematikas,— šią savaitę aš nesirengiau duoti tau atliekamus dešimtį dolerių. Tačiau, jeigu nori, galiu pasiūlyti tau rizikingą užsiėmimą.

Berniukas sunkiai atsiduso.

— Ką tu šį kartą sugalvojai?

— Aš turiu dešimtį naujutėlių šiugždančių dešimties dolerių banknotų ir dešimtį popierėlių po vieną dolerį; jie taip pat nauji ir šiugžda. Visus tuos banknotus galėsi paskirstyti kaip nori, bet taip, kad susidarytų du rinkiniai. Vieną rinkinį sudėsime į skrybėlę *A*, antrą — į skrybėlę *B*. Paskui aš tau užrišiu akis ir, sumaišęs banknotus kiekvienoje skrybėlėje, vieną skrybėlę padėsiu dešinėje krosnies pusėje, antrą kairėje. Tu turėsi atsitiktinai pasirinkti vieną skrybėlę ir atsitiktinai išsiimti iš jos vieną banknotą. Jeigu išsiimsi dešimtuką — jis tavo.

— O jei ne?

— Be atsikalbinėjimų visą mėnesį turėsi karpyti gazoną.

Berniukas sutiko. Kaip jis turi paskirstyti skrybėlėse dvidešimt banknotų, kad tikimybė ištraukti dešimties dolerių banknotą būtų maksimali? Kam lygi ši tikimybė?

6. Dar vienas svėrimo uždavinys. Uždavinys apie 12 monetų svėrimą sukėlė tokį didelį skaitytojų susidomėjimą, kad ryžausi pratęsti tą seriją dar vienu uždaviniu, šį kartą ne tokiu sudėtingu.

Iš penkių turimų daiktų nėra nė vienos vienodai sveriančių daiktų poros. Tuos penkis daiktus reikia išrikiuoti jų svorių didėjimo tvarka. Sakykime, turite svertines svarstykles su dviem lėkštėmis, bet neturite svorių. Kaip išspręsti uždavinį, sveriant ne daugiau kaip septynis kartus?

Aišku, kad du daiktus pakanka sverti vieną kartą. Tris daiktus teks sverti tris kartus. Tarkime, kad pasvėrę pirmą kartą, nustatysime, jog daiktas *A* sunkesnis, negu *B*. Padėsime ant svarstyklių *B* ir *C*. Jeigu *B* bus sunkesnis, uždavinį galima išspręsti, sveriant tik du kartus; o jeigu sunkesnis *C*, teks sverti trečią kartą, nustatant, kuris — *A* ar *C* — sunkesnis. Jeigu turite keturis daiktus, galite lengvai apsieiti penkiais svėrimais.

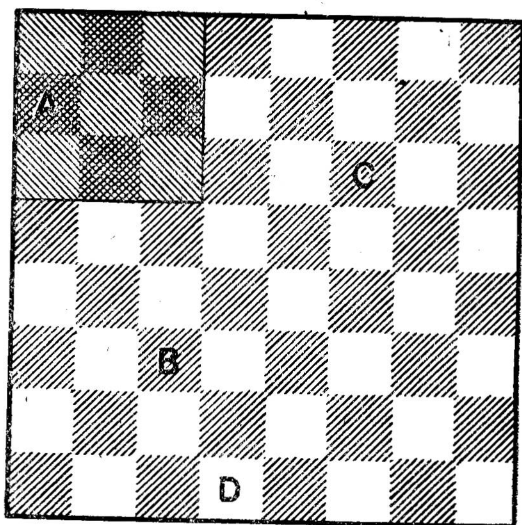
Kai yra penki daiktai, uždavinys pasidaro netrivialus, o, toliau didėjant sveriamų daiktų skaičiui, uždavinys labai greitai sunkėja. Kiek man žinoma, kol kas dar nerastas bendras metodas *n* daiktams pagal svorį išrikiuoti, sveriant kuo mažiausiai kartų.

7. Penki uždaviniai apie valdovės ėjimą. Šimtuose šachmatų uždavinių susiduriame su vienos šachmatų figūros perėjimu per visą lentą. 35 skyriuje buvo trumpai paminėti uždaviniai apie šachmatų žirgo ėjimą ir jų ryšys su grafų teorija. Žemiau pateikiamas penkių uždavinių apie valdovės ėjimą rinkinėlis. Norint juos išspręsti, nebūtina mokėti žaisti šachmatais. Pakanka žinoti, jog valdovė žengia bet kokia kryptimi per bet kokį skaičių langelių (lygiagrečiai lentos kraštams arba įstrižainėms). Uždaviniai pateikiami jų sunkėjimo tvarka.

1. Valdovė užima kvadratą *A* (225 pav.). Reikia padaryti keturis ėjimus taip, kad valdovė pabuvotų visuose devyniuose tamsiuose langeliuose, esančiuose lentos kairiajame viršutiniame kampe.

2. Pastatę valdovę laukelyje *D* (paprastai žaidimo pradžioje balta valdovė jame ir stovi), apeikite penkiais ėjimais didžiausią langelių skaičių. Sustoti du kartus tame pačiame langelyje draudžiama; be to, valdovė nė viename taške neturi perkirsti savo kelio. Laikoma, jog kiekviename langelyje trajektorija eina per langelio centrą.

3. Valdovė stovi kvadrate *B*. Reikia 15 ėjimų visiems lentos kvadratams apeiti ir baigti trajektoriją kvadrate,



225 pav. Lenta valdovės ėjimo uždaviniuose

pažymėtame raide *C*. Nė vieno kvadrato negalima praeiti du kartus.

4. Pradėję iš kampinio langelio, apeikite valdove visus lentos langelius 14 ėjimų, o paskutiniu ėjimu grįžkite į pradinę padėtį. Šiuo atveju kai kuriuos langelius galima praeiti daugiau kaip vieną kartą. 1867 metais šį uždavinį „apie valdovės kelionę aplink pasaulį“ pirmą kartą paskelbė Semas Loidas, laikęs jį vienu geriausių savo galvosūkių. Pateiktame uždavinyje valdovės trajektorija gali prasidėti ir baigtis tame pačiame arba dviejuose gretimuose langeliuose, bet ir vienu, ir kitu atveju uždaviniui išspręsti reikia mažiausiai 14 ėjimų.

5. Raskite tokią pačią trajektoriją, sudarytą iš 12 ėjimų, 7×7 matmenų lentoje. Valdovė, pabuvojusi mažiausiai vieną kartą kiekviename lentos kvadrate, turi grįžti į pradinį kvadratą. Kaip ir ankstesniame uždavinyje, vieną ir tą patį langelį galima pereiti keletą kartų.

1. Kelionei aplink Mėnulį pakanka 23 bakų degalų. Žemiau pateikiama išvykų schema (224 pav.):

1. Penki konteineriai pervežami į *90* punktą penkiomis išvykomis, paskui mašina grįžta į bazę (sunaudota 5 degalų bakai).

2. Nugabenusi į *85* punktą vieną konteinerį, mašina grįžta į *90* punktą (sunaudotas 1 bakas).

3. Vienas konteineris pervežamas į *80* punktą, o mašina grįžta į *90* punktą (sunaudotas 1 bakas).

4. Vienas konteineris pervežamas į *80* punktą, paskui mašina grįžta į *85* punktą ir, paėmusi ten konteinerį, pergabena jį į *80* punktą (sunaudotas 1 bakas).

5. Nugabenusi vieną konteinerį į *70* punktą, mašina grįžta į *90* punktą (sunaudotas 1 bakas).

6. Grįžtama į bazę (sunaudotas 1 bakas).

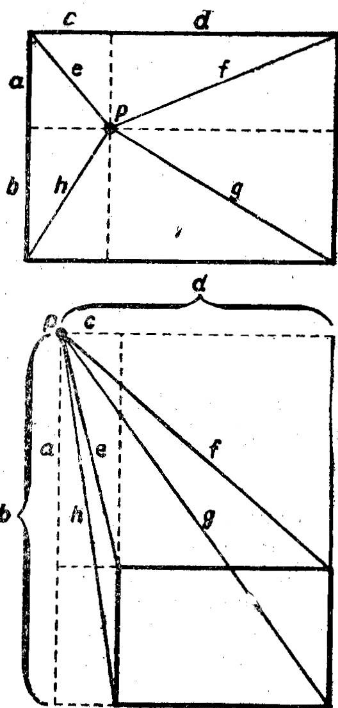
Taip baigiasi pasiruošimo išvykos. Sunaudota dešimt bakų degalų, todėl *70* ir *90* punktuose liko po vieną pilną konteinerį.

7. Pervežusi į *5* punktą vieną konteinerį, mašina grįžta į bazę (sunaudota pusė bako).

8. Keturiomis išvykomis mašina nugabena keturis konteinerius į 10 punktą ir grįžta į bazę (sunaudoti 4 bakai).

9. Vienas konteineris iš bazės nugabenamas į *10* punktą, paskui, grįžusi į *5* punktą, mašina paima iš ten vieną konteinerį ir pergabena jį į *10* punktą (sunaudotas 1 bakas).

10. Du konteineriai dviem išvykomis nugabenami į *20*



226 pav. Uždavinys apie naftos gręžinį

punktą, o mašina grįžta į *10* punktą (sunaudoti 2 bakai).

11. Nugabenusi vieną konteinerį į *25* punktą, mašina grįžta į *20* punktą (sunaudotas 1 bakas).

12. Vienas konteineris pervežamas į *30* punktą, paskui mašina grįžta į *25* punktą ir, paėmusi ten vieną konteinerį, grįžta vėl į *30* punktą (sunaudotas 1 bakas).

13. Mašina pervažiuoja į *70* punktą (sunaudoti 2 bakai).

14. Mašina pervažiuoja į *90* punktą (sunaudotas 1 bakas).

15. Mašina *iš 90* punkto grįžta į bazę (sunaudota pusė bako).

2. Nafta rasta taške, kuris nutolęs nuo stačiakampio sklypo viršūnių tokiais atstumais: 21 000 pėdų nuo vienos viršūnės, 18 000 pėdų nuo jai priešingos viršūnės ir 6 000 pėdų nuo trečios viršūnės. Koks taško atstumas iki ketvirtos viršūnės?

Išnagrinėsime 226 paveikslo viršutiniame brėžinyje tašką p. Nubrėžę punktyru dvi statmenas tieses, gausime stačių trikampių rinkinį. Kadangi $e^2=a^2+c^2$, o $g^2=b^2+d^2$, galime parašyti lygybę:

$$e^2+g^2=a^2+c^2+b^2+d^2.$$

Iš to paties paveikslo matyti, jog

$$f^2=a^2+d^2 \text{ ir } h^2=b^2+c^2,$$

vadinasi,

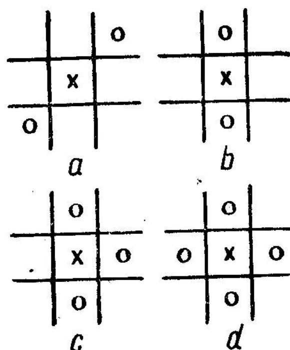
$$f^2+h^2=a^2+d^2+b^2+c^2.$$

Kadangi abiejų lygybių dešiniosios pusės lygios, vadinasi, lygios ir kairiosios:

$$e^2+g^2=f^2+h^2.$$

Lygiai taip pat galima išanalizuoti ir 227 paveikslo apatinę schemą, kurioje taškas p yra už stačiakampio. Įsivaizdavus, kad abiejuose brėžiniuose taškas p yra po žeme, aišku, kad visų stačių trikampių kraštinės faktiškai bus ilgesnės, bet gautosios pareinamybės liks galioti. Kitaip sakant, kur erdvėje bebūtų taškas p (virš trikampio plokštumos ar po ja, ir net ant jo briaunos arba jo viršūnėje), to taško atstumų iki dviejų priešingų stačiakampio viršūnių kvadratų suma bus lygi atstumų iki kitų dviejų viršūnių kvadratų sumai. Remdamiesi šia paprasta formu-

le, gauname, jog atstumas iki ketvirtos viršūnės lygus 27 000 pėdų.



227 pav. Žaidimas kryžiukais ir nuliukais, taikant nepaprastas taisykles

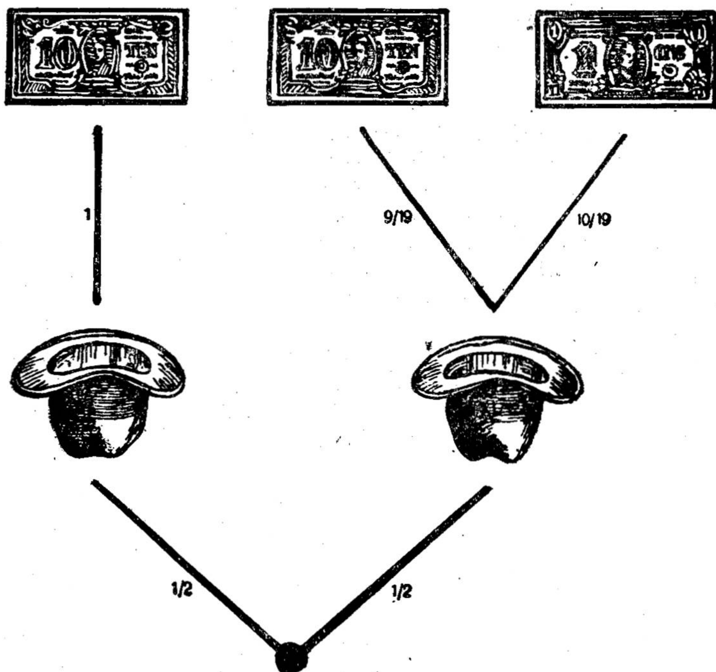
3. Jeigu, žaidžiant kryžiukais ir nuliukais, abu varžovai turi teisę įrašyti ir kryžiukus, ir nuliukus, pradedantysis visada laimi, kai jis pirmu ėjimu užima centrinį langelį. Tarkime, jis jame įrašo kryžiuką. Tuomet antrasis žaidėjas gali užimti arba kampinį langelį, arba vieną iš keturių langelių, išsidėsčiusių apie centrinį. Sakykime, jis pasirinko kampinį langelį ir, siekdamas išvengti pralaimėjimo jau sekančiu ėjimu, įrašė jame 0. Atsakydamas į tai, pirmasis žaidėjas įrašo nuliuką priešingame kampe, kaip parodyta 227 paveiksle, ir antrasis žaidėjas pralaimėjimo negali išvengti, nes sekančiu ėjimu pirmasis jį nugali.

Sakykime, antrasis žaidėjas užėmė ne kampinį, o vieną šoninių langelių. Jis vėl turi įrašyti 0, kad nepraloštų iš karto. Atsakomasis varžovo ėjimas pavaizduotas 227 paveiksle, *b*. Antrasis žaidėjas priverstas daryti taip, kaip parodyta 227 paveiksle, *c*, o paskui pirmasis gali įrašyti ir kryžiuką, ir nuliuką (227 pav., *d*) ir sekančiu ėjimu nepriklausomai nuo varžovo ėjimo pasiekia pergalę.

4. Šešiolikos skirtingos vertės monetų visiškai pakanka tam, kad bet kokią sumą nuo 1 iki 100 centų būtų galima sudaryti iš ne daugiau kaip dviejų monetų. Reikia nukaldinti 1, 3, 4, 9, 11, 16, 20, 25, 30, 34, 39, 41, 46, 47, 49 50 centų monetas *. Neįrodyta, kad uždavinio su mažesniu monetų skaičiumi išspręsti negalima.

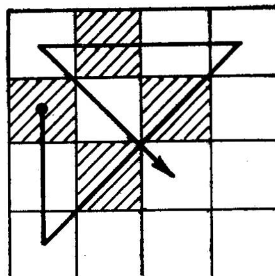
5. Norėdamas maksimaliai padidinti dešimties dolerių banknoto ištraukimo tikimybę, berniukas turi įdėti jį į vieną skrybėlių, o kitas 19 kupiūrų (9 dešimties dolerių banknotus ir 10 vieno dolerio banknotų) sumesti į antrą

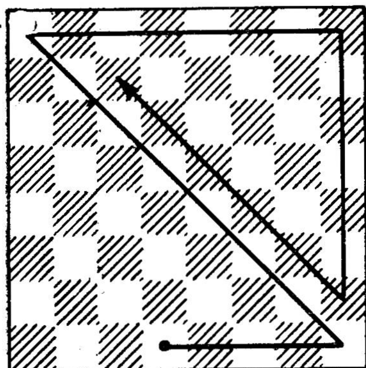
* Sprendinys paimtas iš knygos S p r a q u e, Unterhaltsame Mathematik, Braunschweig, 1961.

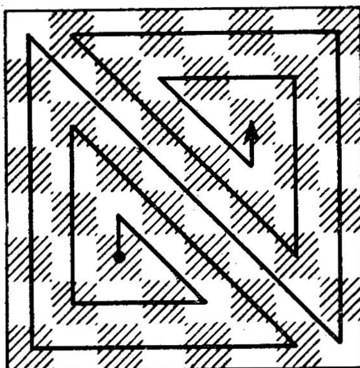


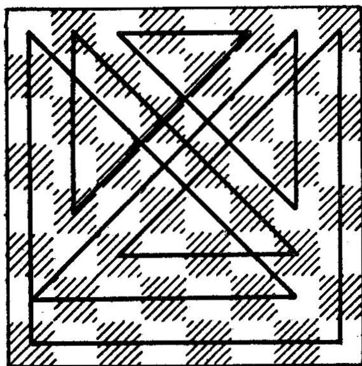
228 pav. Uždavinys „Auklėjimas matematika“

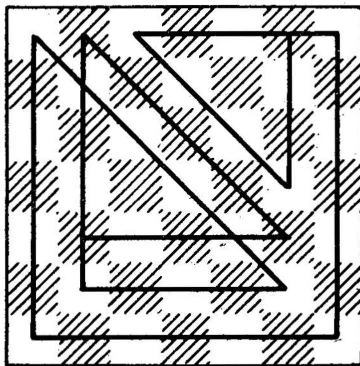
skrybėlę. Tikimybė pačiupti skrybėlę su vieninteliu dešimties dolerių banknotu lygi $\frac{1}{2}$, o tikimybė rasti joje dešimties dolerių banknotą lygi 1 (dešimties **dolerių** banknotas tikrai joje yra). Žvilgtelėkime į antrą skrybėlę. Jeigu berniukas pataikys paimti ją ir iš jos atsitiktinai išims vieną banknotą, vis dėlto savo dešimtį dolerių jis gali gauti su tikimybe $\frac{9}{19}$. Minėto paprasto tikimybinio uždavinio schema parodyta 228 paveiksle. Tikimybė, kad berniukas išims dešimties dolerių kupiūrą iš skrybėlės *A*, lygi $\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$. Tikimybė, kad jis tokią pačią kupiūrą išims iš skrybėlės *B*, lygi $\frac{1}{2}\times\frac{9}{19}=\frac{9}{38}$. Abiejų apskaičiuo-











229 pav. Uždavinio apie valdovės ėjimus sprendiniai

tų tikimybių suma lygi $\frac{14}{19}$ (tai sudaro beveik $\frac{3}{4}$), ir rodo, jog berniukas greičiausiai ištrauks 10 dolerių.

6. Penkis daiktus jų svorių didėjimo tvarka, 7 kartus sveriant svertinėmis svarstyklėmis, galima išdėstyti pagal tokią schemą:

1) sveriame daiktus *A* ir *B*. Sakykime, daiktas *B* sunkesnis už *A;*

2) sveriame daiktus *C* ir *D*. Sakykime, daiktas *D* sunkesnis už *C;*

3) dedame ant svarstyklių daiktus *B* ir *D*. Tarkime, jog daiktas *D* pasirodė sunkesnis už *B*. Gavome nelygybę: $D>B>A$;

4) palyginame daiktų *E* ir *B* svorius;

5) jeigu daiktas *E* sunkesnis už *B,* dedame ant svarstyklių *E* ir *D*. Jeigu *E* lengvesnis, palyginame svorius *E* ir *A*. Abiem atvejais galime nustatyti *E* vietą tarp keturių daiktų. Tarkime, jog šiuo atveju išrikiavimas toks: $D>B>E>A$.

2 operacija leidžia palyginti daiktų *C* ir *D* svorius, todėl belieka nustatyti *C* vietą tarp kitų trijų daiktų *(B, E, A)*. Tam visada pakanka sverti du kartus. Mūsų atveju reikia:

6) iš pradžių palyginti *C* ir *E* svorius; paskui

7) jei *C* sunkesnis už *E,* uždėti ant svarstyklių daiktus *B* ir *C,* arba jei *C* lengvesnis už *E,* uždėti daiktus *A* ir *C*.

Bendras šio uždavinio sprendimas nagrinėjamas žurnalo *The American Mathematical Monthly* 1959 metų gegužės mėnesio numeryje (p. 387—389).

7. Penkių uždavinių apie valdovės ėjimus sprendiniai pavaizduoti 229 paveiksle. Ketvirtasis ir penktasis uždavinys turi ir kitokius sprendinius, bet nė vienas iš jų negali būti gautas mažesniu ėjimų skaičiumi. Jeigu, spręsdami antrąjį uždavinį, iš pradžių perkėlėte valdovę į dešinįjį apatinį kampą, po to į viršutinįjį dešinįjį kampą, paskui išilgai pagrindinės įstrižainės į apatinįjį kairįjį kampą, po to į viršutinį kairįjį kampą ir pagaliau per septynis langelius į dešinę, gautasis kelias bus beveik (bet ne tiksliai) lygus keliui, pavaizduotam 229 paveiksle.

XXXVIII skyrius

Žaidimas „Gyvenimas“

Kas mūsų „Gyvenimas“? Žaidimas!

Didžioji Džono Hortono Konuejaus darbų dalis priklauso grynosios matematikos sričiai. Pavyzdžiui, 1967 metais jis atrado naują grupę (ji kartais vadinama „Konuejaus žvaigždynu“), kuriai kaip pogrupės priklauso visos, be dviejų, tuo laiku žinomos „sporadinės“ grupės („sporadinėmis“ tos grupės pavadintos dėl to, kad jų niekaip negalima suklasifikuoti).

Konuejaus atradimas turėjo svarbią reikšmę ne tik grupių, bet ir skaičių teorijai. Jis glaudžiai susijęs su kitu, ankstesniu Džono Ličo, pastebėjusio nepaprastai tankų vienetinių sferų susisluoksniavimą dvidešimt keturių matavimų erdvėje, atradimu. Nors kiekviena sfera tame sluoksnyje liečiasi su kitomis 196 560 sferomis, vis dėlto, kaip pastebėjo Konuejus, tarp sferų „lieka dar daug vietos“. Šalia rimtų tyrimų Konuejus domėjosi įdomiąja matematika. Toje srityje jam priklauso nemažai darbų, tačiau savo „įdomiausius“ rezultatus jis publikuoja ypač retai. Žurnalo *Scientific American* 1966 metų rugsėjo mėnesio numeryje išspausdintas Konuejaus straipsnis apie „dygsniuotą misis Perkins antklodę“, skirtas kvadrato pjaustymo uždaviniams, o 1967 metų liepos mėnesio to paties žurnalo puslapiuose pasirodė topologinis žaidimas „Aštuonkojis“, kurį sugalvojo Konuejus ir M. S. Patersonas. Konuejaus vardą „Matematinių žaidimų“ skyriaus skaitytojai ne kartą pastebėjo ir anksčiau.

Šiame skyriuje nagrinėjamas paskutinis Konuejaus „kūdikis“ — patrauklus žaidimas, kurį Konuejus pavadino „Gyvenimu“. Žaidimui „Gyvenimas“ jums neprireiks partnerio — jį galima žaisti vienam. Žaidimo procese atsirandančios situacijos labai panašios į realius procesus, vykstančius gimstant, augant ir žūstant gyvų organizmų kolonijoms. Dėl tos priežasties „Gyvenimą“ galima priskirti prie sparčiai mūsų dienomis besivystančių žaidimų, imituojančių procesus, kurie vyksta gyvojoje gamtoje, kategorijos. Žaidimui „Gyvenimas“ jums reikės didelės lentos, sugrafuotos langeliais, ir daug plokščių dviejų

spalvų kauliukų (pavyzdžiui, tiesiog kelių paprastų nedidelio skersmens šaškių rinkinių arba dviejų spalvų sagų). Galima taip pat naudotis go žaidimo lenta, bet tuomet jums teks ieškoti mažų plokščių šaškių, kurios tilptų tos lentos langeliuose (paprasti go žaidime naudojami akmenys netinka dėl to, kad jie ne plokšti). Ėjimus būtų galima piešti popieriuje, bet kur kas paprasčiau, ypač pradedantiems, žaisti, stumdant kauliukus arba šaškes lentoje.

Pagrindinė idėja ta, kad, pradėjus nuo kokio nors paprasto kauliukų (organizmų) išsidėstymo, reikia pasekti pradinės pozicijos evoliuciją, veikiant Konuejaus „genetikos dėsniams", kurie nulemia kauliukų gimimą, žūtį ir išlikimą. Konuejus rūpestingai rinko taisykles ir ilgai tikrino jas „praktikoje", siekdamas, kad jos patenkintų tris sąlygas:

1. Neturi būti nė vienos pradinės konfigūracijos, kurios atžvilgiu būtų galima paprastai įrodyti neriboto populiacijos augimo galimybes.

2. Tuo pačiu metu turi egzistuoti tokios pradinės konfigūracijos, kurios tikrai sugeba neribotai augti.

3. Turi egzistuoti paprastos pradinės konfigūracijos, kurios gana ilgai auga, įvairiai keičiasi ir baigia evoliucionuotis vienu iš šių trijų būdų: visiškai išnyksta (arba dėl organizmų pertekliaus, t. y. perdaug didelio kauliukų tankumo, arba, atvirkščiai, dėl konfigūraciją sudarančių kauliukų retumo); pereina prie stabilios konfigūracijos ir apskritai nustoja keistis arba pagaliau pereina į svyruojantį režimą, t. y. į begalinį keitimosi tam tikru periodu ciklą.

Apskritai taisyklės turi būti tokios, kad populiacijos vystymosi krypties nebūtų galima numatyti iš anksto.

Konuejaus genetikos dėsniai nuostabiai paprasti. Prieš suformuluodami juos, atkreipsime dėmesį į tai, kad kiekvieną lentos langelį (lenta laikoma begaline) supa aštuoni kaimyniniai langeliai: keturi turi su juo bendras kraštines, kiti keturi — bendras viršūnes. Žaidimo taisyklės (genetikos dėsniai) tokios:

1. Išlikimas. Kiekvienas kauliukas, turintis du arba tris kaimyninius kauliukus, išlieka ir pereina į sekančią kartą.

2. Žūtis. Kiekvienas kauliukas, turintis daugiau kaip tris kaimynus, žūva, t. y. nuimamas nuo lentos dėl organizmų pertekliaus. Kiekvienas kauliukas, kurį supantys

langeliai tušti arba užimtas tik vienas langelis, žūva nuo vienatvės.

3. G i m i m a s. Jeigu kauliukų, kurie ribojasi su tuščiu langeliu, skaičius lygus lygiai trims (ne daugiau ir ne mažiau), tame langelyje gimsta naujas „organizmas", t. y. sekančiu ėjimu ant jo dedamas kauliukas.

Svarbu suprasti, kad visi „organizmai" žūva ir gimsta vienu metu. Kartu paimti, jie sudaro vieną kartą arba, kaip sakysime, vieną „ėjimą" pradinės konfigūracijos evoliucijoje. Konuejus ėjimus rekomenduoja daryti taip:

1) pradėti nuo konfigūracijos, kuri visa sudaryta iš juodų kauliukų;

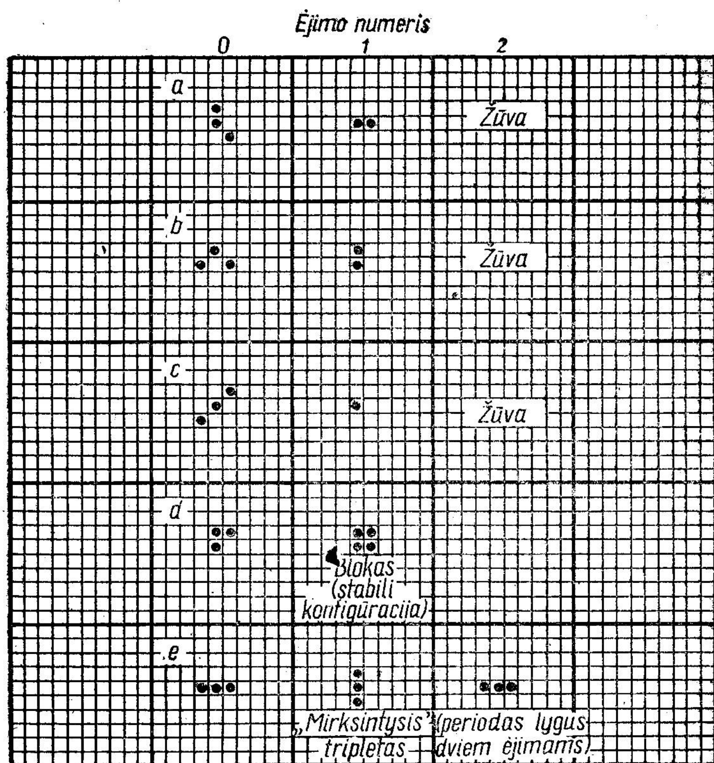
2) numatyti, kokie kauliukai turi žūti, ir uždėti ant kiekvieno pasmerkto kauliuko po vieną juodą kauliuką;

3) rasti visus laisvus langelius, kuriuose turi įvykti gimimo aktas, ir ant kiekvieno jų padėti po vieną baltos spalvos kauliuką;

4) įvykdžius visus tuos nurodymus, dar kartą nuodugniai patikrinti, ar nepadaryta kokių nors klaidų, paskui nuimti nuo lentos visus žuvusius kauliukus (t. y. stulpelius iš dviejų kauliukų), o visus naujai gimusius (baltus kauliukus) pakeisti juodais kauliukais.

Atlikę visas operacijas, gausite pirmąją kartą pradinės konfigūracijos evoliucijoje. Analogiškai gaunamos ir visos kitos kartos. Dabar jau aišku, kam reikalingi dviejų spalvų kauliukai: kadangi „organizmų" gimimas ir žūtis įvyksta tuo pačiu metu, naujai gimę kauliukai neturi jokios įtakos kitų kauliukų žūčiai bei gimimui ir todėl, tikrinant naują konfigūraciją, reikia mokėti atskirti juos nuo kauliukų, perėjusių iš prieš tai susiformavusios kartos. Suklysti, ypač žaidžiant pirmą kartą, labai lengva. Paskui jūs klysite vis rečiau; vis dėlto net ir patyrę žaidėjai turi labai nuodugniai patikrinti kiekvieną naują kartą, prieš nuimdami nuo lentos žuvusius kauliukus ir prieš pakeisdami naujai gimusius baltus kauliukus juodais.

Pradėję žaidimą, iš karto pastebėsite, jog populiacijoje vyksta nepaprasti, neretai labai gražūs ir visuomet netikėti pasikeitimai. Kartais pradinė organizmų kolonija laipsniškai išmiršta, t. y. visi kauliukai išnyksta, tačiau tai negali įvykti iš karto, o tik po to, kai pasikeičia labai daug kartų. Pradinės konfigūracijos paprastai arba pereina į stabilias (pastarąsias Konuejus vadina „ramaus gyvenimo mėgėjomis") ir nebesikeičia, arba visiems



230 pav. Penkių tripletų evoliucija

laikams pereina į svyravimo režimą. Konfigūracijos, žaidimo pradžioje nepasižyminčios simetrija, pasirodo turi tendenciją tapti simetriškomis. Įgytas simetriškumas tolesnės evoliucijos procese neišnyksta, konfigūracijos simetrija gali tik praturtėti.

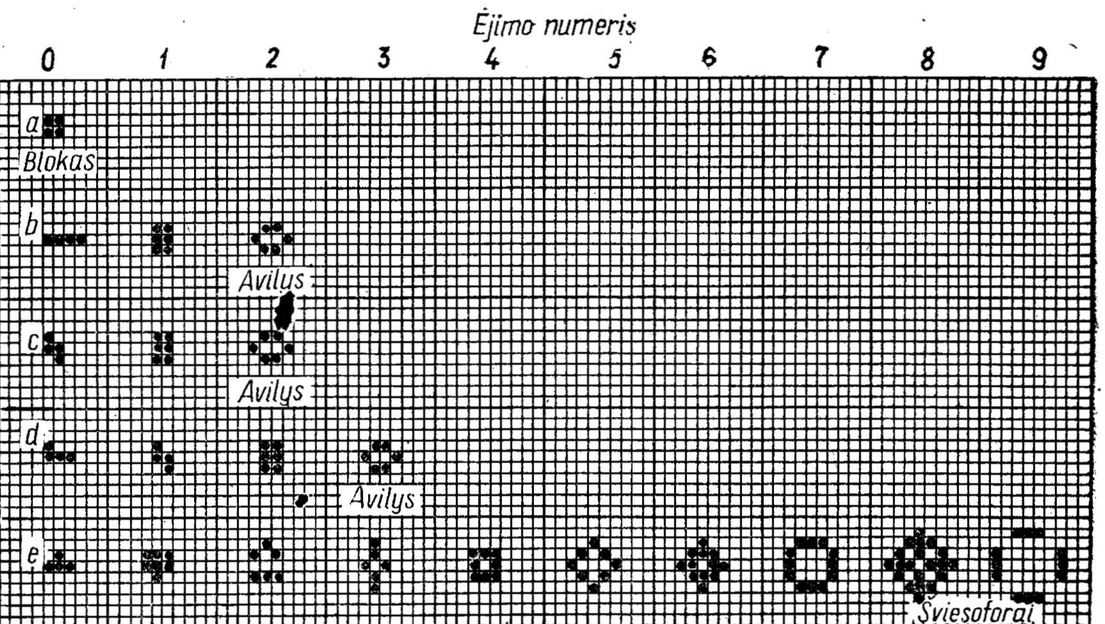
Konuejus iškėlė hipotezę, kuri skelbia, jog nėra nė vienos pradinės konfigūracijos, sugebančios neribotai plėtotis. Kitaip sakant, bet kokia konfigūracija, susidedanti iš baigtinio skaičiaus kauliukų, negali pereiti į konfigūraciją, kurios kauliukų skaičius būtų didesnis už bet kurį viršutinį rėžį. Tai, tikriausiai, esmingiausias ir sudėtingiausias Konuejaus žaidimo uždavinys. Kai žaidimo aprašymas pasirodė žurnalo *Scientific American* 1970 metų

spalio mėnesio numeryje, Konuejus pasiūlė premiją tam, kas pirmas iki metų pabaigos įrodys arba sugriaus jo hipotezę. Sugriauti Konuejaus hipotezę būtų galima, pavyzdžiui, sudarius konfigūraciją, kurią, remiantis žaidimo taisyklėmis, visą laiką tektų papildyti naujais kauliukais, pavyzdžiui „šautuvą“ (konfigūracija, kuri po tam tikro ėjimų skaičiaus „iššauna“), į „sklandytuvą“ panašias judančias figūras (apie jį dar kalbėsime, arba „garvežį“ leidžiantį dūmus iš kamino“ (judanti konfigūracija, už savęs paliekanti nusidriekusius „dūmų kamuolius“).

Išnagrinėsime, kas atsitinka su kai kuriomis paprastomis konfigūracijomis.

Vienas kauliukas, taip pat bet kuri kauliukų pora, kur jie bestovėtų, aišku, žūva tuoj po pirmo ėjimo. Pradinė trijų kauliukų konfigūracija (vadinsime ją tripletu) paprastai žūva. Tripletas išgyvena tik tuo atveju, jeigu bent vienas kauliukas liečia du užimtus langelius. Penki tripletai, kurie nežūva pirmu ėjimu, parodyti 230 paveiksle. (Visai nesvarbu, kaip išsidėstę tripletai plokštumoje — tiesiai, „aukštyn kojomis“ ar įstrižai.) Pirmos trys konfigūracijos *(a, b, c)* antru ėjimu žūva. Kai dėl konfigūracijos *c*, galime pasakyti, kad bet kokia įstriža kauliukų eilė, kokia ilga ji bebūtų, po kiekvieno ėjimo praranda galinius kauliukus ir galų gale visai išnyksta. Greitį, kuriuo šachmatų karalius žygiuoja lentoje bet kuria kryptimi, Konuejus vadina „šviesos greičiu“. (O kodėl, paaiškės toliau.) Vartojant tą terminologiją, galima sakyti, jog įstriža kauliukų eilė yra iš galų šviesos greičiu. Konfigūracija *d* (230 pav.) antru ėjimu pereina į stabilią konfigūraciją — 2×2 matmenų „bloką“. Konfigūracija *e* yra vadinamų „flip-flopų“ (besivartaliojančių konfigūracijų, kurios kas du ėjimai grįžta į pradinę būklę) paprasčiausias pavyzdys. Ji pakaitomis tampa tai vertikalia, tai horizontalia trijų kauliukų eile. Konuejus šį tripletą vadina „mirksinčiuoju“.

213 paveiksle pavaizduota penkių tetramino (keturi langeliai, iš kurių sudarytas tetramino elementas, tarpusavyje susieti bokšto ėjimu) evoliucija. Kaip jau matėme, kvadratas *a* priklauso „ramaus gyvenimo mėgėjų“ kategorijai. Konfigūracijos *b* ir *c* po antro ėjimo pereina į stabilią konfigūraciją, vadinamą „aviliu“. „Aviliai“ žaidime susidaro dažnai. Tetramino, pažymėtas raide *d*, taip pat virsta aviliu, tačiau tik po trečiojo ėjimo. Ypatingą susidomėji-

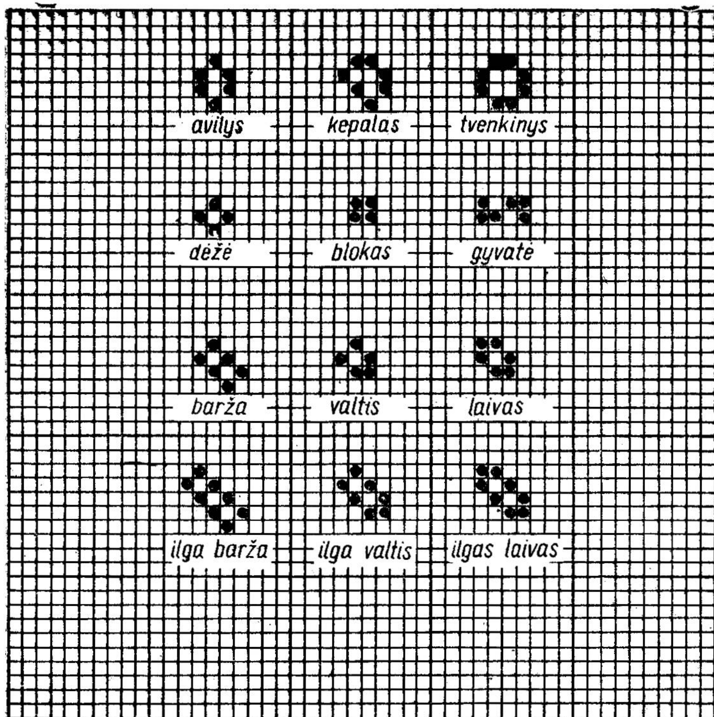


231 pav. Penkių tetramino evoliucija

mą kelia tetramino *e*, kuris po devinto ėjimo suskyla į keturis atskirus „mirksinčiuosius“ (visa konfigūracija vadinasi „navigacinės ugnys“). „Navigacinės ugnys“ priklauso flip-flopų poskyriui ir susidaro gana dažnai. 232 paveiksle parodyta dvylika dažniausiai pasitaikančių „ramaus gyvenimo mėgėjų“ konfigūracijų (t. y. stabilių konfigūracijų).

Paliekame skaitytojui pačiam savarankiškai laisvalaikiu paeksperimentuoti su dvylika pentamino (figūros, sudarytos iš penkių langelių, susijusių tarpusavyje taip, kad juos galima apeiti bokšto ėjimu) ir stebėti, kokie jie tampa. Pasirodo, kad penki iš jų žūva penktu ėjimu, du greitai tampa stabiliomis konfigūracijomis iš septynių langelių, o keturi po kelių ėjimų tampa „navigacinėmis ugnimis“. Vienintelė išimtis yra pentamino elementas, turintis raidės *r* formą (233 paveiksle ta konfigūracija pažymėta raide *a*). Jo vystymasis baigiasi ne taip greitai (konfigūracijos vystymasis laikomas baigtu, kai ji išnyksta, tampa stabilia konfigūracija arba pradeda periodiškai pulsuoti). Konuejus išnagrinėjo *r* formos pentamino vystymąsi iki keturi šimtai šešiasdešimtojo ėjimo, po kurio konfigūracija suskilo į daugybę sklandytuvų. Konuejus rašo, kad „iš figūros teliko daugybė negyvų (nesikeičiančių) nuolaužų ir tik kelios sritys, kuriose vis dar teberuseno gyvybė, todėl toli gražu nėra aišku, ar evoliucijos procesas turi tęstis be galo ilgai. Po keturiasdešimt aštuonių ėjimų *r* formos pentamino virto konfigūracija, kurios kairioji dalis sudaryta iš septynių kauliukų, o dešinioji — iš kauliukų, užpildančių dvi simetriškas sritis. Jeigu kairiosios dalies nebūtų, tos sritys išaugtų į „bityną“ su keturiais aviliais ir „navigacinėmis ugnimis“. Sutrikimas, kurį sukelia kairioji pusė, nulemia tai, kad „bitynas“ greitai įsiskverbia į „navigacines ugnis“ ir jas sudarantys keturi „mirksintys“ užgęsta vienas po kito, palikdami lentoje „kažką beformį“.

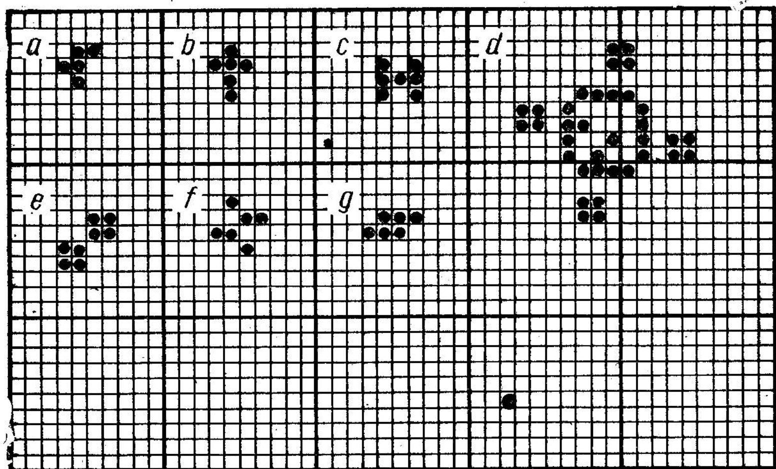
Į *r*-pentamino panašių ilgaamžių evoliucijai nagrinėti Konuejus kai kada naudoja skaičiavimo mašiną, kurios įrenginiai leidžia gautus duomenis atvaizduoti ekrane ir tuo būdu stebėti visus pakitimus, vykstančius žaidimų aikštėje. Be programos, kurią sudarė M. Dž. T. Gajus ir C. R. Burnas, dauguma žaidimo savybių būtų atskleista tik su dideliu vargu. Kaip paprastus pratimus siūlau



232 pav. Dažniausiai pasitaikančios stabilios konfigūracijos

skaitytojams pasekti iki galo sekančių šešių figūrų, vaizduojamų 233 paveiksle, evoliuciją. Tai „lotyniškas kryžius" (*b*), raidė H (*c*), „suktukai" (*d*), „bakenas" (*e*), „laikrodis" (*f*) ir „rupūžė" (*g*). Perkėlus raidės H skersinį brūkšnį per vieną langelį aukštyn, išeitų „vartai", turintys visai nelauktų savybių. Priešingai raidei H, kurios evoliucija baigiasi greit, „vartai" pasirodo besą gana ilgaamžė konfigūracija. Tik po 173 ėjimų ji suskyla į 5 „mirksinčiąsias", 6 „blokus" ir 2 „tvenkinius". Konuejus ištyrė visų heksamino ir visų heptamino elementų, išskyrus septynis, evoliuciją.

Vienas nuostabiausių Konuejaus atradimų yra 5 kauliukų konfigūracija „sklandytuvas", vaizduojamas 234 paveiksle. Po antrojo ėjimo „sklandytuvas" truputį pasislen-

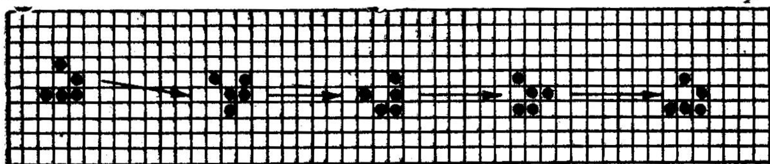


233 pav. Raidės *r(a)* formos pentamino ir šeši uždaviniai skaitytojams

ka ir įstrižai atsispindi. Toks simetrijos tipas geometrijoje vadinamas slenkančia simetrija; iš čia ir pats figūros pavadinimas.* Po dviejų kitų ėjimų „sklandytuvas" „baigia pikiruoti", laikosi pradinio kurso ir pasislenka per vieną langelį į dešinę ir per vieną langelį žemyn pradinės pozicijos atžvilgiu. Aukščiau buvo rašyta, kad šachmatų karaliaus žengimo greitis „Gyvenime" laikomas šviesos greičiu. Konuejus tokį terminą parinko dėl to, kad jo išrastame žaidime didesni greičiai tiesiog nepasiekiami. Nė viena konfigūracija nesigeneruoja taip greitai, kad slinktų tokiu greičiu. Konuejus įrodė, kad maksimalus greitis pagal įstrižainę sudaro ketvirtadalį šviesos greičio. Kadangi „sklandytuvas" generuojasi pats į save po keturių ėjimų ir kartu įstrižai nusileidžia per vieną langelį, sakoma, jog jis slenka greičiu, lygiu vienai ketvirtajai šviesos greičio.

Konuejus taip pat įrodė, kad bet kokios baigtinės figūros, vertikaliai arba horizontaliai pasislenkančios į laisvus langelius, greitis negali viršyti pusės šviesos greičio. Pabandykite savarankiškai rasti palyginti paprastą

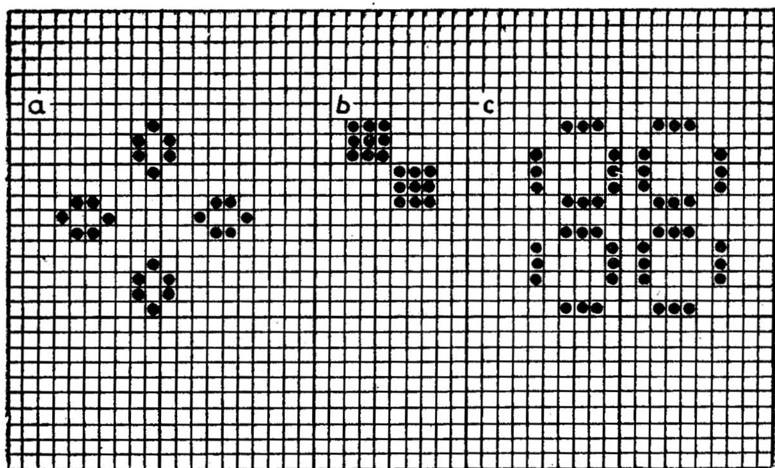
Sklandytuvas angliškai vadinamas *glider,* nuo žodžio *glide* — slysti. *Vert. į rusų k. past.*



234 pav. „Sklandytuvas“

figūrą, kuri slenka tokiu greičiu. Priminsime, kad judėjimo greitis lygus trupmenai, kurios skaitiklyje yra ėjimų, reikalingų generuotis figūrai, skaičius, o vardiklyje — skaičius langelių, per kiek pasislinko figūra. Jeigu kokia nors figūra kas keturi ėjimai horizontaliai arba vertikaliai pasislenka per du langelius, pakartodama savo formą ir orientaciją, tokios figūros greitis lygus pusei šviesos greičio. Reikia pasakyti, jog ieškoti lentoje slankiojančių figūrų — sunku. Konuejus iš viso žino tik keturias tokias konfigūracijas, kurias jis vadina „kosminiais laivais“. Joms priklauso mums jau žinomas „sklandytuvas“; raskite kitas tris. („Sklandytuvas“ laikomas „lengviausio svorio“ kosminiu laivu dėl to, kad visi kiti laivai sudaryti iš didesnio kauliukų skaičiaus.) Tris sunkesnius kosminius laivus Konuejus prašė laikyti paslaptyje. Pabandykite taip pat rasti dar kokias nors konfigūracijas, kurios, periodiškai pasikartodamos, slankioja lentoje įvairiomis kryptimis ir įvairiais kiek norima mažais greičiais.

Tris puikias figūras, vaizduojamas 235 paveiksle, atskleidė Konuejus ir jo bendradarbiai. „Bitynas“ (*a*) yra stabili konfigūracija, į kurią po 14 ėjimų pereina horizontali 7 kauliukų eilė. 5×5 matmenų kvadratas jau po pirmo ėjimo pereina į konfigūraciją, kuri atsiranda tik ketvirtame septynlangės eilės evoliucijos etape. Todėl 5×5 kvadratas tampa „bitynu“ po 11 ėjimų. „Aštuoniukė“ (*b*) — periodiškai atsistatanti konfigūracija, kurią atrado Nortonas. Ji ne tik panaši į aštuoniukę, bet jos ir periodas lygus aštuoniems. Konfigūracija, vaizduojama 235 paveiksle, *c*, vadinama „pulsaru SR 48-56-72“. Ji taip pat periodiškai atsistato kas trys ėjimai. Pulsaro būklė, vaizduojama paveiksle, sudaryta iš 48 kauliukų; antrame etape kauliukų skaičius išauga iki 56, trečiame — iki 72, paskui pulsaras vėl grįžta į pradinę būklę, o kauliukų skai-



235 pav. Trys nuostabios konfigūracijos — stabili (*a*) ir periodiškai pulsuojančios (*b* ir *c*)

čius sumažėja iki 48. Pulsaras susidaro po 32 ėjimų iš heptamino elemento, turinčio ištęstą raidės Π pavidalą: horizontalios penkių kauliukų eilės, kur po pirmuoju ir po paskutiniuoju kauliuku pakišta dar po vieną kauliuką.

Konuejus ištyrė visų horizontalių eilių iš n kauliukų evoliuciją iki $n=20$ imtinai. Jau žinome, kas atsitinka, kai $n \leqslant 4$. Penkių kauliukų eilė pereina į „navigacines ugnis", šešių kauliukų išnyksta, septynių kauliukų eilė sudaro „bityną", aštuonių — keturis „avilius" ir keturis „blokus", devynių kauliukų eilė virsta dviem „navigacinių ugnių" komplektais, o eilė, sudaryta iš dešimties kauliukų, pereina į „pentadekatloną" — periodiškai atsistatančią konfigūraciją su penkiolikos ėjimų periodu. Vienuolikos kauliukų eilė evoliucionuoja, pavirsdama dviem „mirksinčiaisiais"; dvylikos langelių eilė pereina į du „avilius", trylikos — į du „mirksinčiuosius". Jeigu eilė sudaryta iš 14 arba 15 kauliukų, ji visiškai išnyksta, o jei iš 16 kauliukų, išeina didelis „navigacinių ugnių" rinkinys, sudarytas iš 8 „mirksinčiųjų". Septyniolikos langelių eilės evoliucija baigiasi keturiais „blokais"; eilės, sudarytos iš 18 ir 19 kauliukų, visiškai dingsta nuo lentos, o dvidešimties langelių eilės evoliucija baigiasi dviem „blokais".

Konuejus taip pat ištyrė eilių, sudarytų iš penkių langelių grupių, kurios viena nuo kitos atskirtos tuščiu langeliu, evoliuciją. Eilė 5—5* po dvidešimt pirmojo ėjimo virsta „pulsaru SR 48—56—72". Eilė 5—5—5 pereina į keturis „blokus" ir keturis „mirksinčiuosius"; eilės 5—5—5—5 evoliucija baigiasi keturiais „bitynais" ir keturiais „mirksinčiaisiais"; eilė 5—5—5—5—5 baigiasi „efektingai išmėtytais" lentoje aštuoniais „sklandytuvais" ir aštuoniais „mirksinčiaisiais". Po to sklandytuvai poromis susiduria ir suskilę virsta aštuoniais „blokais". Eilė, sudaryta iš šešių grupių po penkis langelius, (5—5—5—5—5—5), virsta keturiais „mirksinčiaisiais", o sekančios eilės 5—5—5—5—5—5—5 evoliucija, Konuejaus nuomone, sudaro „puikų reginį, stebint ją skaičiavimo mašinos ekrane". Šios eilės evoliucija nebuvo iki galo ištirta.

Konuejaus žaidimas „Gyvenimas" sukėlė milžinišką mokslininkų, nagrinėjančių ESM taikymo problemas, susidomėjimą. Autorius laiko, kad pravartu apsistoti ties kai kuriais pagrindiniais „automatų iš langelių teorijos" vystymosi faktais. Ši teorija — mokslo, nagrinėjančio žaidimus, analogiškus Konuejaus „Gyvenimui", sritis.

Viskas prasidėjo 1950 metais, kai Džonas fon Neimanas nutarė įrodyti, jog gali egzistuoti save atkuriantys automatai. Tokia mašina, aprūpinta reikalingomis instrukcijomis, sugebėtų pagaminti tikslią savo kopiją. Savo ruožtu dvi mašinos („mama" ir „duktė") galėtų sudaryti dar dvi; keturios mašinos sukurtų aštuonias ir t. t. Fon Neimanas pirmasis įrodė, kad tokios mašinos gali egzistuoti. Jis rėmėsi mašinos, sugebančios judėti atsarginių dalių sandėlyje, pasirenkančios reikalingas detales bei surenkančios kaip du vandens lašai į save panašią mašiną, „kinematiniais" modeliais. Vėliau, remdamasis idėja, kurią suformulavo jo draugas Stanislovas Klamas, fon Neimanas pateikė dar puikesnį ir abstraktesnį įrodymą, kad gali būti save atkuriančių mašinų.

Naujajame fon Neimano įrodyme buvo iš esmės remiamasi „homogeninės langelių erdvės", ekvivalenčios begalinei šachmatų lentai, sąvoka. Kiekvienas tokios erdvės langelis gali būti bet kokiame, bet baigtiniame skaičiuje „būvių", tarp jų ir „ramybės būvyje" (dar vadina-

* T. y. eilė iš dviejų penkialangių grupių, atskirtų vienu tuščiu langeliu. — *Vertėjo į rusų k. pastaba.*

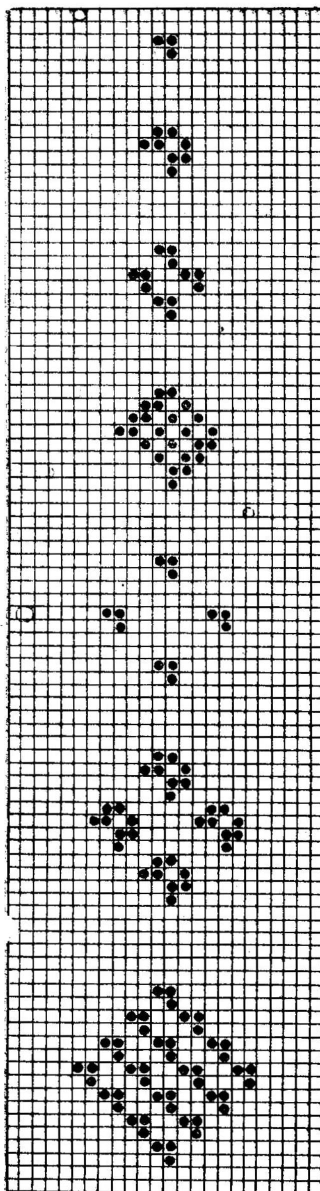
mame tuščiu, arba nuliniu, būviu). Bet kurio langelio būviui turi įtakos baigtinis skaičius kaimyninių langelių. Erdvės būviai laike keičiasi diskretiškai, pagal „perėjimo taisykles", kurios vienu metu turi būti taikomos visiems langeliams. Langeliai atitinka pagrindines automato su baigtiniu būvių skaičiumi dalis, o konfigūracija iš „gyvų" langelių — idealizuotą automato modelį. Tokioje langelių erdvėje ir vyksta Konuejaus sugalvoto žaidimo „Gyvenimas" veiksmas. „Gyvenime" kiekvienam langeliui kaimyniniais laikomi aštuoni jį supantys langeliai. Langelis gali būti dviejuose būviuose (arba ant jo padėtas kauliukas, arba jis tuščias). Perėjimo taisyklės nustatomos Konuejaus genetikos dėsniais (gimimas, žūtis ir išlikimas). Fon Neimanas, taikydamas perėjimo prie erdvės, kurios kiekvienas langelis (arba ląstelė) gali būti 29 būviuose ir turėti keturis kaimyninius langelius (gretimi vertikalūs ir horizontalūs), taisykles įrodė, jog galima pati save atkurianti konfigūracija, sudaryta maždaug iš 200 000 langelių.

Tokių pasibaisėtinų matmenų konfigūraciją fon Neimanas pasirinko dėl to, kad jis ketino pritaikyti savo įrodymą realiems automatams ir specialiai pasirinko langelių erdvę, galinčią imituoti Tjuringo mašiną — idealų automatą (pavadintą išradėjo, anglų matematiko A. M. Tjuringo vardu), sugebantį atlikti bet kokius skaičiavimus. „Panardinęs" universalią Tjuringo mašiną į jo paties sudarytą konfigūraciją, fon Neimanas galėjo sukurti „universalų konstruktorių", sugebantį sudaryti bet kokią konfigūraciją tuščiuose erdvės langeliuose, tarp jų ir tikslią savo paties kopiją. Per laiką, praėjusį po fon Neimano mirties (jis mirė 1957 metais), jo pasiūlytą save atkuriančių sistemų (kalbama apie „švarų" egzistencijos įrodymą, o ne apie konfigūracijos, kuri naudojama fon Neimano įrodyme, sudarymą) egzistencijos įrodymą pasisekė gerokai suprastinti. Paprasčiausią įrodymą rado Masačuseto technologinio instituto inžinerinio fakulteto absolventas Edvinas R. Benksas. Įrodymui naudojami lizdeliai, kurie gali būti tik 4 būviuose.

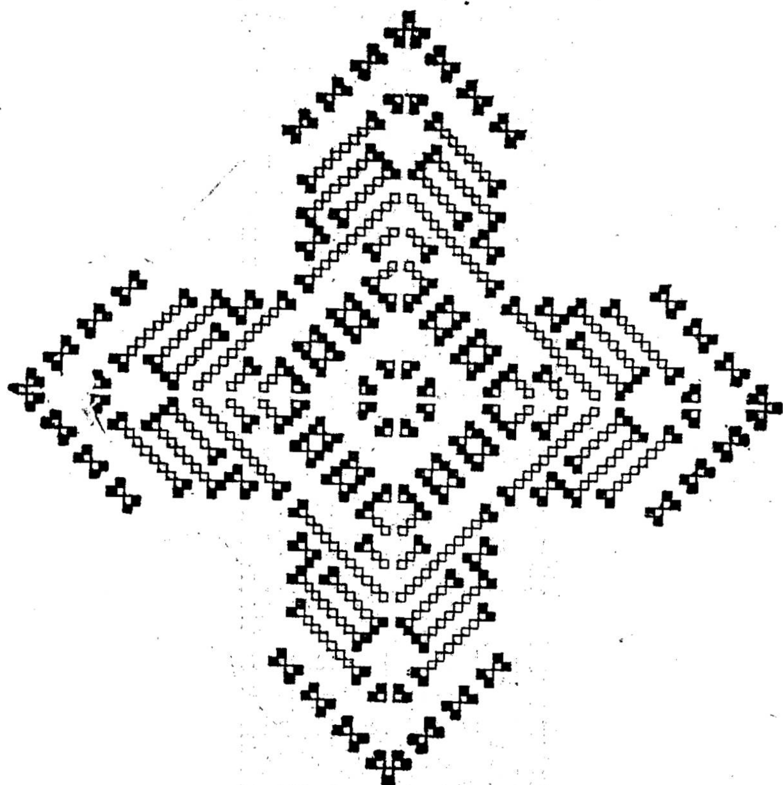
Sugebėjimą atkurti pačiam save trivialia prasme — nesinaudojant konfigūracijomis, pagrįstomis Tjuringo mašina, — sukonstruoti lengva. Stebinančiai paprastą „trivialios" pačią save atkuriančios sistemos pavyzdį prieš 10 metų pasiūlė Edvardas Fredkinas. Toje sistemoje lizdeliai

gali būti tik dviejuose būviuose; kiekvienas būvis, kaip ir fon Neimano pavyzdyje, turi keturis kaimynus, o perėjimo taisyklės tokios. Kiekvienas langelis laiko momentu t turintis lyginį skaičių (0, 2, 4,...) gyvų kaimynų, laiko momentu $t+1$ lieka tuščias (t. y. pereina į nulinį būvį, arba, jeigu jis buvo nuliniame būvyje, jame ir lieka). Kiekvienas langelis, laiko momentu t turintis nelyginį skaičių (1, 3, 5,...) kaimynų, laiko momentu $t+1$ atgyja (t. y. pereina į nenulinį būvį arba, jeigu jame buvo, jame ir išsilaiko). Nesunku parodyti, kad kas 2^n ėjimų (n priklauso nuo konfigūracijos pasirinkimo) bet kokia gyvų langelių konfigūracija pati save atkuria keturis kartus: viena kopija išsidėstys dešinėje, kita — kairėje, trečia — viršuje, ketvirta — apačioje tos (jau trečios) vietos, kurioje buvo pradinė konfigūracija. Keturiose konfigūracijose lieka 2^n išnykusio organizmo langelių. Naujoji konfigūracija po 2^n žingsnių vėl dauginsis (su atsikūrimo koeficientu 4) ir t. t. Kopijų skaičius auga geometrine progresija 1, 4, 16, 64... . 236 paveiksle pavaizduoti du stataus kampo formos trimino dauginimosi ciklai. Teris Vinogradas 1967 metais apibendrino Fredkino taisyklę bet kuriam kaimynų skaičiui, bet kokiai langelių ribojimosi schemai ir bet kokiems matmenims (Vinogrado rezultatai taikomi langeliams, kurių būvių skaičius pirminis).

Daugybę tokios rūšies automatų, kurie vienas nuo kito skiriasi gretimų langelių ribojimosi schema, būvių skaičiumi ir perėjimo taisyklėmis, ištyrė S. Ulamas. 1967 metais jo (drauge su Robertu G. Šrantu) paskelbtame straipsnyje „Apie rekursyviai apibrėžtus geometrinius objektus ir augimo schemas“ Ulamas aprašė keletą žaidimų. 237 paveiksle parodyta 45-toji organizmo, kuris gimė iš vieno vienintelio kauliuko, stovėjusio centriniame langelyje, karta. Kaip ir Konuejaus žaidime, langeliai Ulamo žaidime gali būti dviejų būvių, bet gretimais langeliais laikomi tik tie, kurie ribojasi vertikaliai ir horizontaliai („kaimynai“ fon Neimano prasme). Kauliukas gimsta langelyje, turinčiame vieną ir tik vieną kaimyną, o visi n-tosios kartos langeliai žūsta, gimus $n+2$ kartai. Kitaip sakant, bet kuriame evoliucijos etape išlieka gyvos tik dvi paskutinės kartos. 237 paveiksle naujai gimę langeliai juodi (jie 444) (prieš tai buvusios kartos balti langeliai — jie 404 — išnyks sekančiu ėjimu). Atkreipkite



236 pav. Trimino dauginimasis



237 pav. S. Ulamo pasiūlyto langelių žaidimo konfigūracija, kuri susidaro 45 kartoje

dėmesį į charakteringą detalę, kurią Ulamas pavadino „apgraužtu kaulu“. Ulamas eksperimentavo ir su tokiais žaidimais, kuriuose dvi konfigūracijos gali augti tol, kol susiduria. Po susidūrimo prasidėjusiame „mūšyje“ vienai pusei kai kada pavykdavo įveikti kitą, kai kada abi armijos išnykdavo. Ulamas taip pat išnagrinėjo žaidimus trimatėse lentose — kubiniuose parketuose, užpildančiuose visą erdvę. Pagrindiniai Ulamo rezultatai surinkti jo straipsniuose, atspausdintuose rinkinyje „Iš langelių sudarytų automatų teorijos apžvalga“. *

* Essays on Cellular Automata. University of Illinois Press, 1970, ed. by Arthur W. Burks.

Analogiškus žaidimus galima sukurti ir kitokiose begalinėse lentose, kurių langeliai yra lygiakraščių trikampių ir taisyklingų šešiakampių formos. Nors ir išorinis skirtumas ryškus, iš esmės tie žaidimai niekuo nauju nepasižymi ir, remiantis atitinkamu „kaimyninių" langelių apibrėžimu, juos galima laikyti ekvivalenčiais žaidimais įprastoje lentoje su kvadratų formos langeliais. Gretimais gali būti laikomi ne tik tie langeliai, kurie turi bendras sienas arba viršūnes. Pavyzdžiui, šachmatuose langeliui, kuriame stovi žirgas, gretimais (t. y. turinčiais įtakos jo būviui) laikomi visi langeliai, į kuriuos galima pereiti žirgu arba kuriuose stovi jam grasinančios figūros. Kaip pastebėjo Berksas, tokius žaidimus, kaip šachmatai, šaškės ir go, galima laikyti iš langelių sudarytais automatais su sudėtingomis kiekvieno langelio aplinkomis (aplinka vadinsime kaimynų visumą) ir perėjimo taisyklėmis. Varžovai, darydami eilinį ėjimą, iš daugybės galimų būvių pasirenka tą, kuris turi atvesti juos prie tam tikro galutinio būvio — išlošimo.

Vienas žymesnių indėlių į automatų teoriją yra Edvardo F. Muro pasiūlytas būdas konfigūracijų, kurias Džonas V. Tjukis pavadino „Edemo sodais", egzistencijai įrodyti. Šios konfigūracijos negali susidaryti žaidimo procese, nes nėra jokios kitokio tipo konfigūracijos, kuri jas pagimdytų. „Edemo sodai" turi būti duoti iš pat pradžių — nulinėje kartoje. Kadangi tokio tipo konfigūracijos neturi „pirmtakų", jos negali būti pačios save atkuriančios. Smulkiai Muro metodas išdėstytas populiariame jo straipsnyje „Matematika biologijos moksluose".* Tikslesnis išdėstymas pateiktas jau minėtame Berkso redaguotame rinkinyje.

Alvis R. Smitas aptiko paprastą būdą Muro metodui Konuejaus žaidime pritaikyti. Iš Muro teoremos matyti, kad „Edemo sodų" tipo konfigūracija turi susidaryti Konuejaus žaidime. Gaila, bet teoremos įrodymas nepasako, kaip rasti „Edemo sodus", ir jie iki šiol neatrasti. „Edemo sodų" tipo konfigūracija gali pasirodyti esanti ir gana paprasta, ir itin sudėtinga. Remdamasis viena Muro išvestų formulių, Smitas sugebėjo įrodyti, kad tokią konfigūraciją visada galima sutalpinti kvadrate su 10 milijardų langelių kraštine, tačiau ir šis rezultatas nedaug tepalengvina konfigūracijos paieškas.

**Scientific American*, September 1964.

Pats Smitas dirba, kurdamas iš langelių sudarytus automatus, imituojančius vaizdus atpažįstančias mašinas. Nors šiandien tokia problema gali atrodyti tik teorinė, visiškai galimas dalykas, jog kada nors skaičiavimo mašinoms ir automatams prireiks „languoto apvalkalo" vaizdams atpažinti.

„Sklandytuvinio šautuvo" sukūrimas jaudinančiai rodo, kaip Konuejaus žaidime galima imituoti Tjuringo mašiną, sugebančią (iš principo) atlikti visus veiksmus, kurie prieinami tik tobuliausioms šiuolaikinėms ESM. „Sklandytuvus" būtų galima naudoti kaip „vienetinius impulsus" informacijai išsaugoti ir perduoti, taip pat visoms operacijoms, kurias galima atlikti pagal realios skaičiavimo mašinos schemą. Jeigu Konuejaus žaidimu tikrai galima sukurti Tjuringo mašiną, tai kitas klausimas būtų sukurti universalų konstruktorių, kuris padėtų konfigūracijoms netrivialiai save atkurti. Iki šiol niekam nepavyko „sukurti" Tjuringo mašinos tokioje erdvėje, kurios visi langeliai galėtų būti tik dviejuose būviuose, o „kaimyniniai" langeliai būtų suprantami Konuejaus prasme (t. y. turėtų arba bendrą kraštinę, arba bendrą viršūnę). Įrodyta, kad erdvėje, kurios visi langeliai gali būti dviejuose būviuose, o „kaimynystė" suprantama fon Neimano prasme, Tjuringo mašinos sudaryti negalima.

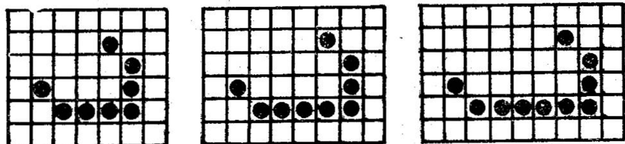
ATSAKYMAI

„Lotyniškas kryžius" žūva penktu ėjimu, raidė H — šeštu.

Kitos trys konfigūracijos periodiškai atkuria pačios save (periodą sudaro 2 ėjimai; anksčiau tokias konfigūracijas vadinome flip-flopais). Paties Konuejaus žodžiais, „rupūžė" kvėpuoja, „laikrodis" tiksi, „bakenas" užsidega", ir kiekvienu atveju periodas lygus dviem. „Suktuko" vidinė dalis kiekvienu kitu ėjimu pasisuka 90° kampu, o visi išoriniai kauliukai lieka savo vietose. Panašias periodines konfigūracijas Konuejus vadina „biliardo stalais", kad galima būtų jas atskirti nuo tikrai periodinių konfigūracijų, tokių, kaip „rupūžė", „laikrodis" ir „bakenas".



238 pav. Pradinis (juodi ratukai) ir galutinis (šviesūs) *r* pavidalo pentamino evoliucijos būvis. (Šeši sklandytuvai jau pasislėpė už horizonto)



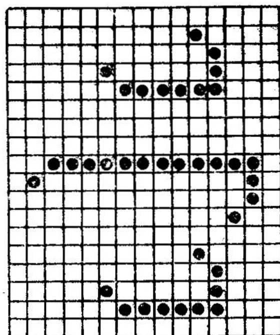
239 pav. Lengvo (kairėje), vidutinio (centre) ir sunkaus (dešinėje) tipo „kosminiai laivai“

Iš visų figūrų, pavaizduotų 233 paveiksle, sudėtingiausia reikia laikyti raidės *r* formos pentamino. Ji virsta stabilia konfigūracija tik po tūkstančio šimto trečiojo ėjimo. Šeši lentoje atsiradę „sklandytuvai“ tolsta nuo centro vis didesniu ir didesniu atstumu, ir galų gale apie buvusį pentamino lieka (238 pav.) keturi „mirksintys“, vienas „laivas“, vienas „laivelis“, vienas „pyragas“, keturi „aviliai“ ir aštuoni „blokai“. Šio uždavinio sprendinys buvo gautas, pasitelkus ESM.

239 paveiksle parodyti trys „kosminiai laivai“ (be jau žinomo „lengviausio svorio kosminio laivo“ — „sklandytuvo“). Visi jie slenka horizontaliai iš kairės į dešinę greičiu, lygiu pusei šviesos greičio. Skrendant iš jų išlekia „kibirkštys“, kurios tuoj pat gęsta, „laivams“ skriejant toliau. Pavieniai „kosminiai laivai“ be eskorto ilgiu negali užimti daugiau kaip šešis langelius, nes priešingu atveju lentoje atsiranda įvairių smulkių figūrų, trukdančių laivui judėti. Konuejus aptiko, kad ilgesniems „laivams“ (kuriuos jis pavadino „supersunkiais“) būtinas dviejų ar daugiau mažesnių „laivų“ eskortas. Eskorto laivai neleidžia atsirasti kliūtims supersunkių laivų kelyje. 240 paveiksle pavaizduotas didžiausias „kosminis laivas“, kuriam pakanka dviejų eskortuojančių mažesnio dydžio „laivų“. Dar ilgesniems „laivams“ reikalinga ištisa „eskortuojančių laivų“ flotilija. Konuejus apskaičiavo, jog šimto langelių ilgio „laivui“ reikia trisdešimt trijų „laivų“ eskorto.

Eilės 5—5—5—5—5—5—5 (septynios grupės po 5 kauliukus, kurios viena nuo kitos atskirtos vienu langeliu) evoliucija po trijų šimtų dvidešimt trijų ėjimų stabilizuojasi, virtusi keturiomis „navigacinėmis ugnimis“, aš-

tuoniais „mirksinčiais“, aštuoniais „pyragais“, aštuoniais „aviliais“ ir keturiais „blokais“, t. y. 192 kauliukų konfigūracija. Ši efektinga pabaiga užfiksuota 241 paveiksle; jame vaizduojama vieno skaitytojų atsiųsta elektroninės skaičiavimo mašinos juosta. Kadangi pradinės konfigūracijos simetrija išlieka, jai evoliucionuojant, kauliukų išsidėstymas 241 paveiksle išlaiko vertikalios ir horizontalios simetrijos ašis, kurias turėjo pradinė konfigūracija. Kauliukų skaičius pasiekia maksimumą (492 kauliukai) du šimtai aštuoniasdešimt trečioje kartoje.

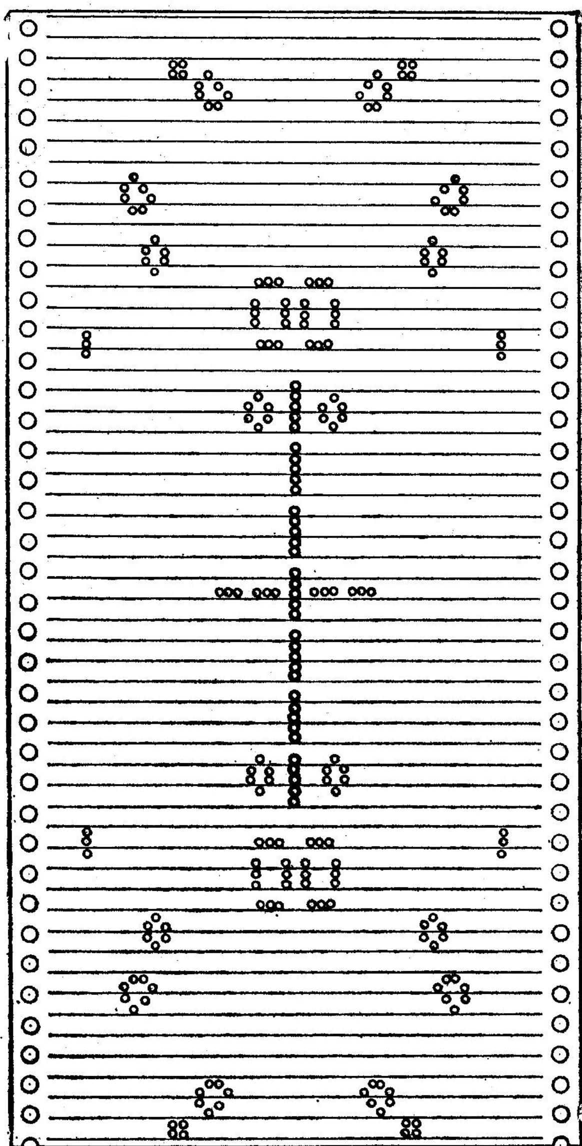


240 pav. „Supersunkusis kosminis laivas“, eskortuojamas dviejų „sunkiųjų kosminių laivų“

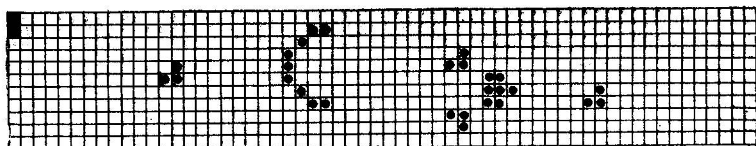
Verta pažymėti, kad tipo $n—n—n—$... eilės įdomios tik tada, kai n lygus bent 5, nes su mažesnėmis n reikšmėmis tarp grupių iš n kauliukų nėra tarpusavio sąveikos. Eilės 1—1—1... ir 2—2—2... iš karto išnyksta. Eilė 3—3—3—... sudaryta iš vienų tik „mirksinčiųjų“, o eilė 4—4—4—... antru ėjimu pereina į stabilią „avilių“ eilę.

1970 metų lapkritį Konuejus turėjo išmokėti pažadėtą premiją. Grupė matematikų iš Masačuseto technologijos instituto sugebėjo sukurti „šautuvą“, šaudantį „sklandytuvais“! 242 paveiksle vaizduojama konfigūracija, kuri virsta tokiu „šautuvu“. Keturiasdešimtuoju ėjimu iš šautuvo išlekia pirmasis „sklandytuvas“, ir taip iki begalybės kas 30 ėjimų išlekia po „sklandytuvą“. Pasirodžius vis naujam „sklandytuvui“ lentoje penkiais kauliukais padaugėja, taigi populiacija neribotai auga.

„Sklandytuvų šautuvas“ jo kūrėjams padėjo padaryti ir daug kitų žymių atradimų. 243 paveiksle vaizduojamas 13 „sklandytuvų“ susidūrimas. Subyrėję į dalis, jie virsta... „sklandytuvų šautuvu“! Paskutiniame paveiksle „sklandytuvų šautuvas“ veikia, iššaudamas vieną „sklandytuvą“ po kito. Ta pati tyrinėtojų grupė aptiko pentadekatloną (244 pav.) — konfigūraciją, sugebančią „sugerti“ bet kurį su ja susidūrusį „sklandytuvą“. Pentadekatlonas gali taip pat atmušti „sklandytuvą“, pakeisda-

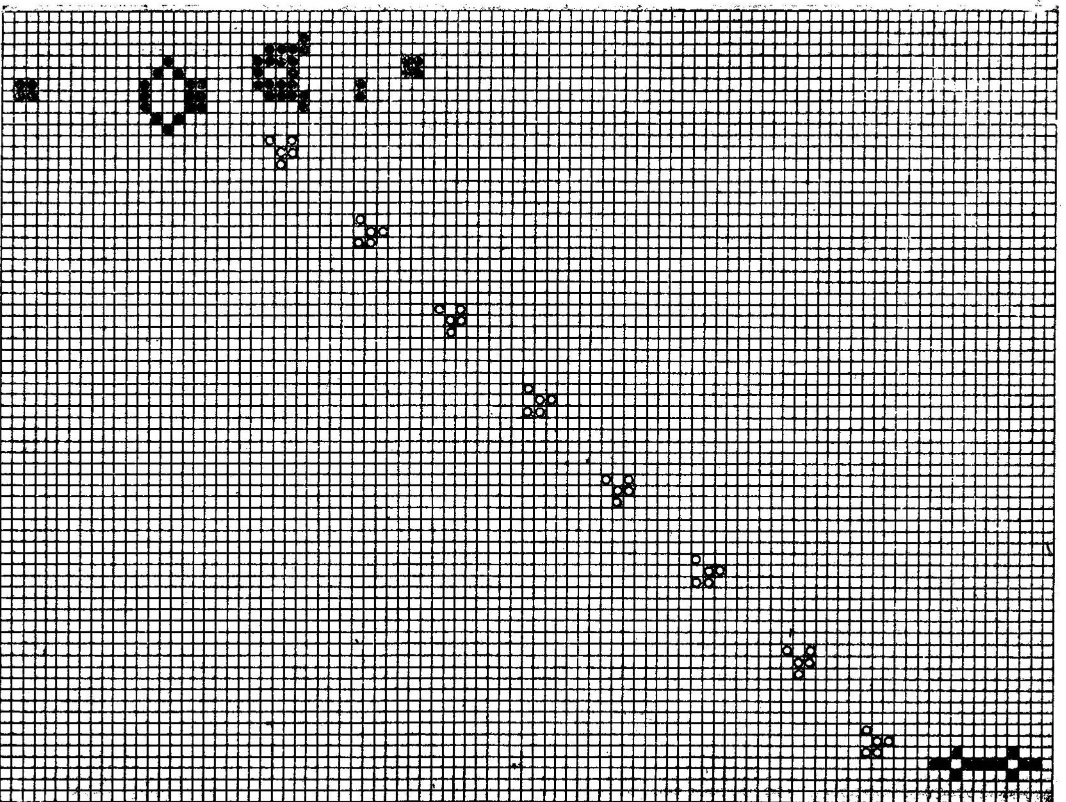


241 pav. Pradinis (juodžiau išspausdinti nuliukai) ir galutinis (šviesūs) eilės 5—5—5—5—5—5—5 būvis



242 pav. Konfigūracija, kuri virsta „sklandytuvų šautuvu“.

243 pav. Susidūrus 13 „sklandytuvų“ (juodžiau išspausdinti nuliukai), atsiranda „sklandytuvų šautuvas“ (75-toji karta). Periodiškai atkurdamas save (per periodą, lygų 30 ėjimų) jis, baigiantis kiekvienam periodui, „iššauna“ vieną „sklandytuvą“



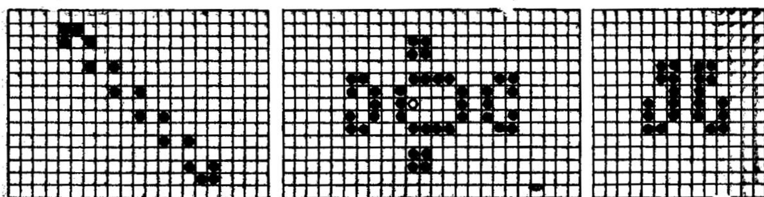
244 pav. Pentadekatlonas (dešiniajame apatiniame kampe) „sugeria „sklandytuvus“, iššautus iš „šautuvo“

mas jo kursą 180°. Išdėsčius vieną priešais kitą du pentadekatlonus, galima tarp jų organizuoti „teniso mačą“: „sklandytuvą“ jie mėtys kaip kamuoliuką. Visiškai nelaukti rezultatai gaunami, nagrinėjant susikertančius „sklandytuvų“ srautus“: gaunamos konfigūracijos gali būti pačios keisčiausios ir išmetančios „sklandytuvus“. Kartais konfigūracija, susidaranti susikertant „sklandytuvų“ srautams, pradeda augti ir plėtodamasi „sugeria“ visus „šautuvus“. Kitais atvejais skeveldros, išlekiančios iš srities, kurioje susikerta srautai, gali išvesti iš rikiuotės vieną ar kelis „šautuvus“. Paskutinis matematikų grupės iš Masačuseto technologijos instituto atradimas, įtikinančiai liudijantis apie jų virtuoziškumą,— gudri kelių „šautuvų“ kombinacija. Šios kombinacijos generuojamų „sklandytuvų“ srautų sankirtoje atsiranda ištisa lengviausio tipo „kosminių laivų“ gamykla“, o kas 300 ėjimų vienas „laivas“ net paleidžiamas!

Buvo atrasta daug kitų periodiškai save atkuriančių konstrukcijų (245 pav.). Viena iš jų, „lazda“, turi periodą 2 (anksčiau tokio tipo „kūlverstines“ konfigūracijas vadinome flip-flopais). Ją galima kiek norint ištempti. Abu jos būviai pereina į kitą būvį atspindžiu. Antrąją konfigūraciją — vadinamą „Herco osciliatorių“ — dar anksčiau atskleidė Konuejus. Po kiekvienų keturių ėjimų šviesus taškas persikelia prie vidinio rėmelio priešingos kraštinės, dėl to visa figūra „osciliuojasi“ su periodu 8. Trečioji konfigūracija vadinama „tumbleriu“, nes kas 7 ėjimai jos viršus ir apačia pasikeičia vietomis (ji „persijungia“).

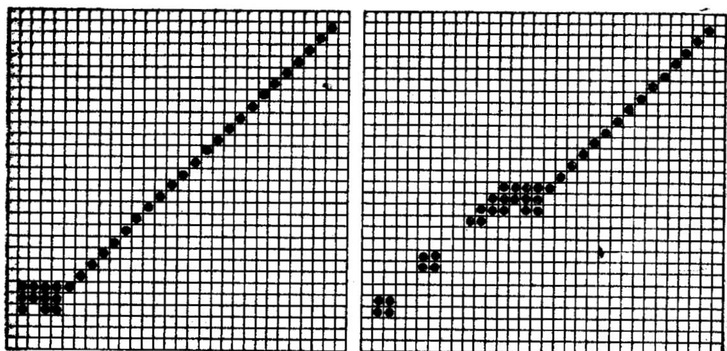
„Češyro katiną“ (246 pav., *a*) atrado K. R. Topkinsas iš Kalifornijos. Po *b, c, d, e* ėjimų iš katino lieka tik „šypsena“ (*f*), o „snukis“ visiškai išnyksta. Sekančiu ėjimu „šypsena“ taip pat išnyksta, ir tik nesikeičiantis blokas — katino letenos atspaudas (*g*) — primena, kad kažkada toje vietoje buvo katinas.

„Kertamoji“ 247 paveiksle slenka iš apačios į viršų išilgai begalinės įstrižainės šviesos greičiu, osciluodama su periodu, lygiu 4, ir išilgai viso kelio palieka stabilias figūras, simbolizuojančias pėdas. „Gaila,— rašo „kertamosios“ išradėjas,— kad man nepavyko sugalvoti sėjėjo — judančios figūros, kuri galėtų apsėti lauką tokiu pat greičiu, kokiu kertamoji jį nupjauna“.

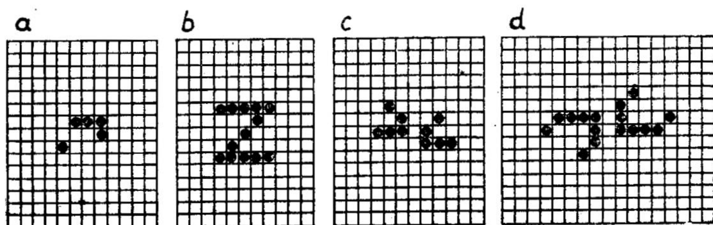


245 pav. „Lazda“ (kairėje), „Herco osciliatorius“ (centre) ir „tumbleris“ (dešinėje)

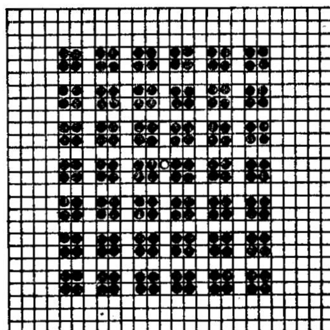
246 pav. „Češyro katino“ išnykimas (*a*); lieka tik jo šypsena (*f*), kuri taip pat išnyksta, virsdama katino letena (*g*)



247 pav. „Kertamosios“ nulinė (kairėje) ir dešimtoji (dešinėje) karta



248 pav. Kiekviena konfigūracija (*a* ir *b*) virsta „sklandytuvu“. Dešinėje (*c* ir *d*) pavaizduoti du „sklandytuvai“ prieš susidūrimą



249 pav. Konfigūracija, užsikrėtusi „virusu“ (šviesus taškas centre)

Veinraitas, „sklandytuvų šautuvo“ išradėjas, yra daugelio įdomių tyrinėjimų autorius. Atsitiktinai išdėliojęs 4 800 kauliukų 120×120 matmenų kvadrato langeliuose (kauliukų tankis lygus $\frac{1}{3}$), jis stebėjo jų evoliuciją per 450 kartų. Tos „pirmykštės šaltienos“, kaip ją pavadino Veinraitas, tankis labai sumažėjo ir tapo lygus tik $\frac{1}{6}$. Ar galų gale visi kauliukai išnyks ar, kaip tvirtina Veinraitas, smelksis iš kartos į kartą su kažkokiu minimaliu pastoviu tankiu — atsakymas į šį klausimą dar nežinomas. Per 450 kartų pasisekė pastebėti 42 „trumpaamžius sklandytuvus“. Veinraitui pasisekė aptikti 14 konfigūracijų, kurios po pirmo ėjimo virsta vienu ar keliais „sklandytuvais“. Daugiausia „sklandytuvų“ (14) susidaro iš figūros, pavaizduotos 248 paveiksle, *a*. Raidė Z (248 pav., *b*) po 12 ėjimų virsta 2 „sklandytuvais“, judančiais priešingomis kryptimis. Jeigu du „sklandytuvai“ slenka, prasilenkdami su kitu taip, kaip vaizduojama 248 paveiksle, *c*, po ketvirto ėjimo visi kauliukai nuo lentos dingsta. Jeigu du „lengvi kosminiai laivai“ skrieja pavojingu kursu, kuris baigiasi susidūrimu, po septinto ėjimo lenta lieka absoliučiai tuščia, kaip ir dviejų „sklandytuvų“ susidūrimo atveju.

Be to, Veinraitas eksperimentavo su įvairiais begaliniais laukais, užpildydamas juos taisyklingomis stabiliomis figūromis. Tokias konfigūracijas jis pavadino agarais.* Pavyzdžiui, į agarą, kuris pavaizduotas 249 paveiksle, įdėjus vieną „virusą“ (t. y. vieną kauliuką) taip, kad jis liestų keturis blokus, agaras sunaikins virusą, ir dviem ėjimais įgis buvusią formą. Įdėjus virusą į langelį taip, kaip vaizduojama paveiksle (arba į bet kurį iš septynių ekvivalenčių langelių, simetriškai išsidėsčiusių apie blokus), agaras neišvengiamai pradės irti. Virusas laipsniškai agaro viduje susiurbs visus aktyvius ruožus, palikdamas lauke tuščią dvipusę simetrišką sritį (apytiksliai ovalo formos). Jos ribos tolydžiai plečiasi į visas puses, ir ne išimtis, kad jos plėsis be galo ilgai.

---

* Agaras — produktas, gaunamas iš kai kurių jūros augalų. Gerai tirpsta karštame vandenyje, o atšalęs virsta tirštais drebučiais. Tinka kaip standi terpė mikroorganizmams auginti. — *Vert. į rusų k. past.*

LITERATŪRA

I SKYRIUS

Райзер Г. Дж. Комбинаторная математика. (Библиотека сб. «Математика».) М., изд-во «Мир», 1966. Гл. 7. Ортогональные латинские квадраты.

Скорняков Л. А. Проективные плоскости. *Успехи математических наук,* **6**, № 6, 112—154 (1951).

Сойер У. У. Прелюдия к математике. М., изд-во «Просвещение», 1965. Гл. 13. Конечные арифметики и конечные геометрии.

Bose R. C., Shrikhande S. S. On the Falsity of Euler's Conjecture about the Non-Existence of Two Orthogonal Latin Squares of Order 4t+2, *Proceedings of the National Academy of Sciences,* **45,** № 5, 734—737 (May 1959).

Bose R. C., Shrikhande S. S. On the Construction of Sets of Mutually Orthogonal Latin Squares, *Transactions of the American Matematical Society,* **95,** 191—209 (1960).

Bose R. C., Shrikhande S. S., Parker E. T. Further Results on the Construction of Mutually Orthogonal Latin Squares and the Falsity of Euler's Conjecture. *Canadian Journal of Mathematics,* **12,** 189—203 (1960).

Parker E. T. Orthogonal Latin Squares. *Proceedings of the National Academy of Sciences,* **45,** № 6, 859—862 (June 1959).

Parker E. T. Computer Study of Orthogonal Latin Squares of Order Ten. *Computers and Automation, August* 1962, p. 1—3.

Tarry G. Le problème de 36 officiers. *Comptes Rendu de l'Association Francaise pour l'Avancement de Science Naturel,* **1,** 122—123 (1907); **2,** 170—203 (1901).

II SKYRIUS

Бронштейн И. И. Эллипс. *Квант,* № 9, № 26—36 (1970).

Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1951. Гл. I. Простейшие кривые и поверхности.

Смородинский Я. А. Движение планет. *Квант,* № 1, 20—27 (1970).

Johnson D. A. Paper Folding for Mathematical Class National Council of Teachers of Mathematics, 1957.

III SKYRIUS

Ehrenfeucht A. Ciekawy czworościan. Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1966.

Johnson P. B. Stacking Colored Cubes. *American Mathematical Monthly,* **63,** № 6, 392—395 (June—July 1956).

Kraitchik M. Mathematical Recreations. New York, Dover Publications, 1953, p. 312—313.
MacMachon P. A. New Mathematical Pastimes. Cambridge, Cambridge University Press, 1921.
Rouse Ball W. W. Mathematical Recreations and Essays. Revised Edition, London, Macmillan, 1960, p. 112—114.
Winter F. Das Spiel der 30 Bunten Würfel. Leipzig, 1934.

IV SKYRIUS

Коксетер Г. С. М. Действительная проективная плоскость. М., Физматгиз. 1959.
Коксетер Г. С. М. Введение в геометрию. М., изд-во «Наука», 1966. The Graphic Work of M. C. Escher. London, 1961.
Macgillavry C. H. Symmetry Aspects of C. Escher's Periodie Drawings. Publication of the International Union of Crystallography, Utrecht, 1965.

V SKYRIUS

Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. М., изд-во «Мир», 1971.
Lehman A. A Solution of the Shannon Switching Game. *Journal of the Society of Industrial Applied Mathematics,* 12, № 4, 687—725 (December 1964).
Murray H. J. R., A. History of Board Games. Oxford, Oxford University Press, 1952.
"Professor Hoffmann" (Angelo Lewis). The Book of Table Games. London, George Routledge and Sons, 1894.

VII SKYRIUS

Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей, изд. 3-е, М., изд-во «Наука», 1967.
Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М., ИЛ, 1957.
Уиттекер Э., Робинсон Г. Математическая обработка результатов наблюдений. Л.—М., *ОНТИ*, 1935.

IX SKYRIUS

Кроуэлл Р. Г., Фокс Р. Х. Введение в теорию узлов. М., изд-во «Мир», 1967.
Tait P. G. Scientific Papers, vol. I. Cambridge, Cambridge University Press, 1898, p. 273—347. On Knots.

X SKYRIUS

Дринфельд Г. И. Трансцендентность чисел π и e. Изд-во Харьковского университета, 1952.

Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. I. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1933, р. 352—373. Трансцендентность чисел e и π.

XI SKYRIUS

Болтянский В. Г. Равновеликие и равносоставленные фигуры. (Популярные лекции по математике, вып. 22). М., Гостехиздат, 1956.
Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц. Разбиение фигур на меньшие части. М., изд-во «Наука», 1971. (Популярные лекции по математике, вып. 50).
Dudeney H. E. The Canterbury Puzzles. New York, Dover Publication, 1958.
Dudeney H. E. Amusements in Mathematics. New York, Dover Publication, 1958.
Dudeney H. E. 536 Puzzles and Curious Problems. New York, Scribner, 1967.
Loyd S. Mathematical Puzzles of Sam Loyd, 2 volumes. New York, Dover Publications, 1959—1960.
Lindgren H. Geometric Dissections. Princeton, Van Nostrand, 1964.
Lindgren H. Some Approximate Dissections. *Journal of Recreational Mathematics,* 1, № 2, 79—92 (April 1968).

XII SKYRIUS

Гарднер М. Этот правый, левый мир. М., изд-во «Мир», 1967.
Гордевский Д. З., Лейбман А. С. Популярное введение в многомерную геометрию. Харьков, изд-во Харьковского университета, 1964.
Кольман Э. Четвертое измерение. М., изд-во «Наука», 1970.
Мостепаненко А. М., Мостепаненко М. В., Четырехмерность пространства и времени. М.—Л., изд-во «Наука», 1966.
Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П. Омар Хайям. М., изд-во «Наука», 1965.

XIV SKYRIUS

Ботвинник М. М. Алгоритм игры в шахматы. М., изд-во «Наука», 1968.
Адельсон-Вельский Г. М., Арлазаров В. Л., Битман А. Р., Животовский А. А., Усков А. В. О программировании игры в шахматы. *Успехи математических наук,* 25, вып. 2, 221—260 (1970).
Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М., ИЛ, 1963, р. 181—191. Машина для игры в шахматы; р. 192—222. Составление программ для игры в шахматы на машине.

XV SKYRIUS

Вейль Г. Симметрия. М., изд-во «Наука», 1968.
Веселовский И. Н. Архимед. (Серия «Классики науки») М., Учпедгиз, 1957.
Гарднер М. Этот правый, левый мир. М., изд-во «Мир», 1967.

XVI SKYRIUS

Солитер. *Наука и жизнь*, № 7, 1966, p. 135.
Аренс В. Математические игры и развлечения. Л.—М., изд-во «Петроград», 1924.

XIX SKYRIUS

Воробьев Н. Н. Признаки делимости. (Популярные лекции по математике, вып. 39). М., Физматгиз, 1963.
Поляков И. Е. Признаки делимости натуральных чисел на любое простое число. М., Углетехиздат, 1954.

XXII SKYRIUS

Веревочные узоры. *Наука и жизнь*, № 7, 1966, p. 124—125.

XXIII SKYRIUS

Бляшке. Круг и шар. М., изд-во «Наука», 1967.
Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. Изд. 4-е. М., изд-во «Наука», 1966.
Яглом И. М., Болтянский В. Г. Выпуклые фигуры. (Библиотека математического кружка, вып. 4). М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1951.

XXVII SKYRIUS

Александров П. С., Ефремович В. А. О простейших понятиях современной топологии. (Популярная библиотека по математике). М.—Л., Гостехиздат, 1935.
Александров П. С., Ефремович В. А. Очерк основных понятий топологии. М.—Л., Гостехиздат, 1936.
Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Очерк основных идей топологии. Математическое просвещение, вып. 2, 3, 4, 6 (новая серия).
Зейферт Г. И., Трельфалль В. Топология. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1938.
Стинрод Н., Чинн У. Первые понятия топологии. (Современная математика. Популярная серия). М., изд-во «Мир», 1967.
Barr S. Experiments in Topology. New York, Crowell, 1964.

XXXIV SKYRIUS

Делоне Б. Н. Петербургская школа теории чисел. Изд-во АН СССР, 1947.
Депман И. Я. Совершенные числа. *Квант*, № 8, 1—6 (1971).
Серпинский В. Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. М., Физматгиз, 1963.
Трост Э. Простые числа. М., Физматгиз, 1959.

XXXV SKYRIUS

Берж К. Теория графов и ее применения. М., ИЛ, 1962.
Визинг В. Г. Некоторые нерешенные задачи в теории графов. *Успехи математических наук,* **23**, вып. 6, 117 (1968).
Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. М., изд-во «Мир», 1971.
Гроссман И., Магнус В. Группы и их графы. (Современная математика. Популярная серия). М., изд-во «Мир», 1971.
Зыков А. А. Теория конечных графов. Новосибирск, изд-во «Наука», 1969.
Оре О. Графы и их применения. М., изд-во «Мир», 1965. Прикладная комбинаторная математика. М., изд-во «Мир», 1968.
Харари Ф. Задачи перечисления графов. *Успехи математических наук,* **24**, вып. 5, 179—214 (1969).

XXXVI SKYRIUS

Леффлер Э. Цифры и цифровые системы культурных народов в древности и в новое время. Одесса, Mathesis, 1913.
Фомин С. В. Системы счисления. (Популярные лекции по математике, вып. 40). М., изд-во «Наука», 1964.
Яглом И. М. Системы счисления. *Квант,* № 6, 2—10 (1970).

XXXVII SKYRIUS

Sprague R. Unterhaltsame Mathematik. Braunschweig, 1964.

LITERATŪRA APIE ĮDOMIĄJĄ MATEMATIKĄ

1. Акентьев В. В. Когда идет дождь. Л., Детгиз, 1959.
2. Акентьев В. В. Веселые тайны. Л., Детгиз 1964.
3. Акентьев В. В. Со второго взгляда. Л., Лениздат, 1969.
4. Андреев А. (составитель). Попробуй, отгадай! Ташкент, изд-во ЦК ЛКСМ Узбекистана «Ёш гвардия», 1962.
5. Антонович Н. К. 100 математических игр для учащихся 5—8 классов. Новосибирск, 1963.
6. Балк М. Б. Организация и содержание внеклассных занятий по математике. М., Учпедгиз, 1956.
7. Балк М. Б., Балк Г. Д. Математика после уроков. М., изд-во «Просвещение», 1971.
8. Бирнов З. М. (составитель). На досуге. Сталинград, книжное изд-во, 1956.
9. В. З. (составитель). Наши головоломки. (Библиотека «*Мурзилки»*). М., изд-во «Правда», 1930.
10. Гадательная арифметика для забавы и удовольствия. Спб., 1789.
11. Галанин Д. Д. Леонтий Филипович Магницкий и его «Арифметика». М., 1914.
12. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. М., изд-во «Мир», 1971.

13. Глязер С. В. Познавательные игры. Трудрезервиздат, 1951.
14. Горбунова-Посадова Е. Е., Короткова Е. Думайте — не зевайте! М., кооперативное издательское тов-во «Посредник», 1926.
15. Громов А. И. Головоломка «Дом». М., Госиздат, 1930.
16. Громов А. И. Головоломка «Завод». М., Госиздат, 1930.
17. Громов А. И. Головоломка «Индеец». М., Госиздат, 1930.
18. Громов А. И. Головоломка «Паровоз». М., Госиздат, 1930.
19. Громов А. И. Головоломка «Петух». М., Госиздат, 1930.
20. 10 занимательных задач. М., изд-во «Правда», 1940.
21. Занимательные путешествия. М., тов-во «Сотрудник», 1939.
22. Затейный С. (составитель). В свободную минуту. Свердловск, Свердловское книжное изд-во, 1954.
23. Зенкевич И. Г. Сборник вопросов и задач для математических кружков 5 классов. Брянск, 1967.
24. Зотов Г. А. (составитель). Смекни-ка. (Библиотечка журнала *«Дружные ребята»*). М., изд-во «Крестьянская газета», 1927.
25. Иванов И. И. Веселый математик. М., ОГИЗ — «Молодая гвардия», 1933.
26. Иванов-Даль И. П. Игры, забавы и задачи для юной смекалки. Вып. I, М.—Л., Госиздат, 1927.
27. Игра «А ну-ка сложи». М., 1938.
28. Кильдюшевский Н. П. Юным математикам. Вып. I, Казань, 1911.
29. Козявкин А. (составитель). Пять вечеров пионерской смекалки, Орел, 1929.
30. Комарова Н. Головоломки. (Библиотека рабоче-крестьянской молодежи). М., изд-во «Новая Москва», 1926.
31. Котов А. Я. Вечера занимательной арифметики. Изд. 2-е, М., изд-во «Просвещение», 1967.
32. Ли Э. Научные развлечения. Сер. I, Владивосток, 1927.
33. Линьков Г. И. Внеклассная работа по математике. М., Учпедгиз, 1954.
34. Лоповок Л. М. (составитель). Материалы для внеклассной работы по математике в школах. Луганск, 1965.
35. Магницкий Л. Ф. Арифметика Магницкого. М., 1914.
36. Математический кросс. Пермь, книжное изд-во, 1962.
37. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. М., изд-во «Наука», 1971.
38. Нестеров В. В. На досуге. М., изд-во «Детский мир», 1962.
39. Паркеты (головоломки). М., кооперативное тов-во «Сотрудник», 1938.
40. Перельман Я. И. Занимательные задачи и опыты. (Школьная библиотека). М., Детгиз, 1959.
41. Петрова Ф. Г. Математические вечера. Изд. 2-е. Ижевск, изд-во «Удмуртия», 1968.
42. Подашов А. П. Вопросы внеклассной работы по математике в школе (5—11 классы). Изд. 2-е. М., Учпедгиз, 1962.
43. Подашов А. П. Математические софизмы, парадоксы и логические задачи. Улан-Удэ, Бурятское книжное изд-во, 1962.
44. Пугачев А. С. Задачи-головоломки по черчению. Изд. 3-е. Л., изд-во «Судостроение», 1971.
45. Ревазов С. Г. Геометрия для детей, или 400 из 5 (четыреста

геометрических построений из пяти фигур). Тбилиси, техиздат «Техника да шрома», 1938.
46. Рудин Н. М. От магического квадрата к шахматам. М., изд-во «Просвещение», 1969.
47. Рупасов К. А. 100 логических задач. Тамбов, 1963.
48. Серебровская Е. К. Опыт внеклассной работы по математике в 5—7 классах. М., Учпедгиз, 1954.
49. Студенецкий Н. В. Веселый отдых. М., изд-во «Искусство», 1956.
50. Студенецкий Н. В. Мастерская головоломок. (Библиотечка пионера «Знай и умей»). М., изд-во «Детская литература», 1964.
51. Таран Н. Г. Математические вечера в школе. Майкоп, Адыгейское книжное изд-во, 1964.
52. Хаскин А. И. (составитель). Карнавалиада. М., 1939.
53. Чкаников И. Н. 500 игр и развлечений. Изд. 3-е. М., Госкультпросветиздат, 1950.
54. Чкаников И. Н. Игры и развлечения. М.—Л., Детгиз, 1953.
55. Шлыкович А. С. В клубе, в дороге и дома. М., Профиздат, 1969.
56. Щеглов Н. В. (составитель). На досуге. Ростов-на Дону, Ростовское книжное изд-во, 1957.

TURINYS

Martinas Gardneris
MATEMATIKA LAISVALAIKIU
Priemonė mokiniams

Redaktorė *J. Jašinskienė*
Viršelis *E. Poželaitės.* Men. redaktorė *A. Onaitytė*
Techn. redaktorė *R. Berteškaitė.* Korektorė *S. Trapuilaitė*
Vertimą recenzavo *Petras Vaškas*

Мартин Гарднер
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДОСУГИ
Пособие для учащихся
Русский перевод под ред. *Я. А. Смородинского*
Перевел с русского *Витаутас Лютикас*
На литовском языке
Литовская ССР, 233000, Каунас, пр. Ленина, 25, издательство «Швиеса»

IB Nr. 685

Duota rinkti 79 10.09. Pasirašyta spausdinti 80.02.22. Formatas 84×108[1]/32, popierius spaudos Nr. 3, literatūrinė garnitūra, iškilioji spauda, viena spalva. 23,94 sąl. sp. lnk., 23,85 leid. lnk. Tiražas 15 000 egz. Užsakymo Nr. 1310. Leid. Nr. 8560.

Kaina 75 kap.

Leidykla „Šviesa“, 233000 Kaunas, Lenino pr. 25.
V. Kapsuko-Mickevičiaus spaustuvė, 233000 Kaunas, Lenino pr. 23.